МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1 ШИФР 7-006

Заполняется ответственным секретарем

+ + 1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

? 3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.

\+ 4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

+ + 5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

+ + 7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

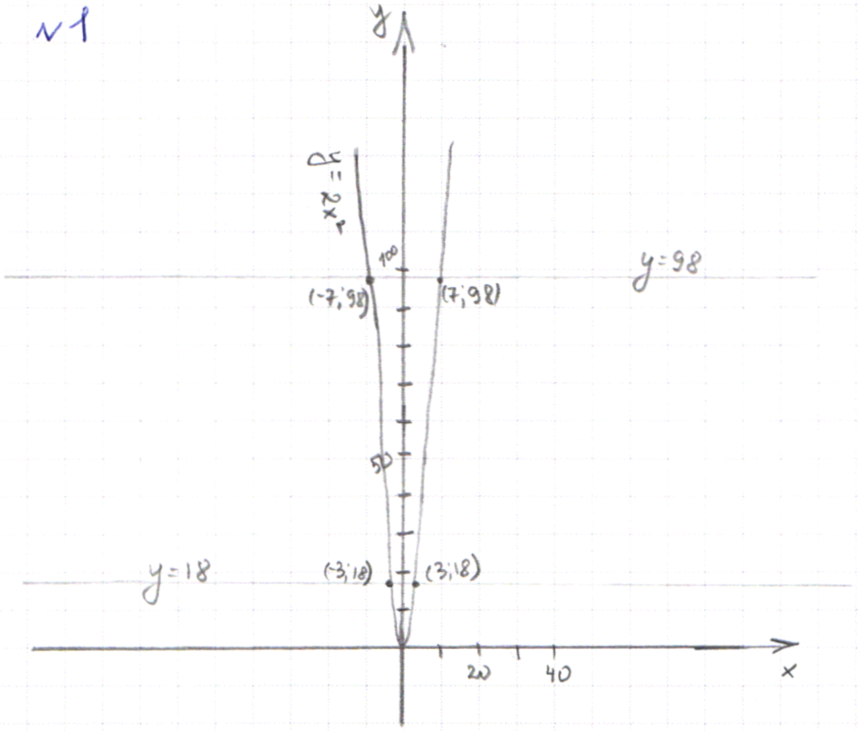
7-006

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

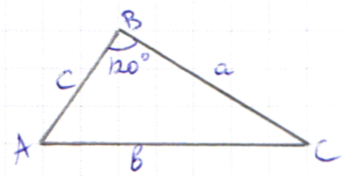


$y=2x^2$

$y=98 \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{98}{2}} = \pm 7$

$y=18 \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{18}{2}} = \pm 3$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ длина 2 сторон треугольника равна 14 и ~~8~~6



$b^2 = a^2+c^2-2ac\cos 120^\circ =$
$= a^2+c^2+a\cdot c = (a+c)^2 - ac$

при этом $b>c$, $b>a$

I. $b=14$; $a=6$

$14^2 = 6^2 + c^2 + 6c$

$c^2+6c+36-196=0$

$c^2+6c-160=0$

$D = 36+640 = 676 = 26^2$

$c_{1,2} = \frac{-6\pm 26}{2} = \left[\begin{array}{l} 10 \\ -16 \end{array}\right.$

$\Rightarrow c=10 \Rightarrow x=\pm 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow \pm 5 = \pm\sqrt{\frac{a}{2}}$

$25 = \frac{a}{2}$

$a=50$

II $a=14$; $c=6$

$b^2 = 14^2+6^2+14\cdot 6 = (14+6)^2 - 14\cdot 6 =$
$= 400-84 = 316 = 4\cdot 79$

$b = 2\sqrt{79} \Rightarrow x = \pm\sqrt{79} \Rightarrow$

$\pm\sqrt{79} = \pm\sqrt{\frac{a}{2}}$

$79 = \frac{a}{2}$

$a = 158$

III $b=14$; $c=6$ – аналогично I

IV. $a=6$; $c=14$ – аналогично II

Ответ: $a=50$; $a=158$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№5

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$

ОДЗ:

$\begin{cases} \sqrt{x+7}-x>0 \\ \sqrt{x+7}-x \neq 1 \\ x+4>0 \end{cases}$

① $\sqrt{x+7}>x$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0 \\ x+7>x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x<0 \\ x+7>0 \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2-x-7<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x<0 \\ x>-7 \end{cases} \end{array}\right.$

$D=1+28=29$

$x_{1,2}=\frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0 \\ x \in \left(\frac{1-\sqrt{29}}{2}; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) \end{cases} \\ \begin{cases} x<0 \\ x>-7 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow x \in \left(-7; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

② $\sqrt{x+7} \neq x+1$

$x+7 \neq x^2+2x+1$

$x^2+x-6 \neq 0$

$D=1+24=5^2$

$x_{1,2}=\frac{-1 \pm 5}{2}=\left[\begin{array}{l} 2 \\ -3 \end{array}\right.$

$x \neq \left[\begin{array}{l} 2 \\ -3 \end{array}\right.$

③ $x>-4$

$x \in (-4;-3) \cup (-3;2) \cup \left(2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq \log_{\sqrt{x+7}-x}\left(\sqrt{x+7}-x\right)$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x+7}-x>1 \\ x+4 \geq \sqrt{x+7}-x \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x+7}-x<1 \\ x+4 \leq \sqrt{x+7}-x \end{cases} \end{array}\right.$

1) $\sqrt{x+7}>x+1$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x+7>x^2+2x+1 \end{cases} \\ \begin{cases} x+1<0 \\ x+7 \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2+x-6<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x<-1 \\ x \geq -7 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq -1 \\ x \in (-3;2) \end{cases} \\ x \in [-7;-1) \end{array}\right. \Rightarrow x \in [-7;2)$

2) $2x+4 \geq \sqrt{x+7}$

$\begin{cases} 2x+4 \geq 0 \\ 4(x+2)^2 \geq x+7 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -2 \\ 4(x^2+4x+4) \geq x+7 \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq -2 \\ 4x^2+15x+9 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -2 \\ x \in (-\infty;-3] \cup \\ \cup \left[-\frac{3}{4}; +\infty\right) \end{cases}$

$\begin{cases} D=225-4 \cdot 36=225-120-24=105-24= \\ =81 \\ x_{1,2}=\frac{-15 \pm 9}{8}=\left[\begin{array}{l} -\frac{3}{4} \\ -3 \end{array}\right. \end{cases}$

$\Rightarrow x \in \left[-\frac{3}{4}; +\infty\right)$

☐ черновик ☑ чистовик Страница №2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

7-006

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) $\sqrt{x+7} < x+1$

$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x+7 < x^2+2x+1 \end{cases} \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2+x-6 > 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \in (-\infty; -3) \cup (2; +\infty) \end{cases}$

$\Downarrow$

$x \in (2; +\infty)$

4) $2(x+2) \leq \sqrt{x+7}$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 4(x+2)^2 \leq x+7 \end{cases} \\ \begin{cases} x+2 < 0 \\ x+7 \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq -2 \\ 4x^2+15x+9 \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < -2 \\ x \geq -7 \end{cases} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq -2 \\ x \in [-3; -\frac{3}{4}] \end{cases} \\ \begin{cases} x < -2 \\ x \geq -7 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow x \in [-7; -\frac{3}{4}]$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in [-7; 2) \\ x \in [-\frac{3}{4}; +\infty) \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (2; +\infty) \\ x \in [-7; -\frac{3}{4}] \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in [-\frac{3}{4}; 2) \\ \varnothing \end{array}\right.$

Ответ: $x \in [-\frac{3}{4}; 2)$

№ 7

$[1, 45]$; $[46; 90]$, $[91, 135]$, $[136, 180]$, $[181, 225]$

Пусть n — число, показова-ее, каким по счету стоит число в промежутке.

Заметим, что каждый промежуток содержит 45 целых чисел, а также все числа одного промежутка дают разные остатки при делении на 45, при чем значение остатка равно n (искл.: $n = 45 \Rightarrow$ остаток $= 45$, т.е. $= 0$)

Разность никаких 2 выбранных чисел не делится на 45 $\Leftrightarrow$ среди чисел, выбранных Пиноккио, не сущ-ет 2 чисел с одинаковыми остатками от деления на 45, т.е. все выбранные числа имеют разное значение n.

Т.к. необходимо найти наименьшее значение суммы, из последнего промежутка возьмем числа с $n \in [1, 6]$; из 4 промежутка — с $n \in [7, 12]$; из 3 пром-ка — с $n \in [13, 18]$; из 2 пром-ка — с $n \in [19; 24]$, из 1 пр-ка — с $n \in [25, 30]$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

$(181+182+183+184+185+186)+(142+143+\ldots+147)+(103+104+\ldots+108)+$
$+(64+65+\ldots+69)+(25+26+\ldots+30)=\frac{(181+184)\cdot 6}{2}+\frac{(142+145)\cdot 6}{2}+$
$+\frac{(103+106)\cdot 6}{2}+\frac{(64+67)\cdot 6}{2}+\frac{(25+28)\cdot 6}{2}=3\cdot(181+184+142+145+103+106+25$
$+28+64+67)=1050$

Ответ: 1050.

№3

„0"; „7"; „8"

17 знач.

1) Сколько сущ-ет 10 значных чисел, содерж-их цифры „0" и „7"
(каждая цифра встречается хотя бы раз)?

$2^{10}-2=2(2^9-1)$, (т.к. 2^{10} - кол-во 10 знач. чисел из цифр „0" и „7";
2 - кол-во чисел, сост-их только из „0" или „7")

2) 7 подряд идущих „8" можно „вставить" в 10 значное
число 11 способами

$\Downarrow$

Кол-во 17 знач. чисел, удовлетв-их условию $=11\cdot 2\cdot(2^9-1)=$
$=22\cdot 256\cdot 2=11264$

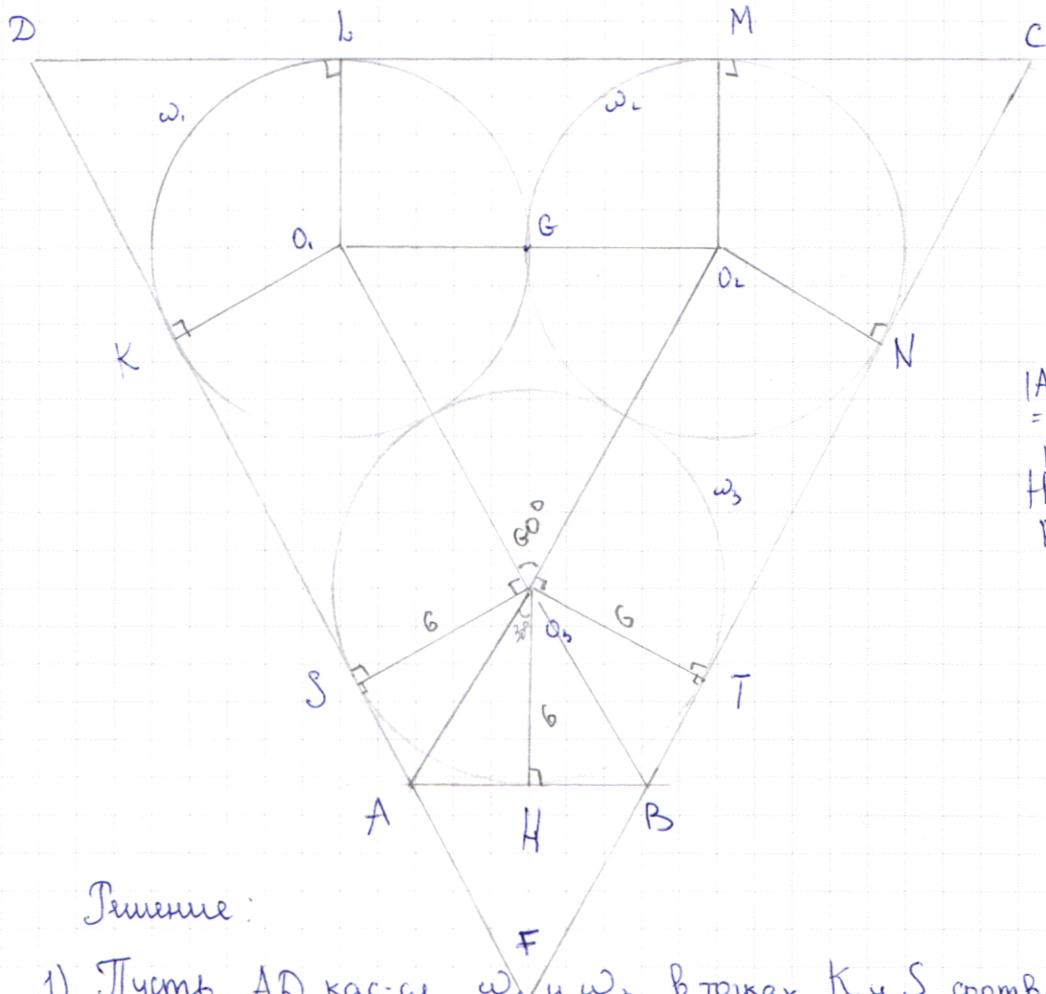
Ответ: 11264 чисел.

№3

$(2^{10}-1)+(2^9-1)+2(2^8-1)+3\cdot(2^7-1)+4\cdot(2^6-1)+5\cdot(2^5-1)+$
$+6(2^4-1)+7\cdot(2^3-1)+8\cdot(2^2-1)\cdot 9(2^1-1)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4



Дано:

$\square ABCD$

$\omega_1; \omega_2; \omega_3$ – попарно касающ. окружн. внутри четырехуг.

$R_1 = R_2 = R_3$

$|AD| + |BC| - |AB| - |CD| = 12$

$|AO_3| \cdot |BO_3| = 58$

Найти:

R - ? $\angle AO_3B$ - ?

$|AB|$ - ?

Решение:

1) Пусть AD кас-ся ω_1 и ω_3 в точках K и S соответственно;
CB кас-ся ω_2 и ω_3 в точках N и T соотв-но;
DC кас-ся ω_1 и ω_2 в точках L и M соотв-но;
AB кас-ся ω_3 в точке H

2) Т.к. ω_1 вписана в $\angle LDK$; ω_2 – в $\angle MCN$; ω_3 – в $\angle SAH$ и $\angle HBT$, то $|DL| = |DK|$; $|MC| = |CN|$; $|SA| = |AH|$; $|HB| = |BT|$

3) Т.к. $\angle O_1LM = \angle O_2ML = 90°$, а также $|LO_1| = |MO_2|$ =>

=> $|LM| = |O_1O_2| = 2R$

4) Аналогично $|KS| = |NT| = 2R$

5) $|AD| + |BC| - |AB| - |CD| = |DK| + |SA| + 2R + |BT| + |NC| + 2R -$

$-|SA|-|BT|-|DK|-|CN|-2R = 2R = 12 \Rightarrow R = 6$

6) Пусть $F = [DA] \cap [BC]$, $\omega_1 \cap \omega_2 = G$

7) ω_1 впис. в $\angle KFG \Rightarrow |KF| = |FG|$

$|FG| = |NF|$ — аналогично

$\Rightarrow |KF| = |NF| \Rightarrow \triangle KFN$ — р/б

8) $[AB] \parallel [KN] \Rightarrow \triangle ABF$ — р/б $\Rightarrow \angle BAF = \angle ABF \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle SAB = \angle TBA \Rightarrow \angle HO_3T = \angle HO_3S$ (т.к. четырехуг-ик с 2 углами $= 90°$) $\Rightarrow \angle HO_3T + \angle HO_3S = 180° - 60° = 120°$ (т.к. $\triangle O_1O_2O_3$ — р/с)

$\Rightarrow \angle HO_3T = HO_3S = 60°$

9) $|AH| = |AS|$ (ω вписана в угол)

$|O_3S| = |O_3H|$ (т.к. радиус)

$\angle O_3SA = \angle O_3HA = 90°$

$\Rightarrow \triangle O_3SA = \triangle O_3HA \Rightarrow \angle SO_3A = \angle HO_3A = 60°/2 = 30°$

10) Аналогично $\angle HO_3B = 30° \Rightarrow \angle AO_3B = 2 \cdot 30° = 60°$

11) $S_{\triangle AO_3B} = |AO_3| \cdot |BO_3| \cdot \sin 60° \cdot \frac{1}{2}$

$S_{\triangle AO_3B} = 6 \cdot |AH|$

$\Rightarrow 58 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = 6 \cdot |AH|$

$|AH| = \frac{\cancel{58}^{29} \cdot \sqrt{3}}{\cancel{4}_{2} \cdot 6} = \frac{29\sqrt{3}}{12}$

$\Downarrow$

$|AB| = 2 \cdot |AH| = \frac{29\sqrt{3}}{6} = \frac{29}{2\sqrt{3}}$

Ответ: $R = 6$; $\angle AO_3B = 60°$; $|AB| = \frac{29}{2\sqrt{3}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

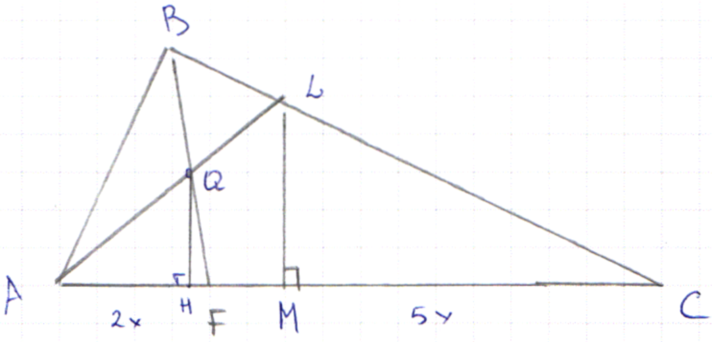
7-006.

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6



Дано: $\triangle ABC$
$F \in [AC]$, $L \in [BC]$
$|AF| : |FC| = 2 : 5$
$[BF] \cap [AL] = Q$
$\dfrac{S_{\triangle BQL}}{S_{\triangle BAC}} = \dfrac{5}{12}$
$|QH| = 6$
Найти:
$|LM| - ?$

Решение:

1) $\triangle AQH \sim \triangle ALM$ (т.к. прямоуг. и $\angle A$) $\Rightarrow \dfrac{|QH|}{|LM|} = \dfrac{|AQ|}{|AL|} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{|LM|}{|QH|} = \dfrac{|AQ| + |QL|}{|AQ|} = 1 + \dfrac{|QL|}{|AQ|} \Rightarrow |LM| = 6 \cdot \left(1 + \dfrac{|QL|}{|AQ|}\right)$

2) $\dfrac{S_{\triangle AQF}}{S_{\triangle ALC}} = \dfrac{2x \cdot |QH|}{5x \cdot |LM|} = \dfrac{2 \cdot 6}{5 \cdot |LM|}$

3) $\dfrac{S_{\triangle ABQ}}{S_{\triangle BQL}} = \dfrac{|AQ|}{|QL|}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

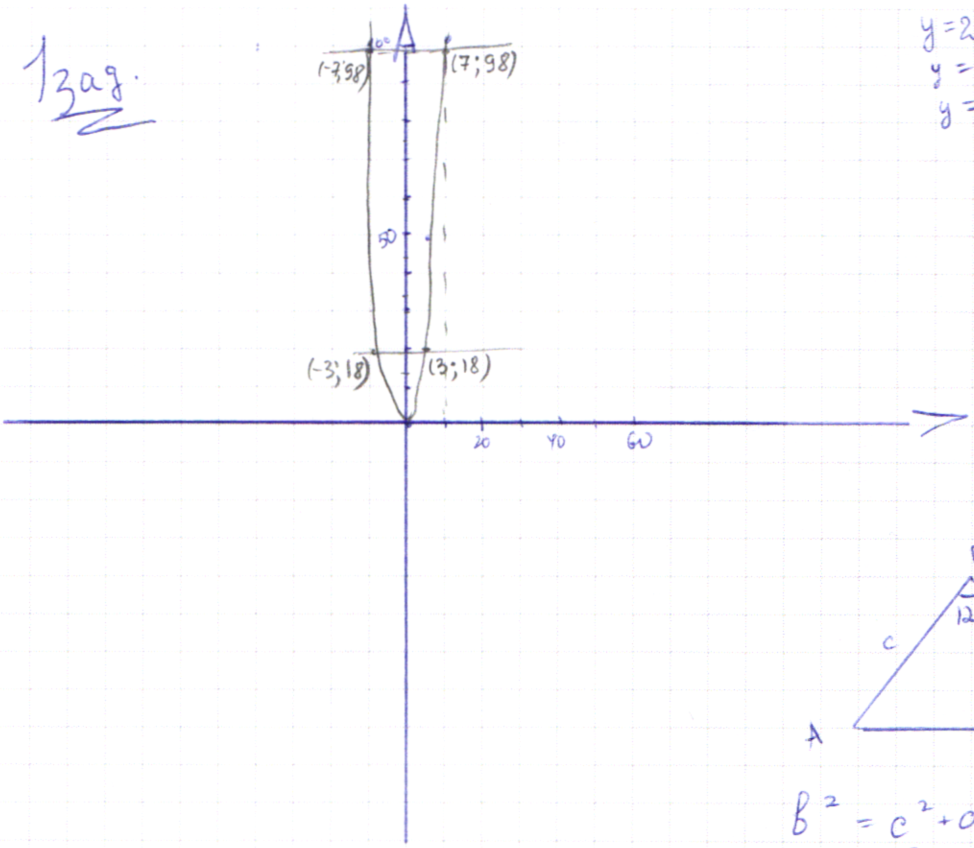
7-006

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1 зад.

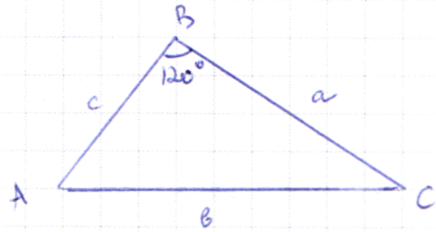


$y=2x^2$

$y=98 \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{98}{2}}=\pm 7$

$y=18 \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{18}{2}}=\pm 3$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 2 стороны треугольника равны 14 и 6.



$b^2 = c^2+a^2-2ac\cos 120^\circ =$

$= c^2+a^2+ac = (c+a)^2-ac$

$\{b>a;\ b>c\}$

I $b=14;\ a=6$

$14^2=6^2+c^2+6c$

$c^2+6c+36-196=0$

$c^2+6c-160=0$

$D=36+400+240=676=26^2$

$c_{1,2}=\frac{-6\pm 26}{2}=\left[\begin{array}{l}10\\-16\end{array}\right.$

$c=10 \Rightarrow x=\pm 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~$y=2\cdot 25^2$~~ $x=\pm\sqrt{\frac{y}{2}}$

$\Rightarrow 5=\sqrt{\frac{y}{2}}$

$25=\frac{y}{2}$

$y=50$

II $a=14;\ c=6$

$b^2=(14+6)^2-14\cdot 6=400-60-24=$

$=340-24=316=2\cdot 158=2\cdot 2\cdot 79=4\cdot 79$

$b=\pm 2\sqrt{79}$

$\Downarrow$

$x=\pm\sqrt{79}$

$\Downarrow$

$\sqrt{79}=\sqrt{\frac{y}{2}}$

$79=\frac{y}{2}$

$y=158$

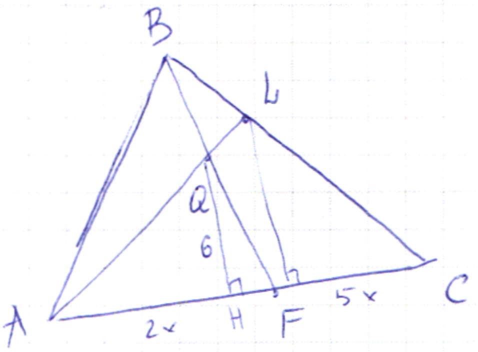
III $b=14;\ c=6$ — аналогично I

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$$\frac{S_{\triangle BQL}}{S_{\triangle BAC}} = \frac{5}{12}$$

$\cancel{\frac{\triangle AQH}{\triangle ALF}}$ $\triangle AQH \sim \triangle ALF \Rightarrow \frac{6}{LM} = \frac{AQ}{AQ+QL} \Rightarrow \frac{6}{LM} = 1 + \frac{QL}{AQ}$

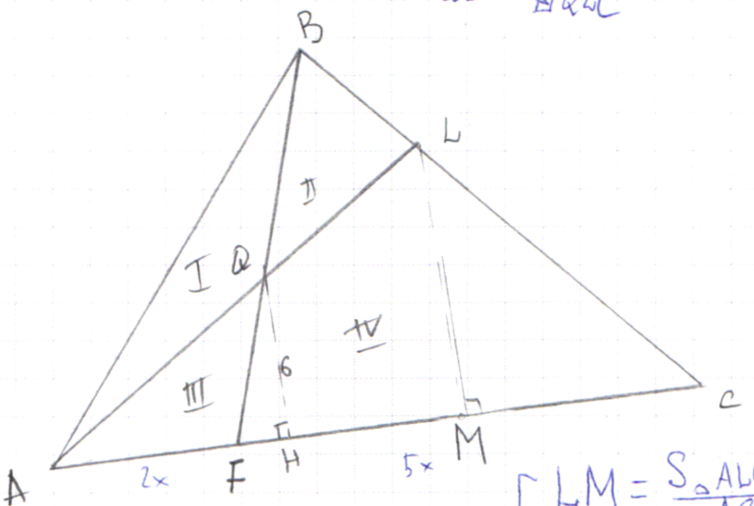
$$\Downarrow$$

$$6 = LM\left(1 + \frac{QL}{AQ}\right)$$

$$LM = \frac{6}{\frac{AQ+QL}{AQ}} = \frac{6AQ}{AQ+QL}$$

$$\frac{S_{\triangle BQL}}{S_{\triangle ABQ}} = \frac{QL}{AQ}$$

$$\frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle BFC}} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{S_{\triangle ABQ} + S_{\triangle AQF}}{S_{\triangle BQL} + S_{\triangle QLC}} = \frac{2}{5}$$



$$\frac{S_{\triangle BQL}}{S_{\triangle BAC}} = \frac{5}{12}$$

$$QH = 6$$

$$\frac{AF}{FC} = \frac{2}{5}$$

$S_{\triangle ALC} = AC \cdot LM \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} LM = \frac{S_{\triangle ALC}}{AC} & \Rightarrow S_{\triangle ALC} - ? \\ LM = \frac{6}{1 + \frac{QL}{QA}} & \Rightarrow \frac{QL}{QA} - ? \end{array}\right.$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{S_{\triangle BQL}}{S_{\triangle ABQ}} = \frac{QL}{AQ} \\ \cancel{S_{\triangle BQL}} \ \frac{S_{\triangle ABL}}{S_{\triangle ALC}} = \frac{BL}{LC} \end{array}\right.$$

$$\left\{ \frac{S_{\triangle AQF}}{S_{\triangle ALC}} = \frac{6 \cdot 2x}{LM \cdot 7x} = \frac{12}{7 \cdot LM} \right.$$

$$\frac{S_{\triangle BQL}}{S_{\triangle BAC}} = \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{S_{\triangle BAC}}{S_{\triangle BQL}} = \frac{12}{5} \Rightarrow 1 + \frac{S_{\triangle ABQ}}{S_{\triangle BQL}} + \frac{S_{\triangle ALC}}{S_{\triangle BQL}} = \frac{12}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{QA}{QL} + \frac{S_{\triangle ALC}}{S_{\triangle BQL}} = \frac{7}{5}$$

$$\frac{S_{\triangle ALC}}{S_{\triangle BQL}} = \frac{S_{\triangle AQF}}{S_{\triangle BQL}} + \frac{S_{\triangle QFLC}}{S_{\triangle BQL}}$$

$$\frac{S_{I} + S_{III}}{S_{II} + S_{IV}} = \frac{2}{5} = \frac{h \cdot AQ + 6 \cdot 2x}{h \cdot QL + 6 \cdot 2x \cdot \frac{25}{4}} = \frac{2}{5} \Rightarrow 2h \cdot QL + 6 \cdot 25x = 5hAQ + 60x$$

$$h(5AQ - 2QL) = 6 \cdot 15x$$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

7-006
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

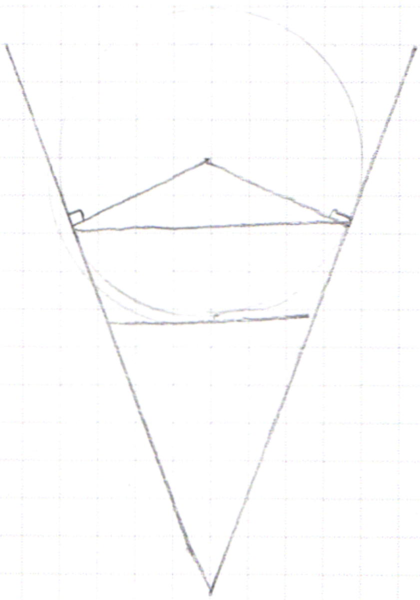
$$\frac{1}{\frac{6-LM}{LM}} ; \quad \frac{LM}{6-LM} + \frac{5LM^2}{24(6-LM)} = \frac{7}{5}$$

$$\frac{24LM+5LM^2}{24(6-LM)} = \frac{7}{5}$$

$$5LM^2+2LM-1,4=0$$
$$50LM^2+20LM-14=0$$

$$D=400+200\cdot 14=2800+400=3200=100\cdot 4\cdot 8=40^2\cdot 2$$

$$LM=\frac{-20\pm 40\sqrt{2}}{100}=\frac{-2\pm 4\sqrt{2}}{10}$$



$11\cdot 2(2^9-1)-22\cdot 512$

$11\cdot 2($

$2^9=2^4\cdot 2^5=(2^4)^2\cdot 2=16^2\cdot 2=$

$2^4=4\cdot 4=16$

$16\cdot 16=96+160=256$

$256\cdot 44=1024+10240=11264$

2^9-1

① что нач... с нуля

1) $- \; 2^{10} - 1$

$2^9 - 1$

$(2^8 - 1) \cdot 2$

$(2^7 - 1) \cdot$

ab
aa
ba
bb

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

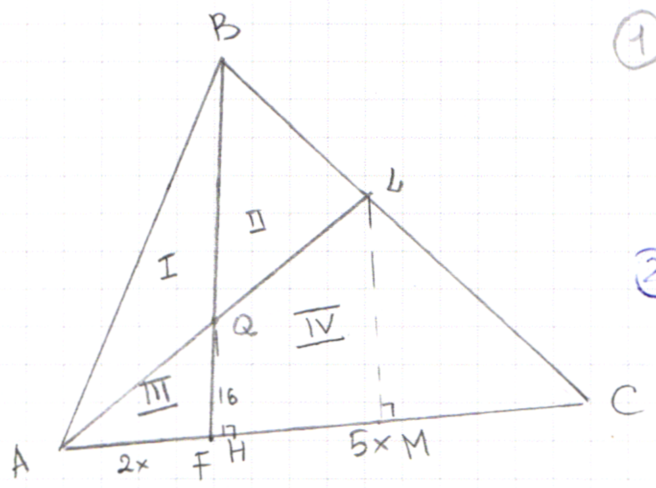
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

7-006

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



① $\triangle AQH \sim \triangle ALM$ $\quad \frac{QL}{AQ} = \frac{6}{LM} - 1$

$\Downarrow$

$\frac{AQ}{AQ+QL} = \frac{6}{LM}$; $\quad 1 + \frac{QL}{AQ} = \frac{6}{LM}$

② $\frac{S_{III}}{S_{III}+S_{IV}} = \frac{6 \cdot 2x}{LM \cdot 5x} = \frac{12}{5 \cdot LM}$

$\frac{S_{III}+S_{IV}}{S_{III}} = 1 + \frac{S_{IV}}{S_{III}} = 1 + \frac{\frac{1}{2} \cdot 5x \cdot 6 + LC \cdot h_a}{\frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 6} =$

$= 1 + \frac{5}{2} + \frac{LC \cdot h_a}{\frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 6} = \frac{7}{2} + \frac{LC \cdot h_a}{6x}$

$\frac{5 \cdot LM}{12} = \frac{7}{2} + \frac{LC \cdot h_a}{6x}$

$5LM = 42 + 2LC \cdot h_a$ (?)

$\cancel{12}$ $\frac{5}{12 LM} = 1 + \frac{S_{IV}}{S_{III}}$

③ $\frac{S_{II}}{S_I + S_{II} + S_{III} + S_{IV}} = \frac{5}{12} \Rightarrow 1 + \frac{S_I + S_{III} + S_{IV}}{S_{II}} = \frac{12}{5}$

$\frac{AQ}{QL} + \frac{S_{III}+S_{IV}}{S_{II}} = \frac{7}{5} \Rightarrow \frac{AQ}{QL} \cdot \left(1 + \frac{5LM}{24}\right) = \frac{7}{5}$

$\frac{S_I}{S_{II}} = \frac{AQ}{QL}$ $\qquad \frac{1}{\frac{6}{LM} - 1} \cdot \left(1 + \frac{5LM}{24}\right) = \frac{7}{5}$

④ $\frac{S_I + S_{III}}{S_{II} + S_{IV}} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{S_{II} + S_{II} \cdot \frac{AQ}{QL}}{LM \cdot 7x} = \frac{S_{II} \cdot \frac{AQ+QL}{QL}}{LM \cdot 7x} = \frac{2}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{S_{II} \cdot} S_I + S_I \cdot \frac{QL}{AQ} = \frac{S_I \cdot \frac{QL+AQ}{AQ}}{LM \cdot 7x} = \frac{\frac{LM}{6} \cdot S_I}{LM \cdot 7x} = \frac{S_I}{42x} = \frac{2}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_I = 84x/5$

⑤ $\frac{S_I}{S_{III} \cdot S_{IV}} = \frac{84x/5}{\frac{1}{2} \cdot 7x \cdot LM} = \frac{84/5}{7LM/2} = \frac{\overset{12}{\cancel{84}}}{5} \cdot \frac{2}{\cancel{7}LM} = \frac{24}{5LM}$

⑥ $\frac{S_I}{S_{II}} = \frac{AQ}{QL} \Rightarrow S_{II} = \frac{S_I \cdot QL}{AQ} = \frac{84x/5 \cdot QL}{AQ} = \frac{84x \cdot QL}{5AQ}$

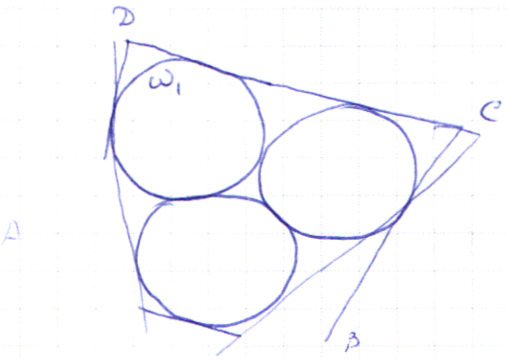
⑦ $\cancel{8}$ $\frac{S_{III}+S_{IV}}{S_{II}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \cancel{7x} \cdot LM \cdot 5 \cdot AQ}{\underset{12}{\cancel{84}}x \cdot QL} = \frac{5 \cdot AQ \cdot LM}{24 QL}$

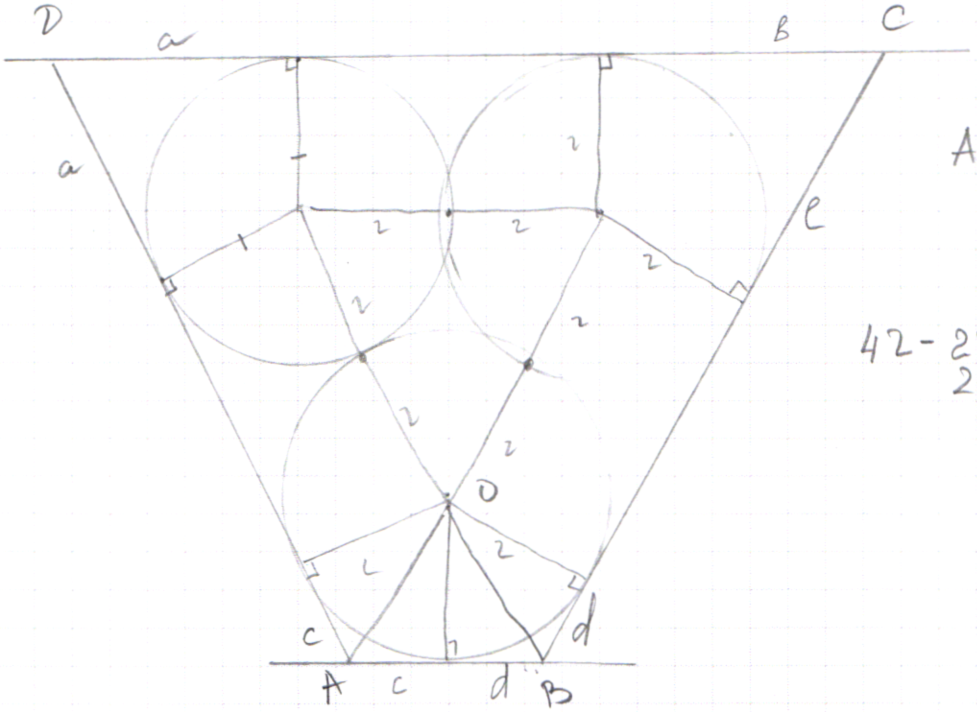
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)





$AD+BC-AB-CD=12$

$42-2r=12$
$2r=6$
$r=3$

Пусть n – число, показав-ее каким по счету стоит число в прог-ке.

Заметим, что $\overset{45}{\text{числа}}$ в одной пр-ке дают ~~45~~ разные ост-ки при делении на 45, при чем значение остатка равно n (искл.: $n=45 \Rightarrow$ остаток $=45$, т.е. 0)

Тогд.

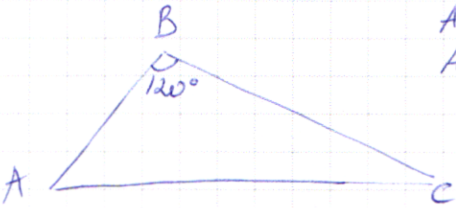
Т.к. неб. min знач. суммы из посл-его пр. возьмем.

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

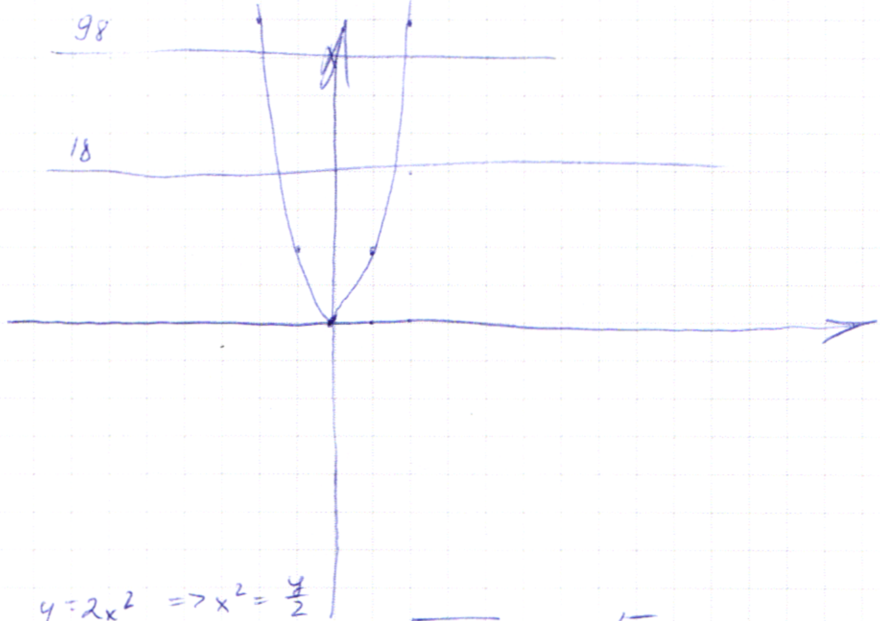
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y=2x^2$
$y=98$
$y=18$
$y=a$



$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos 120^\circ$
$AC^2=AB^2+BC^2-AB\cdot BC$
$=(AB-BC)^2+AB\cdot BC$



$21\cdot21=441$; $23\cdot23=529$; $22\cdot22=484$; $27\cdot27=729$

$y=2x^2 \Rightarrow x^2=\frac{y}{2}$
$y=98 \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{98}{2}}=\pm\sqrt{49}=\pm7 \Leftrightarrow a=14$
$y=18 \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{18}{2}}=\pm3 \Rightarrow a=9$

① $AB=14$
$BC=9$

$AC^2=\cancel{14^2+9^2}-(14-9)^2+14\cdot9=25+90+36=$
$=90+61=151$

$AC=\sqrt{151}$
$\Downarrow$
$x=\pm\frac{\sqrt{151}}{2}$
$\Downarrow$
$y=2\cdot\frac{151}{4}=75\frac{1}{2}$

② $AB=\cancel{14}\ 9$
$\cancel{BC=14}$ $AC=14$

$14^2=9^2+BC^2-9\cdot BC$
$196-81=BC^2-9BC$
$BC^2-9BC-115=0$

$D=81+4\cdot115=400+60+81=541=$
$=\cancel{5\cdot7}$

$BC=\frac{9\pm\sqrt{541}}{2}$

$26\cdot26=676$; $36\cdot36$

$\log_a b\geq1$ $\quad\log_2 b\geq1$ $\quad\log_{\frac12} b\geq1$
$\cancel{a>b}$ $\quad b\geq2$ $\quad b\leq\frac12$

$\begin{cases}a>1\\ b\geq a\end{cases}+\begin{cases}a<1\\ b\leq a\end{cases}$

$181+184+\cancel{142}+145+\cancel{105}+106+64+67+125+28=$
$=170+170+170+170+370=$
$=4\cdot370+370=$
$=770+280=$
$=900+150=1050$
$5\cdot170+200$
$850+200$

$$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$$

$$\begin{array}{r} \times \; 16 \\ 16 \\ \hline 96 \\ 16 \\ \hline 256 \end{array}$$

$\log_a b \geq 1$

$\log_2 b \geq 1$ $\quad$ $\log_{\frac{1}{2}} b \geq 1$

$b \geq 2$ $\quad$ $b \leq \frac{1}{2}$

ОДЗ:

$$\begin{cases} \sqrt{x+7}-x>0 \Rightarrow \sqrt{x+7}>x \\ \sqrt{x+7}-x\neq 1 \Rightarrow \sqrt{x+7}\neq x+1 \\ x+4>0 \Rightarrow x>-4 \end{cases} \Rightarrow x\in(-4;-3)\cup(-3;2)\cup\left(2;\frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$$

① $\sqrt{x+7}>x$

$$\left[\begin{array}{l} \cancel{x>-7} \\ \begin{cases} x>0 \\ x+7>x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x<0 \\ x+7>0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0 \\ x^2-x-7<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x<0 \\ x>-7 \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x\in\left(0;\frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) \\ x\in(-7;0) \end{array}\right.$$

$D=1+28=29$

$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{29}}{2}$

② $\sqrt{x+7}\neq x+1$

$x+7\neq x^2+2x+1$

$x^2+x-6\neq 0$

$D=1+24$

$x_{1,2}=\frac{-1\pm5}{2}=\left[\begin{array}{l}2\\-3\end{array}\right.$

$x\neq\left[\begin{array}{l}2\\-3\end{array}\right.$

$$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4)\geq\log_{\sqrt{x+7}-x}\left(\sqrt{x+7}-x\right)$$

I. $\sqrt{x+7}-x>1$

$x+4\geq\sqrt{x+7}-x$

$2x+4\geq\sqrt{x+7}$

$$\begin{cases} 2x+4\geq 0 \\ (2x+4)^2\geq x+7 \end{cases} \quad \begin{cases} x\geq-2 \\ 4(x^2+4x+4)\geq x+7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq-2 \\ 3x^2+15x+9\geq 0 \end{cases}$$

$D=225-90-18=135-18=117$

$D=16^2-3\cdot36=256-90-18=$

$=156-8=150-2=148=2\cdot74=4\cdot37$

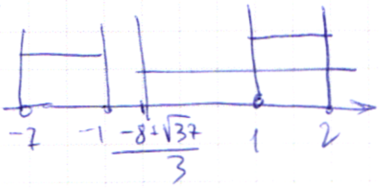
$x_{1,2}=\frac{-16\pm2\sqrt{37}}{6}=\frac{-8\pm\sqrt{37}}{3}$

$$\begin{cases} x\geq-2 \\ x\in\left(-\infty;\frac{-8-\sqrt{37}}{3}\right]\cup\left(\frac{-8+\sqrt{37}}{3};+\infty\right) \end{cases}$$

$\frac{-8-\sqrt{37}}{3}=-2\frac{2}{3}-3$ $\qquad$ $\frac{-8+\sqrt{37}}{3}=-2\frac{2}{3}+2,\!$

$a > -\frac{2}{3}$

$\Rightarrow x\in\left(\frac{-8+\sqrt{37}}{3};+\infty\right)$



II $\sqrt{x+7}\nless x+1$

$x\in(-\infty;-7)\cup(-1;1)\cup(2;+\infty)$

$x+4\leq\sqrt{x+7}-x$

$2x+4\leq\sqrt{x+7}$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x+4\geq0 \\ 4(x+2)^2\leq x+7 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x+4\leq0 \\ x+7\geq0 \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geq-2 \\ 4x^2+16x+16\leq x+7 \end{cases} \\ \begin{cases} x\leq-2 \\ x\geq-7 \end{cases} \end{array}\right.$$

$x\geq-2$

$3x^2+15x+9\leq0$

$x_{1,2}=\frac{-1\pm5}{2}=\left[\begin{array}{l}-3\\2\end{array}\right.$

$\sqrt{x+7}>x+1$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+1\geq0 \\ x+7>x^2+2x+1 \end{cases} \\ \begin{cases} x+1\leq0 \\ x+7>0 \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geq-1 \\ x^2+x-6<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x<-1 \\ x>-7 \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geq1 \\ x\in(-3;2) \end{cases} \\ x\in(-7;-1) \end{array}\right. \Rightarrow x\in(-7;-1)\cup(1;2)$$

☑ черновик $\quad$ ☐ чистовик $\qquad$ Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) $\qquad$ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

7-006

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left[\begin{cases}\sqrt{x+7}-x>1\\ x+4\geq\sqrt{x+7}-x\end{cases}\right.\qquad \begin{cases}\sqrt{x+7}-x<1\\ x+4\leq\sqrt{x+7}-x\end{cases}$$

5зад.

① $\sqrt{x+7}>x+1$

$$\left[\begin{cases}x+1\geq 0\\ x+7>x^2+2x+1\end{cases}\right.\ \begin{cases}x+1<0\\ x+7\geq 0\end{cases}\quad \left[\begin{cases}x\geq -1\\ x^2+x-6<0\end{cases}\right.\ \begin{cases}x<-1\\ x\geq -7\end{cases}\quad \left[\begin{cases}x\geq -1\\ x\in(-3;2)\end{cases}\right.\ x\in[-7;-1)\ \Rightarrow x\in[-1;2)$$

$$\Downarrow$$

$$x\in[-7;2)$$

$D=1+24$

$x_{1,2}=\frac{-1\pm 5}{2}=\left[\begin{matrix}2\\-3\end{matrix}\right.$

② $\sqrt{x+7}<x+1$

$$\begin{cases}x+1\geq 0\\ x+7<x^2+2x+1\end{cases}\begin{cases}x\geq -1\\ x^2+x-6>0\end{cases}\begin{cases}x\geq -1\\ x\in\cancel{(-3;2)}(-\infty;-3)\cup(2;+\infty)\end{cases}\Rightarrow x\in(2;+\infty)$$

③ $\sqrt{x+7}\leq 2(x+2)$

$$\begin{cases}2(x+2)\geq 0\\ x+7\leq 4(x^2+4x+4\end{cases}\begin{cases}x\geq -2\\ 4x^2+15x+9\geq 0\end{cases}$$

$D=225-16\cdot 9=225-\cancel{80}-\cancel{56}\ \cancel{135-36-99-11\cdot 9}$

$\cancel{x_{1,2}=\frac{-15\pm 3\sqrt{11}}{8}}\quad =135-54=46+35=81$

$x_{1,2}=\frac{-15\pm 9}{8}=\left[\begin{matrix}\frac{-6}{8}=-\frac{3}{4}\\ -\frac{24}{8}=-3\end{matrix}\right.$

$$\begin{cases}x\geq -2\\ x\in(-\infty;-3)\cup(-\frac{3}{4};+\infty)\end{cases}\Rightarrow$$

$\Rightarrow x\in(-\frac{3}{4};+\infty)$

④ $2(x+2)\leq\sqrt{x+7}$

$$\left[\begin{cases}x+2\geq 0\\ 4(x^2+4x+4)\leq x+7\end{cases}\right.\ \begin{cases}x+2<0\\ x+7\geq 0\end{cases}\quad \left[\begin{cases}x\geq -2\\ 4x^2+15x+9\leq 0\end{cases}\right.\ \begin{cases}x<-2\\ x\geq -7\end{cases}\quad \left[\begin{cases}x\geq -2\\ x\in[-3;-\frac{3}{4}]\end{cases}\right.\ x\in[-7;-2)\quad \left[\begin{matrix}x\in[-2;-\frac{3}{4}]\\ x\in[-7;-2)\end{matrix}\right.$$

$\Rightarrow x\in[-7;-\frac{3}{4}]$

① + ③ $x\in(-\frac{3}{4};2)$

② + ④ $\cancel{x\in[}\ \varnothing$

$\sin\alpha$

$\cos\alpha+\cos\beta=-\frac{1}{2}(\ldots\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\ldots\frac{\alpha+\beta}{2}\ldots\frac{\alpha-\beta}{2}=-2(\cos\alpha+\cos\beta)$

$\cos\alpha\ \ldots\beta=-2(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$

$\sin 3x$

$\sin(4x+3x)=\sin 4x\cos 3x+\sin 3x\cos 4x$

$\cancel{\frac{\sin 4x\cos 6x}{2}+\sin^2 3x\cos}$

$-2(\cos 10x+\cos 4x)+1+\cos 10x+4\cdot\sin x$

$=5\cdot\sin^2 x-\cos 10x-2\cos 4x$

$\cos^2\alpha$

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha-1+\cos\ldots$

$2\cos^2\alpha-1$

$\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha$

$\cos^2 5x=1+\cos 10x$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

„0" ; „7" ; „8"

Зад. №3

$\underline{2,2,2} = 2^3 - 2 = 8 - 2 = 6$

17 знач.

007 700
070 707
077 770

① 10зн. чис. из „0" и „7"

$\underline{2, 2 \ldots 2} = 2^{10}$

$\underline{\quad} = 2^4 - 2 = 16 - 2 = 14$

$2^{10} - 2 = 2(2^9 - 1)$

0007 7000
0070 7007
0077 7070
0700 7077
0707 7770
0770 7707
0777 7700

② | _ | _ | _ | _ | _ | _ | _ | _ | _ |

$11 \cdot 2(2^9 - 1) = \qquad 2(2^9-1)$

$= 22 \cdot 512 = 11 \cdot 1024 = 10240 + 1024 = \underline{= 11264}$

$2^9 = 2^4 \cdot 2^4 \cdot 2 = 16 \cdot 16 \cdot 2 = 256 \cdot 2 = 512$

(n-

$C_2^{10} = \frac{10!}{8!} = 9 \cdot 10 = 90$

$C_n^k = \frac{n!}{\quad}$

$2^{10} \cdot (2^5)^2 =$

Зад. №7

$C_2^4 = \frac{4!}{2!} = 4 \cdot 3 \quad C_2^3 = \frac{3!}{1!} = 6 \quad 2^5 = 4 \cdot 4 \cdot 2 = 32 \quad 32^2$

~~Разность никаких 2 выбр. чисел не дел-ся на 45~~ $4^5 = 16 \cdot 16 \cdot 4 =$

32^2

$\times \frac{16}{32}$; 32; 48; 512

Пусть числа пром-ка $[1; 45]$ – это $a_1; a_2; a_3; \ldots a_{45}$.

$[46; 90]$ – это $b_1; b_2; b_3; \ldots; b_{45}$

$[91; 135]$ – это $c_1; c_2; c_3; \ldots; c_{45}$

Пусть a_n^k – это число из промежутка, где k – номер пром-ка ($k \in [1; 5]$), а n – номер числа в пр-ке ($n \in [1; 45]$), т.е.

$45 = a_{45}^1$; 89 $= a_{44}^2$; $136 = a_1^4$

$\times \frac{32}{16}$; 192; 32; 512

~~Разность~~ Пусть Q – мн-во чисел, которые выбрал Пиноккио

$\frac{2^9}{2\sqrt[4]{3}}$; $\frac{2^9\sqrt[4]{3}}{2\sqrt[4]{3^2}}$

Разность никаких 2 выбр. чисел не дел-ся на 45 <=> ~~не с~~ в мн-ве Q не сущ-ет 2 чисел с одинаковым номером в пр-ке (n)

Т.к. необ-мо найти наименьшее значение суммы, из посл-его пром-ка ~~возьмем 6 с~~ возьмем 6 самых маленьких чисел; тогда из 4 пром-ка возьмем 6 самых мал-ких чисел таких, что $n > 6$, т.е. $n \in [7; 12]$; из 3 пр-ка – ~~6 самых малых чисел~~ числа с $n \in [13; 18]$; из 2 пр-ка – $[19; 24]$; из 1 пр-ка – $n \in [25; 30]$.

~~(136 + 137 + 138 + 139 + 140 + 141)~~ + ~~(97 + 98 + ... + 102)~~ + ~~(58 + 59 + ... + 63)~~ + (

$\underbrace{(181 + 182 + \ldots + 186)}$ + (142 + 141 + ... + 147) + (103 + 104 + ... + 108) + (64 + 65 + ... + 69) +

+ (25 + 26 + ... + 30) =

$11 \cdot (32^2 - 2) = 11 \cdot 2(32 \cdot 16 - 1) = 22 \cdot$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)