МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1 ШИФР 13-010

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

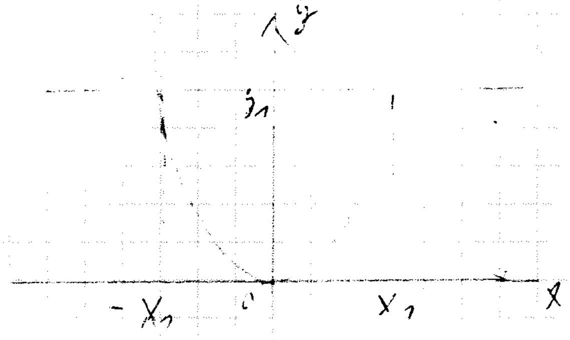
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

13-010

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№ 1.

$y = a \parallel ox$

$\begin{cases} y = 2x^2 \\ y = a \end{cases}$ $\quad 2x^2 = a \quad x = \pm\sqrt{\frac{a}{2}}$

длина стороны Δ $\quad l = 2|x_1|$

$\begin{cases} y = 98 \\ y = 2x^2 \end{cases}$ $\quad x = \pm 7 \quad l_1 = 14 \qquad \begin{cases} y = 18 \\ y = 2x^2 \end{cases}$ $\quad x = \pm 3 \quad l_2 = 6$

l_1, l_2, l_3 — длин сторон Δ $\qquad l_3 = 2\sqrt{\frac{a}{2}}$

1) $l_3 < l_1 \Rightarrow \angle(l_2, l_3) = 120°$, т.к. l_1 - большая сторона

По т. косинусов $\quad 14^2 = 6^2 + \left(2\sqrt{\frac{a}{2}}\right)^2 - 2\cdot 6\cdot 2\sqrt{\frac{a}{2}}\cdot \cos 120°$

$196 = 36 + 2a + 12\sqrt{\frac{a}{2}} \qquad t = 2\sqrt{\frac{a}{2}} = \sqrt{2a} \qquad t^2 + 6t - 160 = 0$

$\left[\begin{array}{l} t = 10 \\ t = -16 \end{array}\right. \qquad \sqrt{2a} = 10 \qquad a = 50$

2) $l_3 > l_1 \Rightarrow \angle(l_1, l_2) = 120°$, т.к. напротив большего угла лежит большая сторона

$\left(2\sqrt{\frac{a}{2}}\right)^2 = 14^2 + 6^2 - 2\cdot 6\cdot 14\cdot \cos 120°$

$2a = 196 + 36 + 84 \qquad 2a = 316 \qquad a = 158$

3) если $l_3 = l_1$, то Δ равнобедренный с углами $120°, 30°, 30°$

l_2 лежит напротив большего угла, а этого быть не может

4) если $l_3 = l_2$, то $l_3 + l_2 < l_1$, что противоречит равенству сторон в Δ

Ответ: при $a = 50$, $a = 158$

№ 2

$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

$g(x) = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x) - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

$g(x) = \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}\, 2\cos^2 5x + \frac{1}{2} - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

$g(x) = \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1}{2} + 4$

$g(x) = \frac{\cos 4x + \cos 2x - 1 + 1 + 8}{2}$; $g(x) = \frac{2\cos^2 2x - 1 + \cos 2x + 8}{2}$

$g(x) = \frac{2\cos^2 2x + \cos 2x + 7}{2}$ $\quad \cos 2x = t$

$g(x) = \frac{2t^2 + t + 7}{2}$ $\quad -1 \leq t \leq 1$

$g'(x) = 2t + \frac{1}{2}$ $\quad 2t + \frac{1}{2} = 0 \quad t = -\frac{1}{4}$ $\quad g(x)$: $-$, $+$; $-\frac{1}{4}$; t; $g'(x)$ ↘ ↗ сх.

⇒ $g(x)$ наим при $\cancel{x}\, t = -\frac{1}{4}$

$g(-\frac{1}{4}) = \frac{2(-\frac{1}{4})^2 - \frac{1}{4} + 7}{2} = \frac{\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + 7}{2} = \frac{55}{16}$

$g(x)$ наиб. при $\cancel{x}\, t = 1$. $\quad g(x) = \frac{2\cdot 1 + 1 + 7}{2} = 5$

g(

Ответ: наименьшее $\frac{55}{16}$; наибольшее 5

№ 3

1) $\overline{8888888\, a_1 a_2 \ldots a_{10}}$ $\quad \left[\begin{array}{l} a_i = 7 \\ a_i = 0 \end{array}\right.$ $\quad (2^{10} - 2)$ варианты

2) $\overline{88888888\, a_1 a_2 \ldots a_9}$ $\quad \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a_i = 7 \\ a_i = 0 \end{array}\right. \\ 8 = 7 \end{array}\right.$ $\quad (2^9 - 1)$

3) $\overline{7 a_1 8888888\, a_1 a_2 \ldots a_9}$ $\quad (2^9 - 1)$

⋮

4) $\overline{7 a_1 a_2 8888888\, a_3 \ldots a_9}$ $\quad (2^9 - 1)$

⋮

всего $2^{10} - 2 + 9\cdot(2^9 - 1) = 2^{10} + 9\cdot 2^9 - 2 - 9 = 2^9(2+9) - 11$

$11\cdot(2^9 - 1) = 11 \cdot 511 = 5621$ $\quad$ Ответ. 5621

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

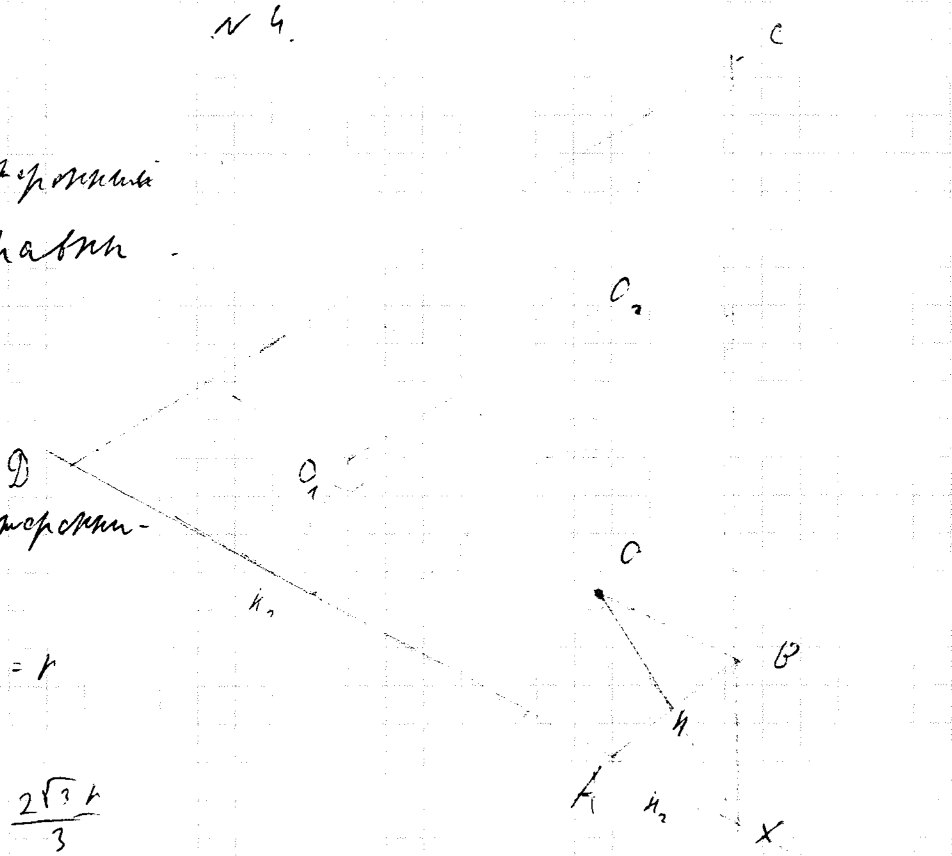
13-010

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4.



$BC \cap AD = X$

$\triangle OO_1O_2$ — равносторонний

т. к. радиусы равны.

$\angle O_2OO_1 = 60^\circ$

$\angle AOB = \angle O_1OO_2 = 60^\circ$

тогда $\triangle OAB$ — равносторонний по углам.

$OH \perp AB$: $OH = r$

$\triangle ABX = \triangle ABO$

$OA = OB = \frac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}r}{3}$

$DX \parallel O_1O$, т. к. $\angle H_1O_1O$ 90° $BH_2 \perp AX \Rightarrow H_2X = \frac{1}{2}\frac{2r}{\sqrt{3}}$

$DX = \frac{3\cdot 2r}{\sqrt{3}} + r + r + \frac{3\cdot 2r}{\sqrt{3}} = (4\sqrt{3}+2)r$

$\triangle DCX$ — равносторонний по 3 сторонам.

$AD + BC - AB - CD = 12$

$\left(4\sqrt{3}r + 2r - \frac{2r\cdot\sqrt{3}}{3}\right)\cdot 2 - \left(4\sqrt{3}r + 2r\right)\cdot 2 \; \frac{2\sqrt{3}r}{3}) = 12$

$4\sqrt{3}r + 2r - 2r\sqrt{3} = 12$ $2\sqrt{3}r + 2r = 12$ $r(2\sqrt{3}+2) = 12$

$r = \frac{6}{\sqrt{3}+1} = \frac{6\sqrt{3}-1}{2}$

$AO\cdot BO = 58$ $\left(\frac{2\sqrt{3}r}{3}\right)^2 = \frac{4r^2}{3}$ AB $\sqrt{58}$

Ответ: $\frac{6\sqrt{3}-1}{2}$; 60°; $\sqrt{58}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$

$\begin{cases} \sqrt{x+7} - x > 0 \\ \sqrt{x+7} - x \neq 1 \\ x > -4 \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt{x+7} > x \\ \sqrt{x+7} \neq x+1 \\ x > -4 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} -4 < x < 0 \quad x > -7 \\ x+7 > x^2 \quad x \geq 0 \end{array}\right.$

$x^2 - x - 7 < 0 \quad 0 \leq x < \frac{1+\sqrt{29}}{2}$

$x + 7 \neq x^2 + 2x + 1 \quad x \geq -1$
$x^2 + x - 6 \neq 0 \quad x \neq 2$

$\Rightarrow x \in (-4; 2) \cup (2; \frac{1+\sqrt{29}}{2})$

$\frac{x+4-\sqrt{x+7}+x}{\sqrt{x+7}-x-1} \geq 0$ $\quad$ $f(x) = \frac{x+4-\sqrt{x+7}+x}{\sqrt{x+7}-x-1}$

$f(x) = 0 \quad 2x+4 = \sqrt{x+7}$ $\quad$ $\begin{cases} 4x^2 + 16x + 16 = x+7 \\ x \geq -2 \end{cases}$

$\begin{cases} 4x^2 + 15x + 9 = 0 \\ x \geq -2 \end{cases}$ $\quad$ $\cancel{x = -\frac{7}{8}}$ $\quad$ $x = \frac{-15 \pm 9}{8}$

$D = 225 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 225 - 144 = 81$ $\quad$ $x = -\frac{3}{4}$

$- \quad + \quad -$

$-4 \quad -\frac{3}{4} \quad 2 \quad \frac{1+\sqrt{29}}{2} \quad x$

$x = 1 \quad f(x) > 0$

$x = -1 \quad f(x) < 0$

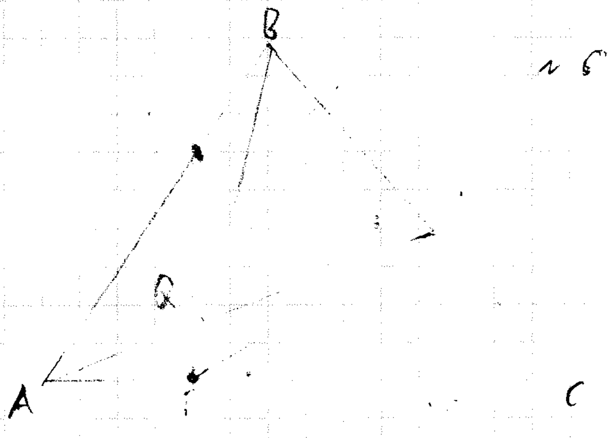
$x = 3 \quad f(x) < 0$

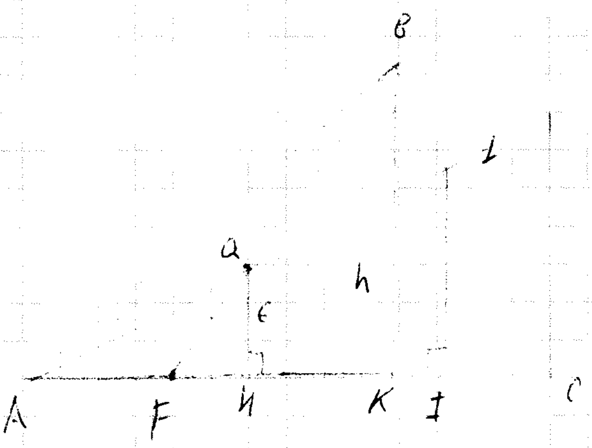
Ответ: $x \in [-\frac{3}{4}; 2) \cup \cancel{(2; \frac{1+\sqrt{29}}{2})}$

л 6

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6





$AF = 2x \quad FC = 5x \quad AC = 7x$

$S_{BQL} : S_{BAC} = 5 : 12 \qquad S_{BAC} = \frac{1}{2} AC \cdot BK,$

$S_{BKF} = \frac{1}{2} BK \cdot FK \qquad S_{QHF} = \frac{1}{2} QH \cdot FH$

$S_{BFC} = \frac{1}{2} BK \cdot FC = \frac{1}{2} \cdot BK \cdot 5x \qquad S_{BAC} = \frac{1}{2} BK \cdot AC = \frac{1}{2} BK \cdot 7x$

$S_{BAF} = S_{BAC} - S_{BFC} = \frac{1}{2} BK \cdot 7x. \qquad S_{FQLC} = S_{FBC} - S_{QBL} = \frac{5}{7} S_{BAC} - \frac{5}{12} S_{BAC}$

$S_{FQLC} = \frac{25}{84} \cdot \frac{1}{2} \cdot h \cdot 7x = \frac{25 \cdot h \cdot x}{12}$

$S_{FQLC} = S_{FQH} + S_{HQLI} + S_{LIC} = \frac{1}{2} QH \cdot FH + \frac{QH + LI}{2} HI + \frac{1}{2} LI \cdot IC$

$IC = FC - FI = 5x - 2xy = x(5-2y)$

$LI = y \cdot QH, \quad AFI = y \cdot AH \quad LI = 6y \quad FI = 2x \cdot y \quad FH =$

$\frac{25 \cdot h \cdot x}{12} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot FH + \frac{6 + 6y}{2} \cdot (2xy - FH) + \frac{1}{2} \cdot 6y \cdot x(5-2y)$

$\frac{25 hx}{12} = 3FH + (3 + 3y)(2xy - FH)$

$\frac{25 h x}{12} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot$

№ 1

[1, 45], [46, 90], [91, 135], [136, 180] [181, 225]

1; 45 46 - 1; 47 - 2 ...

90 - 45, 91 - 46 ...

135 - 90, 136 - 91 ...

180 - 135, 181 - 136 ... 225 - 180

225 - 180 1

91 - 1, 92 - 2

135 - 45, 136 - 46 ...

180 - 90, 181 - 91

225 - 135

136 - 1, 137 - 2

180 - 45, 181 - 46

225 - 90

181 - 1, 182 - 2 ...

225 - 45

всего разностей $\frac{30^{2}}{30!}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

13-010
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2x^2 = 98$ $x^2 = 49$ $x = 7$, $x = -7$ $a = 14$

$2x^2 = 18$ $x^2 = 9$ $x = 3$, -3 $\cancel{b} = 6$

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

$\frac{14}{\sin\alpha} = \frac{6}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin 120°}$ $\frac{14}{\sin\alpha} = \frac{6}{\sin\beta} = \frac{2c}{\sqrt{3}}$

$\alpha + \beta = 60°$

$c > a$ $\sin\gamma =$ $\gamma = 120°$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma$ $c = \sqrt{196 + 36 - 2\cdot 6\cdot 14\cdot\frac{1}{2}}$

$c = \sqrt{232 - 84} = \sqrt{148}$ $c^2 = 196 + 36 - 6\cdot 14 = 232 - 84 = 148$

$2x^2 = a$ $x = \sqrt{\frac{a}{2}}$ $c = 2\sqrt{\frac{a}{2}} = 2\sqrt{37}$ $a = 74$ $c = 2\sqrt{37}$

$\frac{a}{2} = 79$ $a = 158$

6, 14, $158 = \sqrt{11}$ $a = 158$

$c < a$ a - большая сторона $a^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cdot\cos 120°$

$a^2 = 196 = c^2 + 36 - 2\cdot 6\cdot c\cdot(-\frac{1}{2})$

$196 = c^2 + 36 + 6c$ $c^2 + 6c - 160 = 0$

$\sqrt{D} = 36$ $\left[\begin{array}{l} c = 10 \\ c = -16 \end{array}\right.$ $c = 10$ $c = 2\sqrt{\frac{a}{2}}$ $a = 50$

50 и 158

№ 2

$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

$\frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x) - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 =$

$\frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2} \cdot 2\cos^2 5x + \frac{1}{2} - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 =$

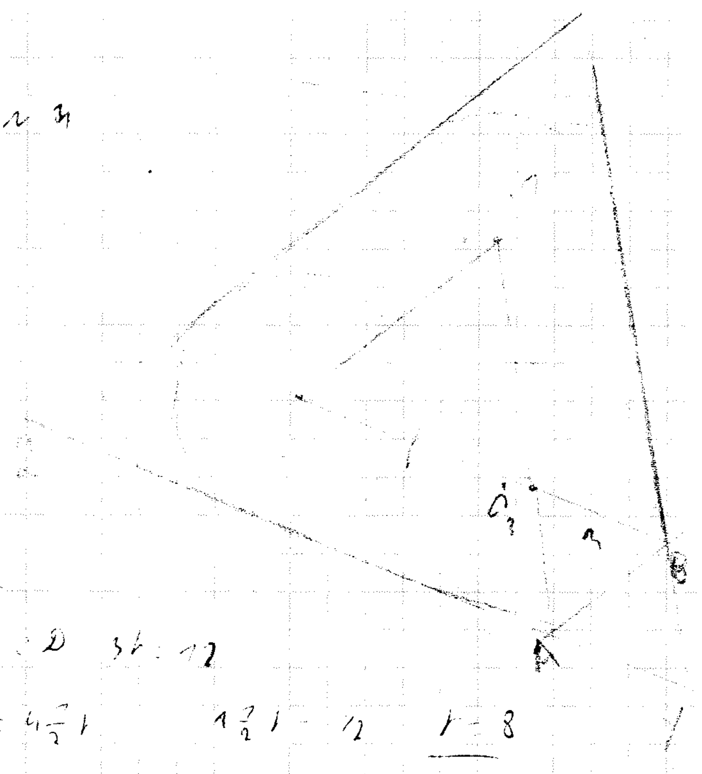
$= \frac{1}{2}\cos 4x + \frac{1}{2} - \sin^2 x + 4 = \frac{1}{2}\cos 4x + \frac{9}{2} - \sin^2 x = \frac{1}{2} - \sin^2 2x -$ $\cos^2 2x - \frac{1}{2}$

$= \cos^2 2x - \frac{1}{2} + \frac{9}{2} + \frac{\cos 2x - 1}{2} = \frac{2\cos^2 2x + 8 + \cos 2x - 1}{2}$ $= \frac{1 - \cos}{2}$

$= \frac{2\cos^2 2x + \cos 2x + 7}{2}$ $\quad = t^2 + t + 7 \quad t \in [-1; 1]$

$t = \quad g'(x) = 4t + 1$

$888888888 \ldots a_1 a_2 \ldots a_9$ $\quad 8888888 \, a_1 \ldots a_{10} \quad 2^{10} \times a_{10}$



№ 4

$AD + BC = AB + CD = 12$

$\angle A = \angle B = x$

$DC - CB = x = AD + x$

$CD - x + CD - x - x - CD = 12$

$CD - 3x = 12 \quad \frac{CD}{3} = x + 12$

$DC = 6x = 9x \quad \frac{CD}{x} = 3x$

$CD - x + CD - x - x - CD = 12 \quad D \; 3x = 12$

$DC = x + x + x + x + \frac{1}{2}x = 4\frac{1}{2}x \quad 1\frac{1}{2}x = 12 \quad \underline{x = 8}$

$\angle AOB = 60^\circ \Rightarrow AOB$ - равносторонний

2). $AO \cdot BO = 58 \quad AB^2 = 58 \quad A = \sqrt{58}$

№ 5 $\quad D = 1 + 28 = 29$

$\log_{\sqrt{x+7} - x}(x+4) \geq 1 \quad \log_{\sqrt{x+7} - x}(x+4) - \log_{\sqrt{x+7} - x}\sqrt{x+7} - x \geq 0$

$\frac{x + 4 - \sqrt{x+7} + x}{\sqrt{x+7} - x} \geq 0 \quad \log_a b = \log_a \quad \log(a-1)(b-1) \geq 0 \quad \frac{1 - \sqrt{29}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{29}}{2}$

$\frac{2x + 4 - \sqrt{x+7}}{\sqrt{x+7} - x} \geq 0 \quad 2x + 4 - \sqrt{x+7} = 0 \quad 2x + 4 = \sqrt{x+7}$

$4x^2 + 16x + 16 = x + 7$

$x = \frac{-15 \pm 9}{8} \quad D = 225 - 144 = 81 \quad x = -\frac{25}{8} < -2 \quad \underline{x = -\frac{3}{4}}$ $\quad \begin{cases} 4x^2 + 15x + 9 = 0 \\ x \geq -2 \end{cases}$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)