МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2 ШИФР 15-034

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.

3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.

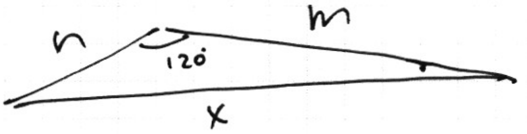
7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① Найдём длины отрезков, которые высекает парабола на прямых.
Координаты пересечения $y=x^2$ с $y=169$ по оси x равны $\left[\begin{array}{l} x_1=\sqrt{169} \\ x_2=-\sqrt{169} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x_1=13 \\ x_2=-13 \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Длина отрезка (m) равна ~~x~~
$x_1-x_2=26$ (т.к. координаты по y прямой $y=169$ постоянно.
Аналогично найдём длину отрезка (n), который высекает парабола $y=x^2$ на $y=64$:
$n=\sqrt{64}-(-\sqrt{64})=16$.
Теперь рассмотрим возможные ~~конфигурации~~ треугольника.
угол 120° может быть между m и n, m и x и n и x, где x – неизвестная сторона $\Rightarrow$ всего 3 возможных треуг.
Но на самом деле угол 120° не может быть между m и x, т.к. получится, что n – наибольшая сторона в треуг, т.к. лежит против наибольшего угла, но $n<m \Rightarrow$ всего 2 возможных треугольника.

1.



по т. косинусов

$$x = \sqrt{n^2 + m^2 - 2mn\cos 120^\circ} =$$

$$= \sqrt{256 + 676 + 416} = \sqrt{1348} =$$

$$= 2\sqrt{674}$$

2.

по т. косинусов:

$$n^2 + x^2 - 2nx\cos 120^\circ = m^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 256 + x^2 + 16x = 676 \Leftrightarrow x^2 + 16x - 420 = 0$$

Решим уравнение $x^2 + 16x - 420 = 0$

$$\Updownarrow \quad D_1 = 64 + 420 = 484$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -8 + 22 \\ x = -8 - 22 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 14 \\ x = -30 \end{array}\right.$$

$x = -30$ не подходит по смыслу (т.к. сторона в треуг. имеет длину больше нуля) $\Rightarrow$

$\Rightarrow x = 14$

3. Пусть $y = x^2$ пересекает прямую $y = a$ в точках с координатами $x_3; x_4$ по оси x.

Тогда $\left[\begin{array}{l} x_3 - x_4 = 2\sqrt{674} \\ x_3 - x_4 = 14 \end{array}\right. \Rightarrow$ т.к. $|x_3| = |x_4|$ в силу симметрии $y = x^2$ отн. оси y $\rightarrow$ $\left[\begin{array}{l} |x_3| = |x_4| = \sqrt{674} \\ |x_3| = |x_4| = 7 \end{array}\right. \Rightarrow$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1 продолжение.

=> Координату пересечения по оси y $(y_1; y_2)$ будут $\left[\begin{array}{l} y_1 = (\sqrt{674})^2 \\ y_2 = 7^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_1 = 674 \\ y_2 = 49 \end{array}\right.$.

Таким образом параметр a равен либо 674, либо 49.

Ответ: $a \in \{49\} \cup \{674\}$

---

③ Скажем, что пятёрки „идут блоком" Найдём кол-во способов поставить этот блок в наши 18 позиций для цифр. Поставим блок первой цифрой в самый старший разряд и будем его „сдвигать" пока не „упрёмся" последней цифрой блока в младший разряд. Очевидно, что это все возможные позиции для блока и их $18-(6-1) = 13$.

Рассмотрим теперь ситуации, когда блок.

стоит своей первой цифрой НЕ в старшем разряде числа (таких ситуаций 13-1 =12). Тогда в старшем разряде стоит 9, т.к. с нуля число начинаться не может, и у нас осталось 11 свободных позиций. В каждую из них мы можем поставить либо 0, либо 9 (т.к. пятёрки все израсходованы) => на каждую позицию 2 варианта => => всего можно расставить $^{\text{их}}$ в оставшиеся позиции 2^{11} способов. Однако мы посчитаем способ, когда на всех 11 позициях будут 9 => 0 в числе не будет, что плохо => этот способ надо вычесть (он очевидно один) => => вариантов для нашего числа, когда начало блока не совпадает со старшим разрядом числа $12 \cdot (2^{11} - 1)$

Теперь рассмотрим случай, когда начало блока совпадает со старшим разрядом числа. У нас свободно 12 позиций, и мы аналогично в каждое место можем поставить цифру 2 способами => будет 2^{12} вариантов, но мы посчитаем вариант со всеми 0 (без 9) и со всеми 9 (без 0), что плохо,

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. продолжение

=> надо вычесть эти 2 способа.
Таким образом кол-во ~~ваз~~ чисел в такой позиции блока $1\cdot(2^{12}-2)=2^{12}-2$.

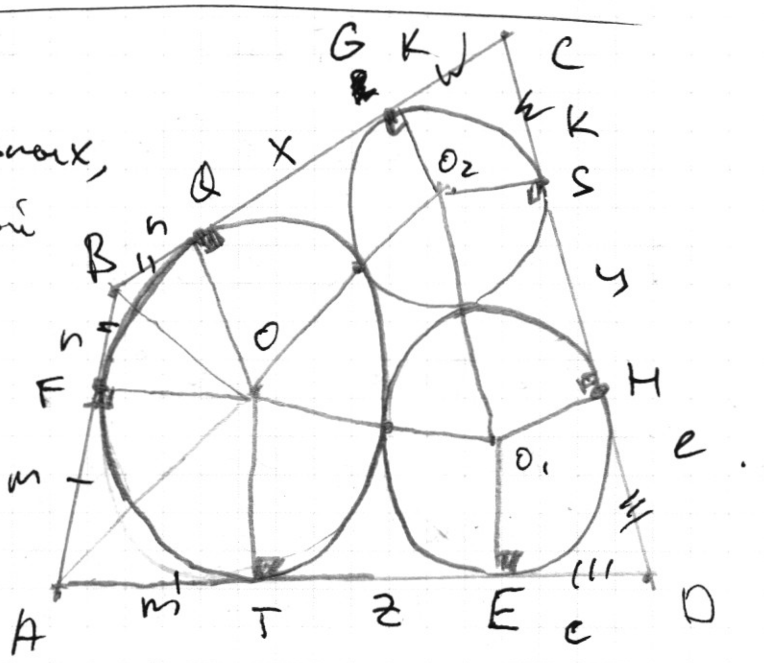
Всего наших чисел. $12\cdot(2^{11}-1)+2^{12}-2=$

$=24564+4094=28658$

Ответ: 28658 чисел.

4

1) Как отрезки касательных, проведённых из одной точки равны:



$AT=AF=m$

$BF=BQ=n$.

$CG=CS=K$

$DH=DE=l$

Пусть $QG=x$, $SH=y$, $TE=z$.

по условию: $AD+BC-AB-CD=10 \iff$

$\iff m+z+l+n+x+K-m-n-K-y-l=10 \iff$

$\iff x+z-y=10$

2) $\begin{cases} OQ \perp BC \text{ и } O_2G \perp BC \\ OQ = O_2G = R \end{cases}$ (касательные к радиусам)

$\Downarrow$

QGO_2O – параллелограмм по признаку =>

=> $QG = OO_2$ по св-ву ~~параллел~~ пар-амма =>

=> $x = 2R$

Аналогично $y = 2R$ и $z = 2R$.

Получаем из $x + z - y = 10$, что

$2R = 10 \Rightarrow R = 5$

3) $\triangle FBO = \triangle QBO$ по катету и гипотенузе =>

=> $\angle FBO = \angle QBO = \beta$.

Аналогично $\angle OFA = \angle OTA = \alpha$.

4) $\angle AOB + \angle BOQ + \angle QOO_2 + \angle O_2OO_1 + \angle O_1OT +$

$+ \angle TOA = 360°$

$\left.\begin{array}{l} \angle AOB = 180 - \alpha - \beta \\ \angle BOQ = 90 - \beta \\ \angle TOA = 90 - \alpha \end{array}\right\}$ по сумме углов треуг.

$\angle O_2OO_1 = 60°$ т.к. $OO_2 = O_2O_1 = O_1O = 2R$ =>

=> $\triangle OO_2O_1$ – равност.

$\left.\begin{array}{l} \angle QOO_2 = 180° - \angle OQG = 90° \\ \angle O_1OT = 180° - \angle OTE = 90° \end{array}\right\}$ по св-ву пар-мма,

$\rightarrow$

☐ черновик ☑ чистовик Страница №6

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4. продолжение

Таким образом:

$(180-\alpha-\beta)+(90-\beta)+90^\circ+60^\circ+90^\circ+(60-\alpha)=360^\circ$

$\Updownarrow$

$240=2\alpha+2\beta \Leftrightarrow \alpha+\beta=120^\circ$

5) $\angle AOB = 180^\circ-\alpha-\beta=60^\circ$

6) $S_\triangle AOB = BO\cdot AO\cdot \sin\angle AOB\cdot\frac{1}{2}$.
$S_\triangle AOB = OF\cdot AB\cdot\frac{1}{2}$
(т.к. $OF\perp BA \Rightarrow OF$ - высота в $\triangle OBA$)
$OF=R$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow AO\cdot BO\cdot\sin\angle AOB\cdot\frac{1}{2}=R\cdot AB\cdot\frac{1}{2}$

$\Updownarrow$

$AB=\dfrac{AO\cdot BO\cdot\sin 60^\circ}{R}=\dfrac{42\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{5}=$

$=\frac{21}{5}\sqrt{3}=4{,}2\sqrt{3}$.

Ответ: $R=5$; $\angle AOB=60^\circ$; $AB=\frac{21}{5}\sqrt{3}=4{,}2\sqrt{3}$

②

$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$

$= \frac{\cos 4x}{2} - \frac{\cos 14x}{2} - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3.$

Когда ~~на~~ достигаются максимум и минимум функции, производная равна 0.

$g'(x) = -2\sin 4x + 7\sin 14x - 14\sin 7x\cos 7x + 2\sin x\cos x =$

$= 7\sin 14x - 7\sin 14x + \sin 2x - 4\sin 2x\cos 2x =$

$= \sin 2x\,(1 - 4\cos 2x).$

Реши уравнение: $\sin 2x\,(1-4\cos 2x) = 0$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ 1 - 4\cos 2x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \pi + \pi k \\ \cos 2x = \frac{1}{4} \end{array}\right. \Big|\, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}k \\ x = \frac{\arccos\frac{1}{4}}{2} + \pi n \\ x = -\frac{\arccos\frac{1}{4}}{2} + \pi m \end{array}\right. \Big|\, k, n, m \in \mathbb{Z}$

В одной из этих точек достигается максимум, а в одной из них минимум.

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 8

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2 продолжение

Преобразуем $g(x)$ в функцию только от косинуса:

$$g(x) = \frac{\cos 4x}{2} - \frac{\cos 14x}{2} - 1 + \cos^2 7x - \cos^2 x - 3$$

Тогда при подстановке 2-ого и 3-его полученного x значение не изменится =>

=> рассмотрим $x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}k$ и $x = \frac{\arccos\frac{1}{4}}{2} + \pi n$. $n, k \in \mathbb{Z}$

Подставим первое:

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + 0 - 0\right) - 3 = -3.$$

$$g\left(\frac{\arccos\frac{1}{4}}{2}\right) = \left(\frac{\cos(2\arccos\frac{1}{4})}{2} - \frac{\cos(7\arccos\frac{1}{4})}{2}\right) - 1 +$$

$$+ \cos^2\left(3{,}5\arccos\frac{1}{4}\right) - \cos^2\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4}\right) - 3.$$

Заметим, что $\begin{cases} \arccos\frac{1}{4} > \frac{\pi}{4} \\ \arccos\frac{1}{4} < \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \cos(2\arccos\frac{1}{4}) < 0$

Кроме того, из геом. смысла $\left|\frac{\cos(2\arccos\frac{1}{4})}{2}\right| > \left|\frac{\cos(7\arccos\frac{1}{4})}{2}\right|$ =>

=> первая скобка отрицательна. Разность квадратов же не больше 1, т.к. квадрат косинуса ->

не больше 1 =>

$$=> g\left(\frac{\arccos\frac{1}{4}}{2}\right) < -3.$$

Таким образом максимум достигается

при $x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}k \mid k \in \mathbb{Z}$, а минимум

при $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\arccos\frac{1}{4}}{2} + \pi n \\ x = -\frac{\arccos\frac{1}{4}}{2} + \pi m \end{array}\right| n, m \in \mathbb{Z}$

Ответ: максимум равен -3

минимум равен: $\frac{\cos(2\arccos\frac{1}{4})}{2} - \frac{\cos(7\arccos\frac{1}{4})}{2} -$

$- 4 + \cos^2(3{,}5 \arccos\frac{1}{4}) - \cos^2(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4})$

---

⑤ $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1 \iff \log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq \log_{\sqrt{x+3}-x}(\sqrt{x+3}-x)$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x+3} - x > 0 \quad \text{всегда выполнено в силу монот. корня.} \\ \sqrt{x+3} - x < 1 \\ \sqrt{x+3} - x \geq x+5 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x+3} - x > 1 \\ x+5 \geq \sqrt{x+3} - x \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1 + x > \sqrt{x+3} \\ x > -1 \text{ (т.к. корень не отриц.)} \\ \sqrt{x+3} \geq 2x+5 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x+3} > x+1 \\ 2x+5 \geq \sqrt{x+3} \end{cases} \end{array}\right. \iff$$

→

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5. продолжение

В первой { скобке. Из 2-ого нер-ва следует, что обе части в 3-ьем неравенстве положительны. Обе части в 1-ом и в 3-ьем нер-ве положительны =>
=> их можно возвести в квадрат.

Во второй { скобке. Первое неравенство автоматически выполнено в силу неотрицательности корня при $x < -1$ ($x \geq -3$ в силу неотриц. подкоренного выражения), а при $x \geq -1$ обе части неотрицательны => их можно возвести в квадрат. Во втором нер-ве обе части неотриц => их можно возвести в квадрат.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1+2x+x^2 > x+3 \\ x \geq -1 \\ x+3 \geq 4x^2+20x+25 \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+3 > x^2+2x+1 \\ x \geq -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x < -1 \\ x \geq -3 \end{cases} \end{array}\right. \\ 4x^2+20x+25 \geq x+3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решим уравнение

$$1+2x+x^2 = x+3$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(x-1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2. \end{array}\right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow 1+2x+x^2 > x+3$ при $x \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$

$1+2x+x^2 < x+3$ при $x \in (-2; 1)$

Решим уравнение. $4x^2+20x+25=x+3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x^2+19x+22=0$

$\Updownarrow \quad D=361-352=9$

$\left[\begin{array}{l} x=\frac{-19+3}{8} \\ x=\frac{-19-3}{8} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2. \\ x=\cancel{-22}\ -2,75. \end{array}\right.$

Таким образом. $4x^2+20x+25 \geq x+3.$

при $x \in (-\infty; -2,75] \cup [-2; +\infty).$

и $4x^2+20x+25 < x+3$ при $x \in [-2;75; -2].$

Таким образом:

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty) \\ x > -1 \\ x \in [-2;75; -2] \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (-2; 1) \\ x \geq -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x < -1 \\ x \geq -3 \end{cases} \end{array}\right. \\ x \geq -2,5 \\ x \in (-\infty; -2,75] \cup [-2; +\infty) \end{cases} \end{array}\right.$

$\rightarrow$ У данной с-мы нет решений

$\rightarrow$ У данной с-мы решения:

~~$x \in [-3; -2,75] \cup [-2; 1)$~~ $x \in [-2; 1)$

Ответ: $x \in [-2; 1)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-034

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(7) Возьмём такие четвёрки:

141 ; 142 ; 143 ; 144 ; 145

111 ; 112 ; 113 ; 114 ; 115

81 ; 82 ; 83 ; 84 ; 85

51 ; 52 ; 53 ; 54 ; 55

21 ; 22 ; 23 ; 24 ; 25.

Разность никаких двух не делится на 35.

Их сумма равна 700 + 550 + 400 + 250 + + 100 + 15 · 5 = 2075.

Это так т.к мы пользуемся неким аналогом нер-ва Мюрхеда. Чтобы достичь минимальной суммы из чисел набора надо брать „самые маленькие из самых больших", „вторые по малости из „вторых по величине" и т.д до

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

самых больших из самых больших из самых маленьких. Кроме того, чтобы разность никаких двух из пары не делилась на 35, надо чтобы ~~каж~~ никакие 2 числа не были сравнимы по модулю 35. Но этого можно достичь, беря из первых 25 чисел каждой группы. (т.к. мы хотим минимальности суммы).

Ответ: min сумма 2075

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-034

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1, 35 36, 70 71, 105 106, 140

141, 175

1, 2, 3, 4, 5.

141, 142, 143, 144, 145.

~~76, 77, 78, 79, 80~~

111 112 113 114 115.

81 82 83 84 85.

51 52 53 54 55.

21 22 23 24 25.

$140 \cdot 5 = 700 + 15.$

$110 \cdot 5$

$1250 + 400 = 1650$

$+ 250 = 1900.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-034

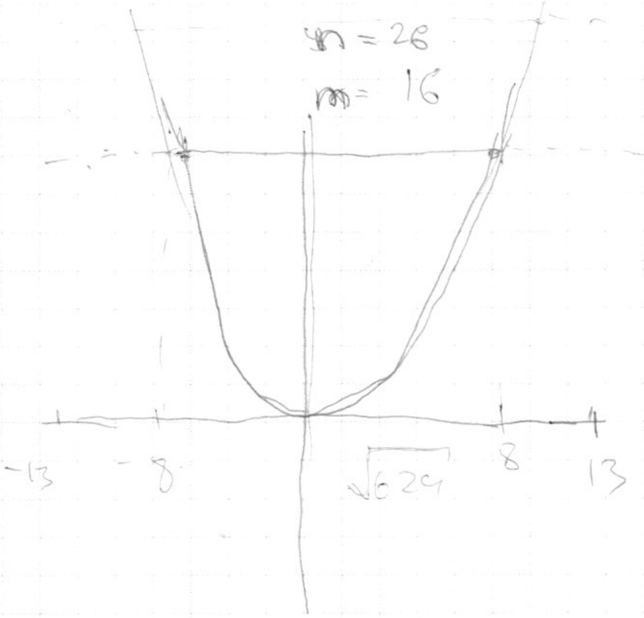
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$n = 26$

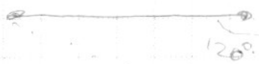
$m = 16$



$76 + 16 = 92$

$y = 64$

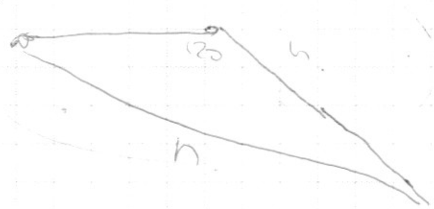
$$\begin{array}{r} 1092 \\ +\ 256 \\ \hline 1348 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 26 \\ \times\ 16 \\ \hline 156 \\ 26 \\ \hline 416 \end{array}$$

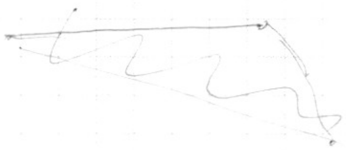


$$\begin{array}{r} 26 \\ \times\ 26 \\ \hline 156 \\ 52 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$x = \sqrt{m^2 + n^2 - 2mn\cos 120^\circ} = \sqrt{256 + 676 + 416} =$$

$$= \sqrt{1248} = 2\sqrt{624} \qquad \boxed{a = 624}$$





$$n^2 + x^2 - 2nx\cos 120^\circ = m^2$$

$$256 + x^2 + 16x = 676$$

$18 - 5 = 13$

13. 12.

2^{10} $2^{11} \cdot 1$

$C_{12}^{1} = 12$ $\cdot 12$ $2^{10} \cdot 144$

2^{11} 2^{10}

9 $\ldots 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

Окс первой

~~sinx~~ $\cdot \sin x$ $(12 \cdot 2^{11} - 1)$

$\sin 5x \cdot \sin 9x =$ cos

$1 \cdot 2^{12} - 2$ 4094

$$\begin{array}{r} 24564 \\ +\ 4094 \\ \hline 28658 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2047 \\ \times\ 12 \\ \hline 4094 \\ 2047 \\ \hline 24564 \end{array}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

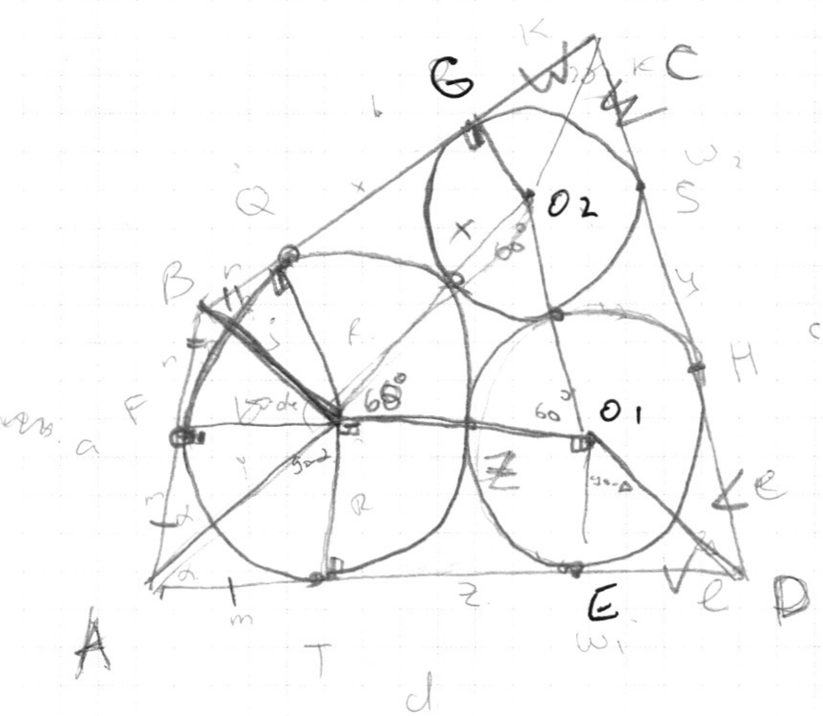
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15 - 034

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



2a

$\alpha+\beta+\gamma=180°$

$2\alpha+2\beta+2\gamma+2\Delta=360°$

$\alpha+\beta+\gamma+\Delta=180°$

$d+b-a-c=10$

$180-\alpha-\beta+90-\alpha+90-\beta$

$\cancel{360}-2\alpha-2\beta+180+60=\cancel{360}$

$240=2\alpha+2\beta$

$\cancel{m}+z-\cancel{l}+\cancel{n}+x+\cancel{K}-\cancel{m}-\cancel{n}-\cancel{K}-y-\cancel{l}=10$

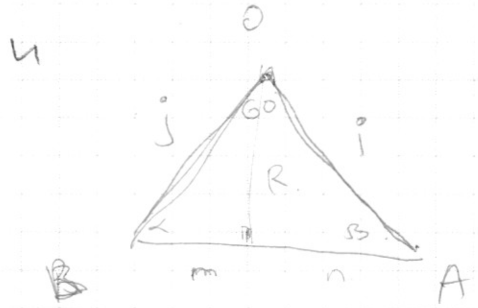
$\alpha+\beta=120$

$x+z-y=10$

$180-\alpha-\beta=\boxed{60°}$

$2R+2R-2R=10 \Rightarrow 2R=10 \Rightarrow R=5$

и



$\cancel{\frac{1}{2}}i\cdot j\sin 60° = R\cdot AB\cdot\cancel{\frac{1}{2}}$

$i\cdot j=42 \quad 42\cdot\frac{\sqrt3}{2}=5\cdot AB$

$\frac{21\sqrt3}{5}=AB$

$AB^2=i^2+j^2-2ij\cos 60°$

$=i^2+j^2-i\cdot j$

$\frac{21\sqrt3}{5}$

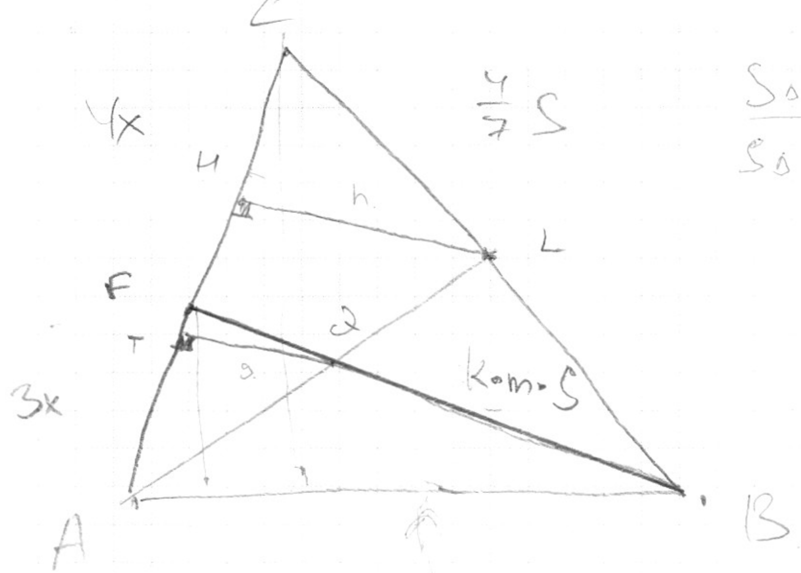
$R^2+m^2+R^2+n^2-i\cdot j=m^2+2mn$

1,7

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$\sin\alpha \sin\beta = \dfrac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$



$\dfrac{S_{\triangle BQL}}{S_{\triangle BAC}} = \dfrac{1}{16}$

$S_{\triangle BQL} = \frac{1}{16}S$

$\cancel{\frac{4}{7}S \cdot t = \frac{1}{16}S}$

$t = 64$

$QT = g$ $\quad \dfrac{CL}{BC} = \dfrac{BC-BL}{BC} = 1-K$

$\dfrac{BL}{BC} = K \quad \dfrac{QL}{AL} = m$

$\dfrac{BQ}{BF} = n$

$K\cdot m\cdot S$

$\frac{1}{2}h\cdot 7x = (1-K)S$

$h = (1-m)\cdot g$

$\frac{3}{7}\cdot n\cdot S$

$\cancel{\frac{4}{7}\cdot h\cdot S} \quad \frac{4}{7}\cdot K\cdot n\cdot S + \frac{3}{7}\cdot n\cdot S = KS$

$\frac{4}{7}K\cdot n\cdot S = K\cdot m\cdot S \quad \frac{4}{7}\cdot n\cdot S = m\cdot S \quad m = \frac{4}{7}n$

$\frac{4}{7}Km + \frac{3}{7}n = K \quad K(1-\frac{4}{7}n) = \frac{3}{7}n$

$K(1-m) = \frac{3}{4}m$

$K - Km = \frac{3}{4}m \quad m(\frac{3}{4}+K) = K \quad m = \dfrac{K}{\frac{3}{4}+K}$

$-\sin^2 7x = -1+\cos^2 7x$

$\frac{\cos 4x}{2} - \frac{\cos 14x}{2} - 1 + \cos^2 7x - \cos^2 x - 3$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + 0 - 0 - 3 = -3$

$3{,}5\pi \quad 1{,}5\pi$

$4x^2 + 20x + 25 \geq x+3.$

$4x^2 + 19x + 22 \geq 0$

$\cos 4x \quad \cos(2\arccos\frac{1}{4})$

$\cancel{D = 81 - 88 > 0}$

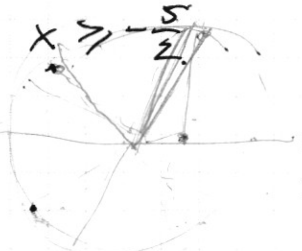
$2x+5 \geq \sqrt{x+3}$

$\cos \cancel{7} (2\arccos\frac{1}{2})\ldots$

$361 - 88 =$

$2x+5 \geq 0$

$x \geq -\frac{5}{2}$



$\cos \cancel{7}x - \cos x$

$361 - 4\cdot 88 =$

$= 352 = 9,$

$\begin{array}{r} 88 \\ 4 \\ \hline 352 \end{array}$

$\cos 7x + \cos x$

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq \cancel{1}$

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(\sqrt{x+3}-x)$

$\sqrt{x+3} - x > 0$

$\sqrt{x+3} - x \neq 1$

$\sqrt{x+3} > 1+x.$

$\sqrt{x+3} > 1+x$

$x > -1$

$\sqrt{x+3} > 1+x$ при $x < -1$ всегда верно.

$\sqrt{x-3} \geq 2x+5$

$\sqrt{x+3} > x$

$\sqrt{x+3} < 1+x$

$\log_x x+2 \geq \log_x x$

$x > 1$

$\cancel{x+3 >}$

$0 < x < 1$

$\sqrt{x+3} < 1+x.$

$x+3 < x^2+2x+1$

$\cancel{x^2 x} \quad \cancel{x^2} \quad x^2 + x - 2 > 0$

$-\frac{22}{8} = -\frac{11}{4}.$ $\quad x > -1$ $\quad \cancel{x>}$

$(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$

$-2{,}75$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15 - 034

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin 5x \cdot \sin 9x = \frac{\cos 4x - \cos 14x}{2}$ $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$2\cos^2 x - 1 = \frac{1}{4}$

$2\cos^2 x = \frac{5}{4}$

$g(x) = \frac{\cos 4x}{2} - \frac{\cos 14x}{2} - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

$\cos^2 x = \frac{5}{8}$

$g'(x) = 4 \cdot \left(-\frac{\sin 4x}{2}\right) - 14 \cdot \left(-\frac{\sin 14x}{2}\right) -$

$- 14 \sin 7x \cos 7x - \cancel{2(-\sin x)}\ 2 \cdot \cos x \cdot (-\sin x) =$

$= -2\sin 4x + 7\sin 14x - 14\sin 7x \cos 7x +$

$+ 2\sin x \cos x$

$7\sin 14x - 7\sin 14x + \sin 2x - 2\sin 4x =$

$= \sin 2x - 4\sin 2x \cos 2x =$ $2x = \arccos\frac{1}{4} + 2\pi n$

$= \sin 2x(1 - 4\cos 2x)$ $8\cos 2x$

$(\sin 2x)' = 2\sin x$ $(2\sin x\cos x)' = 2\cdot(\cos^2 x - \sin^2 x)$

$= -2\sin^2 x\cos^2$

$(\sin^2 7x$ $(\sin 7x \cdot \sin 7x)' = 2\sin 7x \cdot 7\cos 7x +$

$(\sin x \cdot \sin x)' = \cos x \cdot \sin x + \sin x \cos x$

$(\sin^2 x)' = 2\sin x \cdot \cos x$

1

0

$-2,25$

-2

-1

$+8$

$-2,25$

-2

-1

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)