# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 класс

БИЛЕТ 1 ШИФР 1-ССС

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра $a$ из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса $\omega_1$, $\omega_2$ и $\omega_3$, причём $\omega_1$ касается сторон $AD$ и $DC$, $\omega_2$ касается сторон $DC$ и $CB$, а $\omega_3$ касается сторон $CB$, $BA$ и $AD$.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол $AOB$, где $O$ – центр окружности $\omega_3$.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите $AB$.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geqslant 1$.

6. Точки $F$ и $L$ лежат на сторонах $AC$ и $BC$ треугольника $ABC$ соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки $BF$ и $AL$ пересекаются в точке $Q$; площади треугольников $BQL$ и $BAC$ относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки $L$ до прямой $AC$, если расстояние от точки $Q$ до прямой $AC$ равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

1-006

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$y=2x^2,\ y=98,\ y=18,\ y=a.$

Т.к $y=2x^2$ пересекает графики $y=98,\ y=18,\ y=a$, то она пересечет прямые в точках.

$2x^2=98$ $\quad$ $2x^2=18$ $\quad$ $2x^2=a$

$x^2=49$ $\quad$ $x^2=9$ $\quad$ $x^2=\frac{a}{2}$

$x=\pm 7.$ $\quad$ $x=\pm 3$ $\quad$ $x=\pm\sqrt{\frac{a}{2}}.$

Тогда ~~о~~ мы получим отрезки длиной $14;\ 6;\ 2\sqrt{\frac{a}{2}}.$ (Чтобы из этих отрезков ~~получить~~ составить треугольник с углом 120°) Возможны 3 случая угол находится между отрезками 14 и 6; 6 и $2\sqrt{\frac{a}{2}}$; 14 и $2\sqrt{\frac{a}{2}}$.

~~Вр~~ Рассмотрим данные случаи: 1 случай: между 14 и 6.

По теореме косинусов:

$(2\sqrt{\frac{a}{2}})^2=14^2+6^2-2\cdot14\cdot6\cos120°$

$4\frac{a}{2}^2=196+36+84.$

$2a^2=316.$

$a^2=158.$

~~$a=\sqrt{158}$~~

2 случай между 6 и $2\sqrt{\frac{a}{2}}$:

$14^2=6^2+(2\sqrt{\frac{a}{2}})^2-6\cdot2\sqrt{\frac{a}{2}}\cdot2\cos120°$

$196=36+2a+12\sqrt{\frac{a}{2}}$

$160=2a+12\sqrt{\frac{a}{2}}\ /:2$

$80=a+6\sqrt{\frac{a}{2}}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Пусть $\sqrt{\frac{a}{2}} = t$, тогда $a = 4t^2$, при этом $t \geq 0$.

$80 = 4t^2 + 6t$.

$4t^2 + 6t - 80 = 0 \; / : 2$

~~$t = 36$~~

$2t^2 + 3t - 40 = 0$

$D = 9 + 320 = 329$

$t_1 = \frac{-3 + \sqrt{329}}{4}$

$t_2 = \frac{-3 - \sqrt{329}}{4}$ - не входит в ОДЗ $t$;

$t = \frac{-3 + \sqrt{329}}{4}$.

$\sqrt{\frac{a}{2}} = \frac{-3 + \sqrt{329}}{4}$.

$\frac{a}{2} = \frac{9 - 6\sqrt{329} + 329}{16}$

$a = \frac{338 - 6\sqrt{329}}{8}$.

3. случай между 14 и $2\sqrt{\frac{a}{2}}$.

$6^2 = 14^2 + 2a - 14 \cdot 2\sqrt{\frac{a}{2}} \cdot 2\cos 120$.

$36 = 196 + 2a + 28\sqrt{\frac{a}{2}}$.

Пусть $\sqrt{\frac{a}{2}} = t$, тогда $a = 4t^2$, при этом $t \geq 0$.

$-160 + 8t^2 + 28t = 0 \; / : 4$

$2t^2 + 7t + 40 = 0$.

$D = 49 - 320 = \cancel{369} - 271$.

$\varnothing$.

Значит, при $a = \frac{338 - 6\sqrt{329}}{8}$ и $a = 158$.

Ответ: $a = \frac{338 - 6\sqrt{329}}{8}$; $a = 158$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

Т.к мы знаем кол-во цифр „8" и мы знаем, что они идут подряд можем расположить их в самом начале числа.

8 8 8 8 8 8 8 * * * * * * * * * *

Вместо звездочек мы можем поставить либо 0, либо 7. В итоге, получаем $2^{10}$ - вариантов.

Расположим теперь все цифры „8" в конце, получим

* * * * * * * * * * 8 8 8 8 8 8 8.

Т.к число не может начинаться с нуля, то в начале может быть только цифра 7, в остальных девяти цифрах мы также можем поставить либо 0, либо 7, получаем $2^9$ вариантов. Теперь

Возьмем любую цифру, кроме первой и переставим её за восьмерки, т.е. 7 * * * * * * * * 8 8 8 8 8 8 8 *, получим еще $2^9$ вариантов, перекинем еще получим еще $2^9$ и так 9 до тех пор пока слева от восьмерок не останется 7, в итоге получим еще $9 \cdot 2^9$ вариантов.

В итоге общее количество 17-значных чисел.

$2^{10} + 2^9 + 9 \cdot 2^9 = 2^{10} + 10 \cdot 2^9 = 2^9(10+2) = 5120 + 1024 =$
$= 6144$.

Ответ: 6144.

№5.

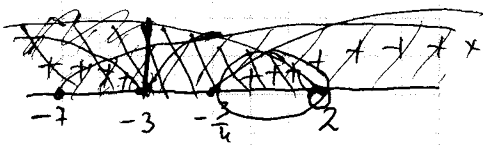
$$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1 \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+7 \geq 0 \\ \sqrt{x+7}-x > 1 \\ \sqrt{x+7}-x \leq x+4 \end{cases} \\ \begin{cases} x+7 \geq 0 \\ \sqrt{x+7}-x < 1 \\ \sqrt{x+7}-x \geq x+4 \end{cases} \end{array}\right. \iff$$

$$\cancel{\sqrt{x+7}-x>0}$$

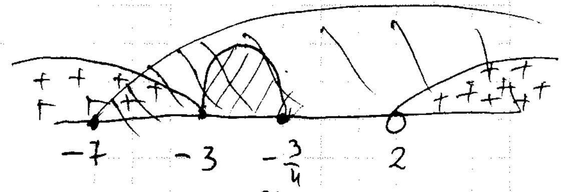
$$\cancel{\begin{cases} x+7 \geq 0 \\ \sqrt{x+7}-x < 1 \\ \sqrt{x+7}-x \geq \end{cases}}$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq -7 \\ \sqrt{x+7} > 1+x \\ \sqrt{x+7} \leq 2x+4 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq -7 \\ \sqrt{x+7} < 1+x \\ \sqrt{x+7} \geq 2x+4 \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq -7 \\ x+7 > x^2+2x+1 \\ x+7 \leq 4x^2+16x+16 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq -7 \\ x+7 < x^2+2x+1 \\ x+7 \geq 4x^2+16x+16 \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq -7 \\ x^2+x-6 < 0 \\ 4x^2+15x+9 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq -7 \\ x^2+x-6 > 0 \\ 4x^2+15x+7 \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq -7 \\ (x-2)(x+3) < 0 \\ (x+\frac{3}{4})(x+3) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq -7 \\ (x-2)(x+3) > 0 \\ (x+\frac{3}{4})(x+3) \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq -7 \\ \left[\begin{array}{l} x < 2 \\ x > -3 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \geq -\frac{3}{4} \\ x \leq -3 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq -7 \\ \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < -3 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \leq -\frac{3}{4} \\ x \geq -3 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$$




$x \in [-\frac{3}{4}; 2)$




$\varnothing$

$4x^2+15x+9=0$ ; $D = 225-144 = 81 = 9^2$. $x_1 = \frac{-15+9}{8} = -\frac{3}{4}$

$x_2 = \frac{-15-9}{8} = -3$

Ответ: $x \in [-\frac{3}{4}; 2)$

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7.

Чтобы сумма была наименьшей, нужно взять самые маленькие (возможные) числа из промежутков.

Возьмем из 1 промежутка числа от 1 до 6.

1 2 3 4 5 6. , тогда, ~~чтобы~~ нам нужно взять из следующего промежутка ~~те~~ такие числа, чтобы они при делении на 45 не давали остатки 1, 2, 3, 4, 5, 6, самые маленькие из них 52; 53; 54; 55; 56; 57.

Из следующего нужно взять числа, которые при делении на 45 не давали остатки 1 - 6; 7 - 12; самые маленькие из них 103; 104; 105; 106; 107; 108.

Из следующего нужно взять, те которые не дают остатки [1; 18]. это 154; 155; 156; 157; 158; 159,

Из следующего нужно взя, те которые не дают остатки [1; 24]. это ~~195; 196; 197; 198; 199; 200~~ 205; 206; 207; 208; 209; 210

~~Помум~~ Посчитаем сумму.

103 + 104 + 205 + 206 + 207 + 208 + ~~209 + 210 + 154 + 155 + 156 + 157 + 158~~ + 159 + 52 + 53 +
+ 105 + 106 ~~+ 54 + 55 + 56 + 57 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6~~ = 6 · 210 + 5 · 210 + 57 +
+ 107 +
+ ~~320 + 103 + 210 + 6 = 12 · 210 + 377 + 6 = 2897~~ ~~2993~~

Ответ: 3165

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 52 + 53 + 54 + 55 + 56 + 57 + 103 + 104 + 105 + 106 + 107 +
+ 108 + 154 + 155 + 156 + 157 + 158 + 159 + 194 + 195 + 196 + 197 + 198 + 199 = 3165.

№2.

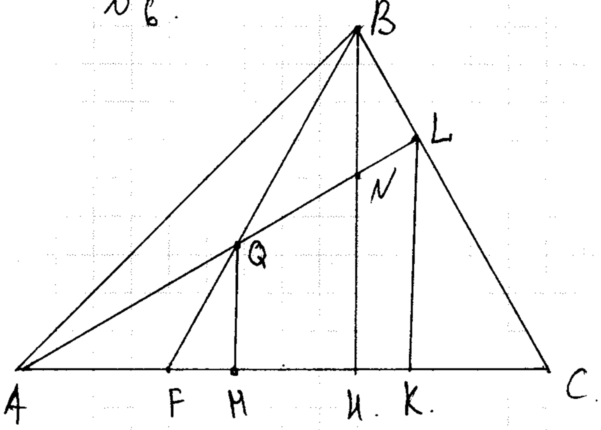
$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4. = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x) - \sin^2 x + \cos^2 5x$
$+ 4.$

$g'(x) = \frac{1}{2}((-4)\sin 4x + 10\sin x) - 2\sin x + 10\cos 5x =$

$= -2\sin 4x + 5\sin x - 2\sin x + 10\cos 5x. = 3\sin x - 2\sin 4x + 10\cos 5x.$

$3\sin x - 2\sin 4x + 10\cos 5x = 0.$

№6.




$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{5}{12}$

$|QM| = 6.$

$|LK| - ?$

$\frac{|AF|}{|FC|} = \frac{2}{5}.$

$\frac{S_{ABC}}{S_{FBC}} = \frac{7}{5}$ $(|AC| = 7x;\ |FC| = 5x,\ |BH|$ - общая$)$

$\frac{S_{BQL}}{S_{FBC}} = \frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} \cdot \frac{S_{ABC}}{S_{FBC}} = \frac{7}{12}$; $\frac{|BQ| \cdot |BL|}{|BF| \cdot |BC|} = \frac{7}{12}.$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 6
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

1-СС6

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4.$

$\cancel{g'(x) = \sin 10x + \cos 4x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4.}$

$\frac{1}{2}(\cos 10x - \cos 4x) - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4.$

$g'(x) = \frac{1}{2} \cdot 4\sin 4x + \frac{1}{2} 10 \sin x - 2\sin x + 2 \cdot 5\cos 5x =$

$= -2\sin 4x + 5\sin x - 2\sin x + 10\cos 5x.$

$3\sin x - 2\sin 4x + 10\cos 5x.$

$3\sin x - 4\sin 2x\cos 2x + 10\cos 5x.$

$\cancel{2\sin(5x - x) = 2\sin}$

$\cancel{2\sin(x - 5x)}$

$2\sin(5x - x) = 2\sin 5x\cos x + 2\sin x\cos 5x.$

$3\sin x - 2\sin 5x\cos x - 2\sin x\cos 5x + 10\cos 5x$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

0, 7, 8

7 7 7 7 7 7 7 7 7 7

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

8 8 8 8 8 8 8 * * * * * * * * * *

7 7 7 7 7 7 7 7 7 7

7 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

* * * * * * * * * * * 8 8 8 8 8 8 8

$+2^{10}$

$9\cdot 2^3 + 2^3 + 2^3$

$2^{10}\ x$

$-\frac{3}{4}$ 2.

$4x^2+15x+9 \geq 0$

$x^2+x-6 \leq 0$

84.

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$

$x+7 \leq 4x^2+16x+16$

$x+7 \geq 1+2x+x^2$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x+7 \geq 0 \\ \sqrt{x+7}-x \geq x+4 \\ \sqrt{x+7}-x < 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x+7 \geq 0 \\ \sqrt{x+7}-x \leq x+4 \\ \sqrt{x+7}-x \geq 1 \end{cases}\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \geq -7 \\ \sqrt{x+7} \geq 2x+4 \\ \sqrt{x+7} \leq 1+x \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq -7 \\ \sqrt{x+7} \leq 2x+4 \\ \sqrt{x+7} \geq 1+x \end{cases}\end{array}\right.$$

$(x+\frac{3}{4})(x+3) \geq 0$

$(x+3)(x-2) \leq 0$

$x \geq -\frac{3}{4}$

$x \leq -3$

$-3 \leq x < 2$

$$\iff \begin{cases} x+7 \geq 4x^2+16x+16 \\ x+7 \leq 1+2x+x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2+15x+9 \leq 0 & (1) \iff (x+\frac{3}{4})(x+3) \leq 0 \\ x^2+x-6 \geq 0 & (2) \iff (x+3)(x-2) \geq 0 \end{cases}$$

$D_1 = 225-144 = 81$

$\varnothing$

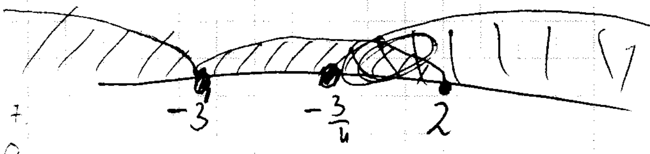
$D_2 = 1+24 = 25$

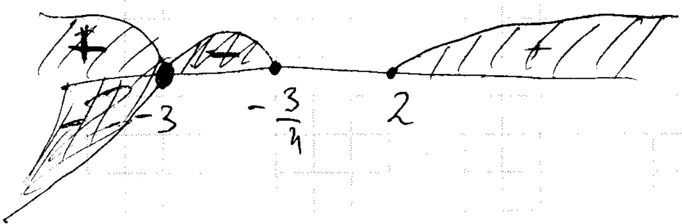
$\frac{-15+9}{8} = -\frac{3}{4}$

$\frac{-15-9}{8} =$

$\frac{-1+5}{2} = 2$

$\frac{-1-5}{2} = -3$




☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

1-006

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$34 \times 34$: $136$, $102$, $1156$

$14^2 = 6^2 + 2a + \sqrt{\frac{a}{2}} \cdot 6.$

$\cancel{196 - 36}$ $160 = \sqrt{18a} + 2a.$

181 182 183 184 185 186

1 2 3 4 5 6

$\sqrt{a} = t.$

$160 = 3\sqrt{2}t + 2t^2$

$14^2 + 6^2 + 2 \cdot 14 \cdot 6 \cdot 0{,}5.$

$\sqrt{274} = 2\sqrt{\frac{a}{2}}$

$15 \cdot 5 = 75$

$6 \quad 49.$

$-0{,}5.$ $2t^2 + 3\sqrt{2}t - 160 = 0$

$196 + 36 + 42 =$

$= \sqrt{274}.$ $D = 18 + 1280 = 1298 =$

$274 = 2a.$

$a = 137.$

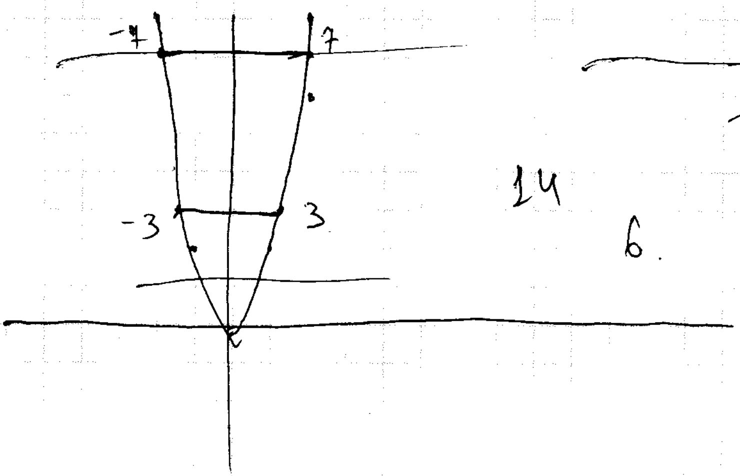
1 181 182 183 184 185 186

1 46 47 48 49 50 51

1 91 92 93 94 95 96

1 136 137 138 139 140 141

1 1 2 3 4 5 6




$\sqrt{\frac{a}{2}}$

14

6.

$98 = 2x^2$

$x^2 = \sqrt{49} = 7.$

3; -3.

-7; 7.

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

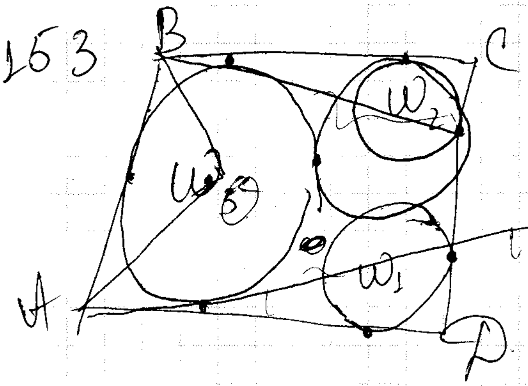
1 2 3 4 5 6.

52 53 54 55 56 57. 153

103 104 105 106 107 108.

~~154~~ ~~155~~ ~~156~~ ~~157~~ ~~158~~ 159.

194 195 196 197 198 199.



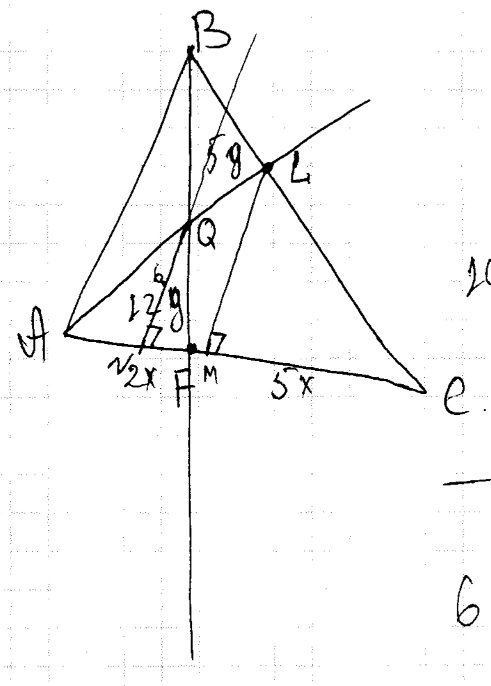

$$\begin{array}{r|l} 149 & 45 \\ \underline{135} & 3 \\ 14 & \end{array}$$

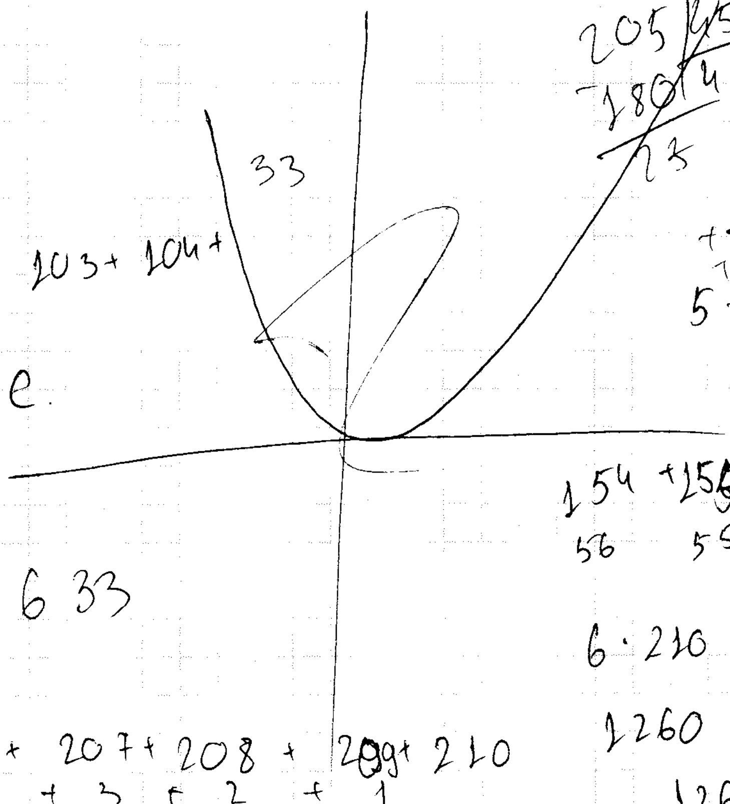
~~200 + 200 + 200 + 200~~ +

1200 + 960 + 300 + 150 + 152 + 153 + 154 =

= 2260 + 459 = 2919.

154.




$$\begin{array}{r|l} 205 & 45 \\ \underline{180} & 4 \\ 25 & \end{array}$$

+ 216

1050

1266

+ 1056

+ 159

5 · 219 5 +

154 + 155 + 156 157 + 158 159

56 55 54 53 52

633

6 · 210

1260

205 + 206 + 207 + 208 + 209 + 210

+ 5 + 4 + 3 + 2 + 1

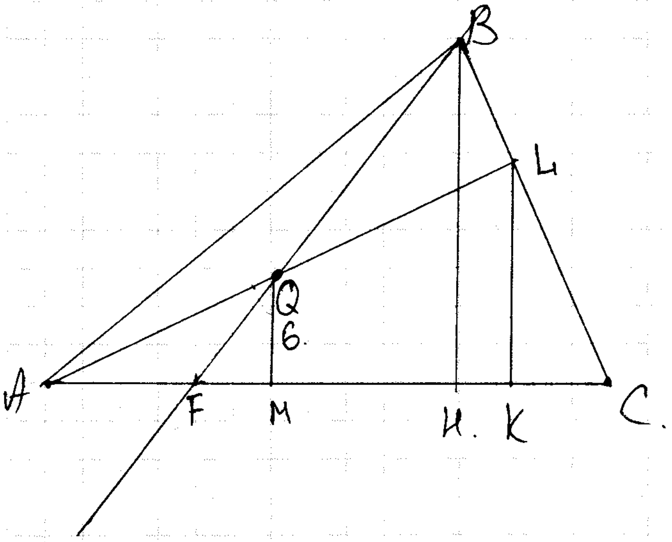
+ 1266
+ 1266

2532
+ 633
3165

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА




$$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{5}{12}.$$

$|QM| = 6.$

$|LK| - 2$

$$\frac{|AF|}{|FC|} = \frac{2}{5}.$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{FBC}} = \frac{7}{5}.$$

$$\frac{S_{BQL}}{S_{FBC}} = \frac{\cancel{8}\,7}{\cancel{1}2}.$$

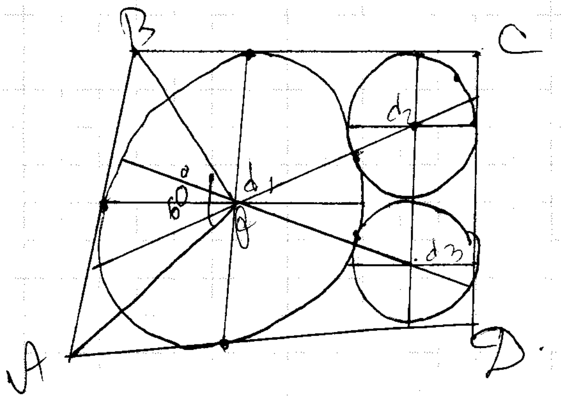
$$\frac{|BQ|\cdot|BL|}{|FB|\cdot|BC|} = \frac{7}{12}.$$

$S_{BFC} = \frac{1}{2}|FC|\cdot|BH|$

$S_{MQLK} = \frac{MQ + LK}{2}|HK|$

$S_{FMQ} = \frac{1}{2}|FM|\cdot|MQ|$

$S_{KLC} = \frac{1}{2}|KC|\cdot|LK|$


B
C
A
D
$d_1$
$d_2$
$d_3$
60°