МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1

ШИФР 1-005

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $y = 2x^2$ пересекает $y = 98$, $y = 18$, $y = a$, высекая на каждой отрезки. Найти значение параметра a из этих 3х отрезков можно составить треугольник с $\angle 120°$?

Решение.

1) подставим уравнение прямой в уравнение параболы, т.е. $y = 2x^2$ в $y = 98$, и получим:

$98 = 2x^2 \quad |:2$

$49 = x^2$

$x = \sqrt{49}$

$x = 7$

2) $18 = 2x^2 \quad |:2$

$9 = x^2$

$x = \sqrt{9}$

$x = 3$

3) $a = 2x^2 \quad |:2$

$\frac{a}{2} = x^2$

$x = \sqrt{\frac{a}{2}}$

2) Найдите наибольшее и наименьшее значение функции

$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

Решение.

$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 = \frac{1}{2}\left(\cos(-4x) - \cos 10x\right) + \sin^2 x +$
$+ \cos^2 5x + 4 = \frac{1}{2}\left(\cos 4x - \cos 10x\right) + 1 - \cos^2 x + \cos^2 5x + 4 =$
$=$

3) Найти кол-во 17-значных чисел, содержащих только цифры „0", „7", „8" таких, что цифр „8" ровно 7, и они идут подряд.

Решение.

Если в данном 17-значном числе, цифр „8" в количестве 7 и они идут подряд, значит можно рассмотреть все случаи расположения семи цифр „8", идущих подряд. Например, в 1 случае это может быть так $8888888 \ldots n_{17}$, а во втором таким образом $n_1 8888888 \ldots n_{17}$. Таким образом, рассматривая все возможные случаи, можно получить 11 (~~способов~~) 17-значных чисел.

Ответ: 11 чисел

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 2

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

1-005

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$

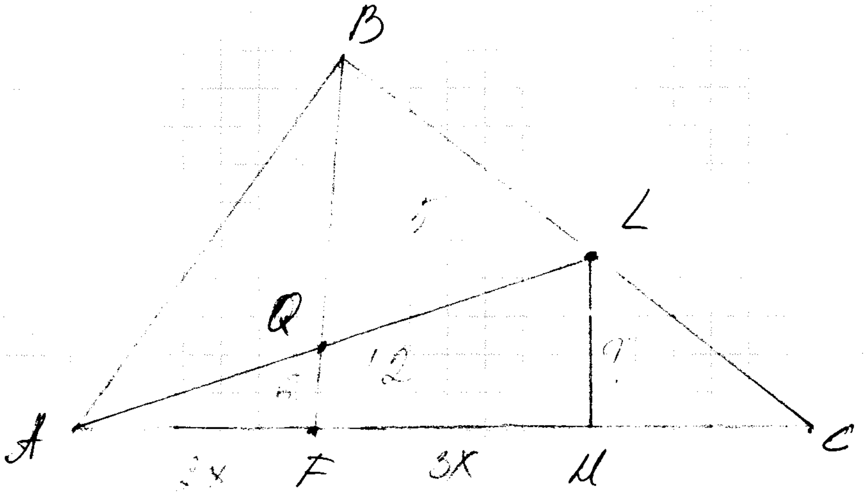
Решение.

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1 = \frac{1}{\log_{x+4}\sqrt{x+7}-x} \geq 1 \iff \frac{1}{\log_{x+4}\sqrt{x+7}-x} - 1 \geq 0$

$\iff$

6. Дано: $\triangle ABC$, $F \in [AC]$, $L \in [BC]$, $\frac{|AF|}{|FC|} = \frac{2}{5}$,
$[BF] \cap [AL] = \{Q\}$, $\frac{S_{\triangle BQL}}{S_{\triangle BAC}} = \frac{5}{12}$, $|QF| = 6$ см

Найти: $|LH|$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 3

(Нумеровать только чистовики)

Решение.

7) по 6 целых чисел из каждого промежутка [1; 45], [46; 90], [91; 135], [136; 180], [181; 225]. Разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Найти наименьшее значение суммы 30 выбранных таких чисел.

Решение.

Т.к. требуется найти минимальное значение суммы 30 выбранных таких чисел, то нужно взять минимальное число в каждом из промежутков по 6 шт. Значит, в каждом промежутке нужно взять по 6 первых чисел. И получим наименьшую сумму, равную 2805. Сумма в 1 пр-ке 21; во II м - 291, в III м - 561, в IV м - 831, в V м - 1101. Ответ: 2805.

☑ черновик ☐ чистовик Страница № 4

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры „0", „7" и „8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр „8" ровно семь, и они идут подряд.

Решение.

Если в данном 17-значном числе, цифр „8" в количестве 7 и они идут подряд, значит можно рассмотреть все случаи расположения семи цифр „8", идущих подряд. Например, в 1 случае это может быть так 8888888 ... n_{17}, а во втором таким образом $n_1$8888888 ... n_{17} и т.д. Т.о., рассматривая все возможные случаи, можно получить 11 17-значных чисел таких, что цифр „8" ровно семь, а остальные цифры „0", „7" и „8".
Ответ: 11 чисел.

7) Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка [1; 45], [46; 90], [91; 135], [136; 180], [181; 225]. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое наименьшее значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

Решение.

1) Т.к. требуется найти наименьшее значение, которое может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел, то нужно взять по 6 первых чисел минимальных

в каждом промежутке. Сумма в первом промежутке первых 6 чисел равна 21, во втором: 291, в третьем 561, в четвертом 831, в пятом 1101. А наименьшее значение суммы 30 чисел 2805 (I + II + III + IV + V).

Ответ: 2805.

5) Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$

Решение.

$$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_{x+4}\sqrt{x+7}-x} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_{x+4}\sqrt{x+7}-x} - 1 \geq 0$$

2) Найдите наибольшее и наименьшее значение функции

$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

Решение.

$$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 = \frac{1}{2}(\cos(3x-7x) - \cos(3x+7x)) -$$
$$- \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 = \frac{1}{2}(\cos(-4x) - \cos 10x) - 1 + \cos^2 x + \cos^2 5x + 4 =$$
$$= \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x) + \cos^2 x + \cos^2 5x + 3 =$$

1) Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треуг. с углом $120°$?

Решение.

1) $98 = 2x^2$	2) $18 = 2x^2$	3) $a = 2x^2$
$49 = x^2$	$9 = x^2$	$\frac{a}{2} = x^2$
$x = \sqrt{49}$	$x = \sqrt{9}$	$x = \sqrt{\frac{a}{2}}$
$x = 7$	$x = 3$	$a = \frac{x^2}{2}$

Ответ: $a = \frac{x^2}{2}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

1-005

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №3

(Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №4
(Нумеровать только чистовики)

1 - 005

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)