МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1 ШИФР 9-19

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

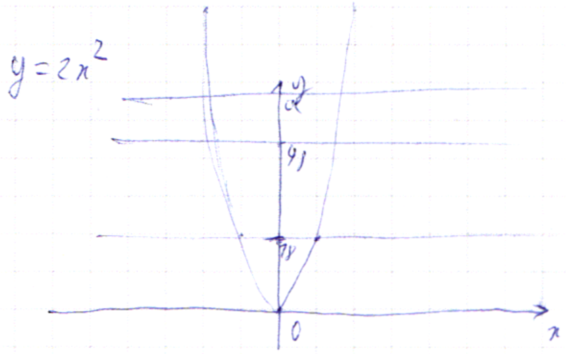
9-19

ШИФР

(заполняется секретарём)

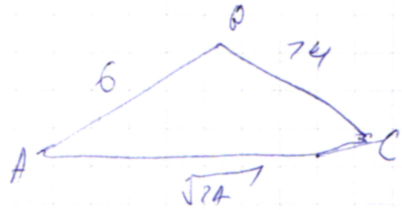
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1



$y=a$ отрезает отрезок, только при $a>0$.

Найдём отрезки, которые высекают прямые:



$y=18$: $2x^2=18 \Rightarrow x=\pm 3 \Rightarrow l_1 = 3-(-3)=6$

$y=98$: $2x^2=98 \Rightarrow x=\pm 7 \Rightarrow l_2 = 7-(-7)=14$

$y=a$: $2x^2=a \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{a}{2}} \Rightarrow l_3 = \sqrt{\frac{a}{2}} - \left(-\sqrt{\frac{a}{2}}\right) = 2\sqrt{\frac{a}{2}} = \sqrt{2a}$

Т.к. у нас треугольник, то для l_3 должно выполняться ~~соотношение~~ неравенство: $|l_1-l_2| < \sqrt{2a} < l_1+l_2 \Rightarrow$

$8 < \sqrt{2a} < 20$.

3 варианта: (по теореме косинусов).

$\angle ABC=120^\circ \Rightarrow 2a = 6^2+14^2-2\cdot 6\cdot 14\cdot\cos 120^\circ = 36+196+2\cdot 6\cdot 14\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{a=158} \Rightarrow \sqrt{2a} = 2\sqrt{79} \approx 18$

$\angle BCA=120^\circ \Rightarrow 6^2 = 14^2+2a-2\cdot 14\sqrt{2a}\cdot\cos 120^\circ \Rightarrow 36 = 196+2a+14\sqrt{2a} \Rightarrow -a-80 = 7\sqrt{2a} \Rightarrow \varnothing$ нет

$\angle BAC=120^\circ \Rightarrow 14^2=6^2+2a-2\cdot 6\cdot\sqrt{2a}\cos 120^\circ \Rightarrow 196=36+2a+6\sqrt{2a} \Rightarrow 80-a = 3\sqrt{2a} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \le 80 \\ 6400-160a+a^2 = 18a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\le 80 \\ a^2-178a+6400=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\le 80 \\ a = \frac{178\pm 78}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\le 80 \\ a=50 \\ a=128 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a=50.}$$

Для $a=50$, $\sqrt{2a}=10$ — подходит, т.к. $10 \in (8;20)$.

Ответ: для $a=50$ и $a=158$.

№2

$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 = (\sin 5x \cos 2x - \sin 2x \cos 5x)(\sin 5x \cos 2x + \sin 2x \cos 5x) -$

$- \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 = \sin^2 5x \cos^2 2x - \sin^2 2x \cos^2 5x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 =$

$= \sin^2 5x \cos^2 2x + \cos^2 5x(1 - \sin^2 2x) - \sin^2 x + 4 = \sin^2 5x \cos^2 2x + \cos^2 5x \cdot \cos^2 2x - \sin^2 x + 4 =$

$= \cos^2 2x (\sin^2 5x + \cos^2 5x) - \sin^2 x + 4 = \cos^2 2x - \sin^2 x + 4 = (1 - 2\sin^2 x)^2 - \sin^2 x + 4 =$

$= 1 - 4\sin^2 x + 4\sin^4 x - \sin^2 x + 4 = 5 - 5\sin^2 x + 4\sin^4 x$. Сделаем замену $t = \sin^2 x$, где $t \in [0;1]$.

$\varphi(t) = 5 - 5t + 4t^2$; $\varphi'(t) = 8t - 5$; $8t - 5 = 0$, при $t = \frac{5}{8}$; Исследуем $\varphi(t)$ на $[0;1]$

И найдём значения для критических точек:

$\varphi(0) = 5 = \max$

$\varphi\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{55}{16} = 3\frac{7}{16} = \min$

$\varphi(1) = 4$

Ответ: $\max(g(x)) = 5$; $\min(g(x)) = \frac{55}{16} = 3\frac{7}{16}$.

№3

Т.к. все цифры "8" идут подряд, то обозначим это число "8888888" за x', теперь нам надо найти кол-во 11-значных чисел из цифр "0"; "7" и одной x'.

Если x' стоит на 1 (первом) месте:

$x' x_1 \ldots x_{10}$ В этом случае существует $2^{10} - 2$ вариантов, т.к. $x_1 - x_{10}$ могут принимать значения "0" или "7" а мы исключаем 2 варианта $x'0000000000$ и $x'7777777777$. (по условию)

Если x' не стоит на 1 (первом) месте:

$x_1 \ldots x' \ldots x_{11}$ В этом случае $x_1 = 7$, иначе число $x_1 \ldots x_{11}$ не будет 11-значным. Рассмотрим один из десяти вариантов для x' (10 вариантов, т.к. x' может стоять на местах от x_2 до x_{11}).

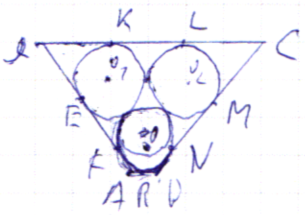
$x_1 x' x_3 \ldots x_{11}$ В этом случае существует $2^9 - 1$ вариант, т.к. цифры $x_3 - x_{11}$ могут принимать значение "0" или "7" и мы исключаем вариант $x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = x_9 = x_{10} = x_{11} = 7$, (т.к. $x_1 = 7 \Rightarrow$ цифра 7 всегда будет в этом числе). $\Rightarrow 10 \cdot (2^9 - 1)$ вариантов;

Итого: $2^{10} - 2 + 10(2^9 - 1) = 1024 - 2 + 10 \cdot (512 - 1) = 1022 + 5110 = 6132$ вариантов.

Ответ: 6132 числа.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



В данной задаче мы будем пользоваться тем, что расстояния от касательных, до окружности проведённых из одной точки равны. (1)
$DE = DK$; $CL = CM$; $AF = AR$; $BR = BN$.

Касательная перпендикулярна радиусу в точке касания (2) =>
$O_1E \perp AD$; $OF \perp AD$; $O_1K \perp DC$; $O_2L \perp DC$; $O_2M \perp BC$; $ON \perp BC$; $OR \perp AB$.

Центры 3 попарно соприкасающихся окружностей образуют равносторонний треугольник со стороной $2r$, где r — радиус окружности, и углы этого $\triangle$ равны 60°. (3)

И формула площади $\triangle$: $S_{ABC} = \frac{h_a \cdot a}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin\alpha}{2}$.

а) $AD + BC - AB - CD = 12$. Распишем:

$(\cancel{DE} + EF + \cancel{FA}) + (\cancel{BN} + MN + \cancel{MC}) - (\cancel{AR} + \cancel{BR}) - (\cancel{DK} + KL + \cancel{LC}) = 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow EF + MN - KL = 12$. По (3): $EF = O_1O = OO_2 = MN = O_1O_2 = KL = 2r$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow 2r + 2r - 2r = 12 \Rightarrow r = 6$.

б) $\angle FOA = \angle ROA$; $\angle BOR = \angle BON$ (по (1) и (2)) (из равенства треугольников ($\triangle FOA = \triangle ROA$) и ($\triangle BOR = \triangle BON$)); $\angle FOO_1 = \angle NOO_2 = 90^\circ$, т.к. $O_1E \parallel OF$ и $O_1E \perp AD$ и $OF \perp AD \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Аналогично для $ONMO_2$ и $O_1O_2KL \Rightarrow OO_1EF = ONMO_2 = O_1KLO_2$, т.к. $O_1O = O_2O = O_1O_2 = 2r$ — прямоугольники; $\angle O_1OO_2 = 60^\circ$ (по (3)); $\angle FOA + \angle NOB = \angle AOR + \angle BOR = \angle AOB \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle FON = \angle FOA + \angle BON + \angle AOB = 2\angle AOB = 360^\circ - \angle O_1OO_2 - \angle O_1OF - \angle O_2ON =$

$= 360^\circ - 60^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 120^\circ \Rightarrow \angle AOB = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$.

в) Рассмотрим $\triangle AOB$. Воспользуемся результатом б): $\angle AOB = 60^\circ$. $\Rightarrow$ $AO \cdot OB = 58$

$S_{AOB} = \frac{AB \cdot OR}{2}$ (по (2): $OR \perp AB$); $S_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot OB \cdot \sin\angle AOB$; $\Rightarrow$

$\frac{AB \cdot OR}{2} = \frac{AO \cdot OB \cdot \sin\angle AOB}{2} \Rightarrow AB = \frac{AO \cdot OB \cdot \sin\angle AOB}{r} = \frac{58 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{6} = \frac{29\sqrt{3}}{6} = \frac{29}{2\sqrt{3}}$

Ответ: а) $r = 6$; б) $\angle AOB = 60^\circ$; в) $AB = \frac{29}{2\sqrt{3}}$.

№5

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$

ОДЗ:

$\begin{cases} x+7 \geq 0 \\ \sqrt{x+7}-x > 0 \\ \sqrt{x+7}-x \neq 1 \\ x+4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -4 \\ x \neq 2 \\ \left[\begin{cases} x \leq 0 \\ x+7 > 0 \end{cases} \right. \\ \left[\begin{cases} x > 0 \\ \sqrt{x+7} > x \end{cases}\right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x \neq 2 \\ \left[\begin{array}{l} x \in [-7; 0] \\ x > \frac{1+\sqrt{29}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow x \in (-4; 0] \cup \left(\frac{1+\sqrt{29}}{2}; +\infty\right)$

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) - \log_{\sqrt{x+7}-x}(\sqrt{x+7}-x) \geq 0 \Rightarrow \log_{\sqrt{x+7}-x}\left(\frac{x+4}{\sqrt{x+7}-x}\right) \geq 0 \Rightarrow$

$(\sqrt{x+7}-x-1)\left(\frac{x+4}{\sqrt{x+7}-x} - 1\right) \geq 0 \Rightarrow (\sqrt{x+7}-x-1)\dfrac{(2x+4-\sqrt{x+7})}{\sqrt{x+7}-x} \geq 0$

$-x-1+\sqrt{x+7} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1; \\ x^2+2x+1 = x+7 \end{cases} \Rightarrow$ ~~$x \geq 0$, при~~ $\sqrt{x+7}-x-1 \geq 0$, при $x \in [-7; -1] \cup [2; +\infty)$

$\sqrt{x+7}-x-1 < 0$, при $x \in (-1; 2)$

$\sqrt{x+7}-x = 0 \Rightarrow \sqrt{x+7}-x > 0$, при $x \in [-7; 0] \cup \left[\frac{1+\sqrt{29}}{2}; \infty\right)$.

$\sqrt{x+7}-x < 0$, при $x \in \left(0; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$.

$2x+4-\sqrt{x+7} = 0 \Rightarrow 2x+4-\sqrt{x+7} \geq 0$, при $x \in [-7; -2] \cup \left[\frac{3}{4}; +\infty\right)$

$2x+4-\sqrt{x+7} < 0$, при $x \in \left(-2; \frac{3}{4}\right)$

$\Downarrow$

$x \in [-7; -2] \cup [-1; 0] \cup \left[\frac{3}{4}; 2\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{29}}{2}; +\infty\right)$

$+$ ОДЗ $\Rightarrow x \in (-4; -2] \cup [-1; 0] \cup \left[\frac{1+\sqrt{29}}{2}; +\infty\right)$

Ответ: $x \in (-4; -2] \cup [-1; 0] \cup \left(\frac{1+\sqrt{29}}{2}; +\infty\right)$.

№7

Будем брать минимальное число из каждого промежутка с шагом 1. и разницей между членами 5.

1; 47; 93; 139; 185

6; 52; 98; 144; 190

11; 57; 103; 149; 195

16; 62; 108; 154; 200

21; 67; 113; 159; 205

26; 72; 118; 164; 210

$S_1 = 1+47+93+139+185 = 365$

$S_2 = S_1 + 25$

$S_3 = S_1 + 50$

$S_4 = S_1 + 75$

$S_5 = S_1 + 100$

$\Rightarrow S' = S_1+S_2+S_3+S_4+S_5 = 5S_1 + 25+50+75+100 =$

$= 1825 + 100 + 150 = 1825 + 250 =$

$= 2075$

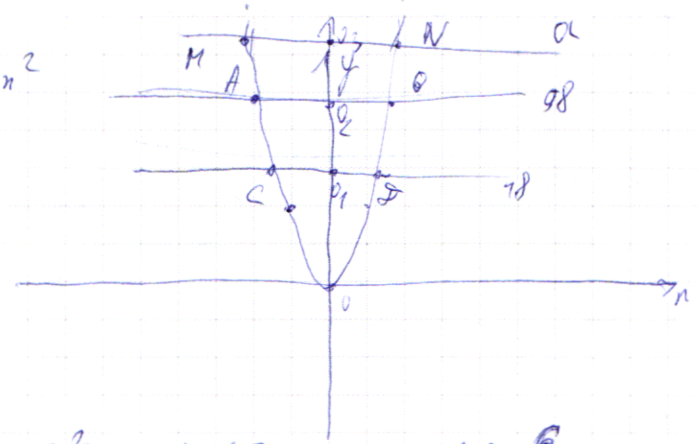
Ответ: $S_{min} = 2075$.

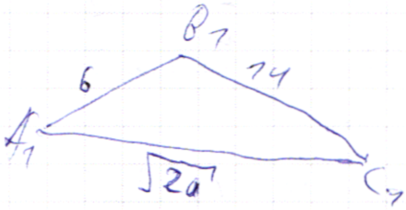
☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y=2x^2$





O_1D: $2x^2=18 \Rightarrow x=\pm 3 \Rightarrow CD = 2O_1D = 6;$

$2x^2=98 \Rightarrow x=\pm 7 \Rightarrow AB = 2O_2B = 14;$

$2x^2=a \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{a}{2}} \Rightarrow MN = 2\cdot O_3N = 2\sqrt{\frac{a}{2}} = \sqrt{2a}$

3 Варианта:

$\angle A_1B_1C_1 = 120^\circ$:

$2a = 6^2+14^2-2\cdot 6\cdot 14\cdot \cos 120^\circ \Rightarrow 2a = 36+196+\cancel{2}\cdot 6\cdot 14\cdot \frac{1}{\cancel{2}} \Rightarrow a = 18+98+6\cdot 7 = 116+42=158 \Rightarrow$

$A_1C_1=\sqrt{2a}=2\sqrt{79}\approx 8{,}5\cdot 2 \approx 17 \Rightarrow$ не может быть, т.к. $A_1C_1 > A_1B_1+B_1C_1$

$\angle B_1C_1A_1 = 120^\circ$:

$6^2 = 14^2+2a-2\cdot 14\cdot\sqrt{2a}\cdot\cos 120^\circ \Rightarrow 36 = 196+2a+14\cdot\sqrt{2a} \Rightarrow 18 = 98+a+7\sqrt{2a} \Rightarrow$

$\Rightarrow -a-80 = 7\sqrt{2a}$; $a>0$; $-a-80 \geq 0 \Rightarrow a\leq -80 \Rightarrow \cancel{\varnothing}$

$\angle B_1A_1C_1 = 120^\circ$:

$14^2 = 6^2+2a-2\cdot 6\cdot\sqrt{2a}\cdot\cos 120^\circ \Rightarrow 196 = 36+2a+6\sqrt{2a} \Rightarrow 98 = 18+a+3\sqrt{2a} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 80-a = 3\sqrt{2a} \\ a\leq 80 \end{cases} \Rightarrow 6400-160a+a^2 = 18a \Rightarrow a^2-178a+6400=0 \Rightarrow$

$D = 178^2-4\cdot 6400 = 31684-25600 = 6084$

$a = \frac{178\pm 78}{2} = 89\pm 39 = 128; 50; \Rightarrow A_1C_1 = \sqrt{2a} = 16; 10$, подходит, т.к. $|A_1B_1 - B_1C_1| \leq 10; 16 < A_1B_1+B_1C_1$

$$\begin{array}{r} \times\ 178 \\ 178 \\ \hline +1424 \\ 1246\ \ \\ 178\ \ \ \ \\ \hline 31684 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 64 \\ 4 \\ \hline 256 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -\ 31684 \\ 25600 \\ \hline 6084 \end{array}$$

$6084 = 2\cdot 3042 = 2^2\cdot 1521 = 2^2\cdot 3\cdot 507 = 2^2\cdot 3^2\cdot 169 = 2^2\cdot 3^2\cdot 13^2 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{6084} = 2\cdot 3\cdot 13 = 2\cdot 39 = 78$

N 2

$y(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$; $\sin(5x-2x)\cdot\sin(5x+2x) = (\sin 5x \cos 2x - \sin 2x \cos 5x)(\sin 5x \cos 2x + \sin 2x \cos 5x) =$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$

$= \sin^2 5x \cos^2 2x - \sin^2 2x \cdot \cos^2 5x$

$\sin^2 5x \cos^2 2x - \sin^2 2x \cdot \cos^2 5x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 5x (1 - \sin^2 2x) + \sin^2 5x \cos^2 2x - \sin^2 x + 4 =$

$= \cos^2 5x \cdot \cos^2 2x + \sin^2 5x \cdot \cos^2 2x - \sin^2 x + 4 =$

$= \cos^2 2x (\cos^2 5x + \sin^2 5x) - \sin^2 x + 4 = \cos^2 2x - \sin^2 x + 4 =$

$= (1 - 2\sin^2 x)^2 - \sin^2 x + 4 = 1 - 4\sin^2 x + 4\sin^4 x - \sin^2 x + 4 =$

$= 5 - 5\sin^2 x + 4\sin^4 x$; $\sin^2 x = t \Rightarrow t \in [0;1]$

$\Rightarrow 5 - 5t + 4t^2$;

$\varphi'(t) = 8t - 5$; $\Rightarrow t = \frac{5}{8}$;

$\varphi(0) = 5$;

$\varphi(\frac{5}{8}) = 5 - \frac{5\cdot 5}{8} + 4\cdot\frac{5^2}{8^2} = 5 - \frac{25}{8} + \frac{25}{16} = 5 + \frac{25}{16} = \frac{105}{16} = 6\frac{9}{16}$ = max

$\varphi(1) = 5 - 5 + 4 = 4$ = min

$5 - \frac{25}{8} + \frac{25}{16} = 5 - \frac{25}{16} = 5 - \frac{16+9}{16} =$

$= 5 - 1 - \frac{9}{16} = 4 - \frac{9}{16} = \frac{64-9}{16} = \frac{55}{16} =$

$= 3\frac{7}{16}$

N 3

$x_1 x_2 \ldots x_{11}$

$x' =$ „8888888"

$x_1 x_2 \ldots x' \ldots x_{11}$

$x_1 ; x_2 \ldots$

7

$x' \; x_1 \ldots x_{10}$

$1\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2 - 2 = 2^{10} - 2$

(варианты 7777777777 и 0000000000).

$x_1 \ldots x' \ldots x_{11}$

7

$7\cdot\boxed{1\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2} - 1 = 2^9 - 1$

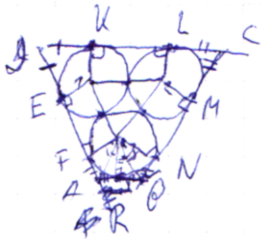
(вариант 777777777)

Всего 10 таких вариантов $\Rightarrow$ Общее кол-во: $2^{10} - 2 + 10(2^9 - 1) =$

$= 1024 - 2 + 10(512 - 1) = 1022 + 5110 = 6132$ варианта

N 4

а)



$AD + BC - AB - CD = 12$

$DE = DK$; $CL = CM$; $BR = BN$; $AF = AR$;

$\cancel{DE} + EF + \cancel{FA} + \cancel{BN} + MN + \cancel{CM} - \cancel{AR} - \cancel{BR} - \cancel{DK} - KL - \cancel{CL} = 12 \Rightarrow$

$EF + MN - KL = 12$

$EF = O_1O_3 = 2r$; $MN = O_2O_3 = 2r$; $O_1O_2 = KL = 2r$; $\Rightarrow 2r + 2r - 2r = 12 \Rightarrow r = 6$.

б) O_3R – высота $\triangle AO_3B$; $\angle FO_3A = \angle AO_3R$; $\angle NO_3B = \angle BO_3R \Rightarrow \angle FO_3N = 2\cdot(\angle AO_3B) = 360^\circ - 60^\circ - 2\cdot 90^\circ =$

$= 120^\circ \Rightarrow \angle AO_3B = 60^\circ$.

в) $OR = 6 = r$; $S_{\triangle AOB} = \frac{AB\cdot r}{2} = 3AB = \frac{AO\cdot BO}{2}\cdot\sin\angle AOB \Rightarrow 6AB = AO\cdot BO\cdot\sin\angle AOB \Rightarrow BO = \frac{3B}{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2B}{2\sqrt{3}}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-19

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$

ОДЗ:

$\begin{cases} x+7\geq 0; \\ \sqrt{x+7}-x>0 \\ \sqrt{x+7}-x\neq 1 \\ x+4>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq -7 \\ \sqrt{x+7}>x \\ \sqrt{x+7}\neq x+1 \\ x>-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-4 \\ x+7>x^2 \\ x+7\neq x^2+2x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-4 \\ x^2-x-7<0 \\ x^2+x-6\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-4 \\ x=\frac{1\pm\sqrt{29}}{2} \\ x\neq 2;-3 \end{cases}$

$\boxed{\sqrt{x+7}-x>0 \Rightarrow \sqrt{x+7}>x \Rightarrow x>0}$

$x+7>x^2 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{29}}{2}\approx\frac{1\pm5{,}3}{2}\approx 3{,}15;\ -2{,}15;$

$-3{,}15 \qquad 3{,}15$

$\Rightarrow \begin{cases} x>-4 \\ \left[\begin{cases}\sqrt{x+7}>0 \\ x\leq 0\end{cases}\right. \\ \left[\begin{cases}\sqrt{x+7}>x \\ x>0\end{cases}\right. \\ x\neq 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-4 \\ x\neq 2; \\ \left[\begin{array}{l} x\in[-7;0] \\ x> \frac{1+\sqrt{29}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow$

$-7 \quad -4 \quad -3 \quad 0 \quad 2 \quad \frac{1+\sqrt{29}}{2}$

$\boxed{x\in(-4;-3)\cup(-3;0]\cup\left(\frac{1+\sqrt{29}}{2};+\infty\right)}$ ОДЗ

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4)-\log_{\sqrt{x+7}-x}(\sqrt{x+7}-x)\geq 0 \Rightarrow \log_{\sqrt{x+7}-x}\left(\frac{x+4}{\sqrt{x+7}-x}\right)\geq 0 \Rightarrow$

$(\sqrt{x+7}-x-1)\left(\frac{x+4}{\sqrt{x+7}-x}-1\right)\geq 0 \Rightarrow (\sqrt{x+7}-x-1)\left(\frac{x+4-\sqrt{x+7}+x}{(\sqrt{x+7}-x)}\right)\geq 0 \Rightarrow \frac{(\sqrt{x+7}-x-1)(2x+4-\sqrt{x+7})}{(\sqrt{x+7}-x)}\geq 0$

$2x+4-\sqrt{x+7}=0 \Rightarrow 2x+4=\sqrt{x+7} \Rightarrow 4x^2+16x+16=x+7 \Rightarrow 4x^2+15x+9=0 \Rightarrow D=225-36\cdot 4=225-144=$

$x\geq -2$

$=81=9^2 \Rightarrow x=\frac{-15\pm 9}{8}=\frac{3}{4};-3$

$\sqrt{x+7}-x:$

$-7 \quad \frac{1-\sqrt{29}}{2} \quad 0 \quad \frac{1+\sqrt{29}}{2}$

$-2 \quad -3 \quad -\frac{3}{4}$

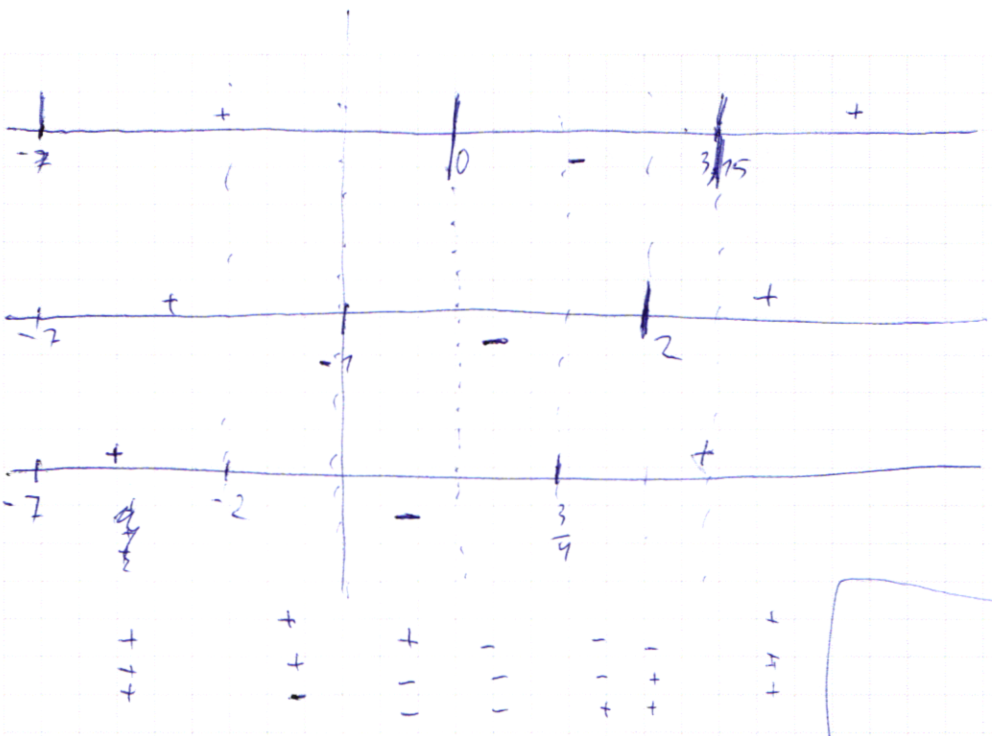
$x+1-\sqrt{x+7}=0 \Rightarrow x+1=\sqrt{x+7} \Rightarrow x\geq -1,\ x^2+2x+1=x+7 \Rightarrow x^2+x-6=0$ ~~$D=49-36=13 \Rightarrow x=\frac{-7\pm\sqrt{13}}{2}\approx\frac{-2\pm 3{,}5}{2}\approx -5{,}25;\ 2{,}25;$~~

$x=2;-3$

~~$-5{,}25 \quad -4 \quad -2{,}25$~~

$-3 \quad -1 \quad 2$

$93-47=$
$\begin{array}{r} -47 \\ 46 \end{array}$



$\sqrt{x+7}-x$

$\sqrt{x+7}-x-1$

$2x+4-\sqrt{x+7}$

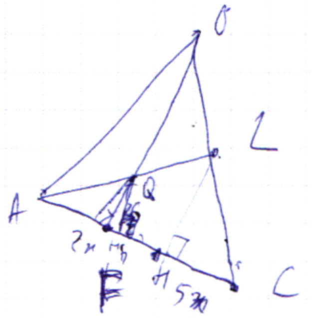
$940+$
$+740+$
$+185=$
$=785+280$

$\begin{array}{r} 780 \\ -785 \\ \hline 365 \\ \times 5 \\ \hline 1825 \\ +250 \\ \hline 2075 \end{array}$

$x \in [-1;0] \cup [\frac{3}{4};2] \cup [\frac{1+\sqrt{29}}{2};+\infty)$.

+ ОДЗ: $x \in (-4;-3) \cup (-3;0] \cup (\frac{1+\sqrt{17}}{2};+\infty)$ $\Rightarrow x \in [-1;0] \cup [\frac{1+\sqrt{29}}{2};+\infty)$.

№ 6

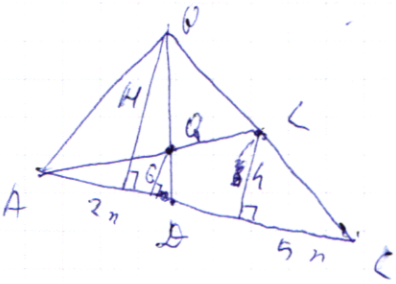


$\frac{S_{OQL}}{S_{AOC}} = \frac{5}{12}$

$\begin{array}{r} 12 \\ \times 42 \\ \hline 24 \\ 48 \\ \hline 504 \end{array}$ $\begin{array}{r} 12 \\ \times 14 \\ \hline 48 \\ 12 \\ \hline 168 \end{array}$

$\begin{array}{r} 24 \\ \times 6 \\ \hline 144 \end{array}$

$S_{ALC} = \frac{7x \cdot 6}{2} = 21x$



$S_{AOC} = \frac{7x \cdot H}{2}$; $S_{OQA} = \frac{2x \cdot H}{2} \cdot xH - 6h = x(H-6)$,

$S_{CQL} = \frac{7x \cdot h}{2} - \frac{2x \cdot 6}{2} = 7hx - x6 \Rightarrow S_{OQL} = S_{ODC} - S_{DQLC} =$

$= \frac{5xH}{2} - 7hx + x6 =$

$\frac{\frac{5xH}{2} - 7hx + 6x}{\frac{7xH}{2}} = \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{\frac{5H}{2} - 7h + 6}{\frac{7H}{2}} = \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{5H - 14h + 12}{7H} = \frac{5}{12} \Rightarrow 35H = 60H - 168h + 144 \Rightarrow$

$\Rightarrow 25H = \boxed{168 - 24h}$ $144 - 168h$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА