# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 класс

БИЛЕТ 1 ШИФР 9-24

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра $a$ из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса $\omega_1$, $\omega_2$ и $\omega_3$, причём $\omega_1$ касается сторон $AD$ и $DC$, $\omega_2$ касается сторон $DC$ и $CB$, а $\omega_3$ касается сторон $CB$, $BA$ и $AD$.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол $AOB$, где $O$ – центр окружности $\omega_3$.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите $AB$.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x + 4) \geqslant 1$.

6. Точки $F$ и $L$ лежат на сторонах $AC$ и $BC$ треугольника $ABC$ соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки $BF$ и $AL$ пересекаются в точке $Q$; площади треугольников $BQL$ и $BAC$ относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки $L$ до прямой $AC$, если расстояние от точки $Q$ до прямой $AC$ равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-24

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2).

$g(x) = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x) = 8\sin^2 x + \cos^2 5x + 4.$

$\cancel{g'(x) = \frac{1}{2}(-4\sin(4x) + 10}$

$2 \cdot 13 = 26$

$6 \cdot 14 = 60 + 24 = 84.$

$\frac{-6+26}{2} = 10$

3).

$\sqrt{29} =$

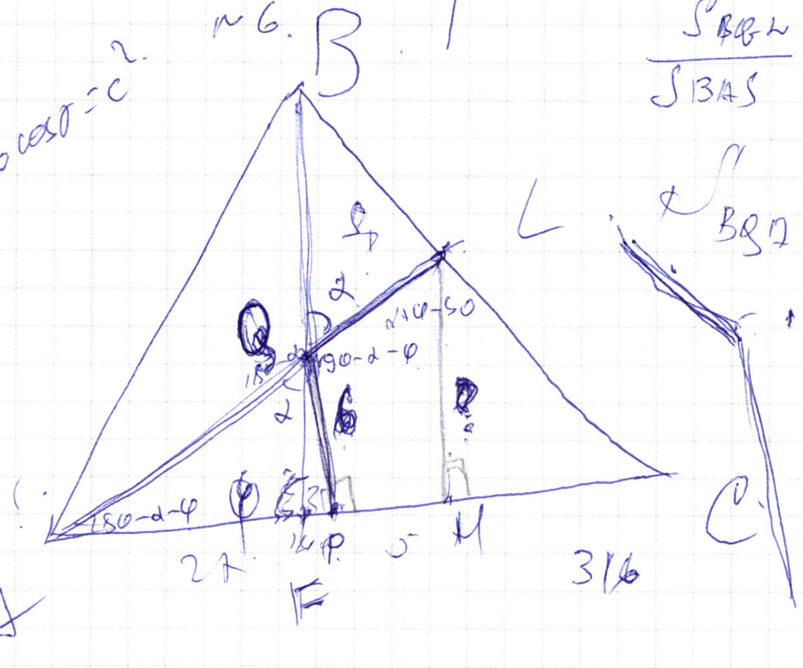
316 | 2
158 | 2
79

$\begin{array}{r} 156 \\ 84 \\ \hline 250 \end{array}$

№6.

$\frac{S_{BQL}}{S_{BAS}} = \frac{5}{12}$

$a^2 + b^2 - 2ab\cos = c^2$



$S_{BQD} = \frac{7}{12} S_{BFC}$

316 | 4
28 | 79
36
36

$\begin{array}{r} 16 \\ 16 \\ \hline 96 \\ 16 \\ \hline 256 \end{array}$

1. $\frac{S_{ABC}}{S_{BFC}} = \frac{2}{5} \Rightarrow S_{ABF} = \frac{2}{5} BFC$

$\frac{7}{5} S_{BFC} = S_{ABC}$

$S_{BEC} =$

$S_{BFC} = \frac{5}{7} S_{ABC}.$

$S_{ABF} = \frac{2}{7} S_{ABC}$

№1

$\begin{array}{r} 18 \\ 18 \\ \hline 144 \\ 18 \\ \hline 324 \end{array}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$196 = 2a + 36 + \cancel{2\cdot\tfrac{1}{2}}\cdot 6\sqrt{2a}$$

$$\frac{160\cdot 8}{1280}$$

$$2a - 160 + 6\sqrt{2a} = 0.$$

$$\cancel{D = 36 + 8\cdot 160} =$$

$$D = 36 + 8\cdot 160 = 4(9 + 2\cdot 160) = 4(9+320) = 4\cdot 329$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$2a + 36 + 2\cdot 6\cdot\sqrt{2a}\cdot\frac{1}{2} = 160.$$

$$2a + 6\sqrt{2a} - 160 = 0$$

$$t^2 + 6t - 160 = 0$$

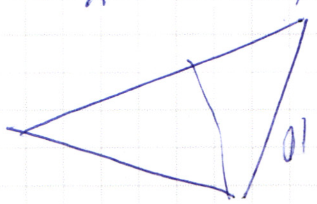
$$\begin{cases} t_1 + t_2 = -6 \\ t_1 t_2 = -160. \end{cases}$$

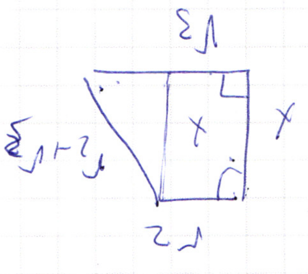
$$D = 36 + 4\cdot 160 =$$

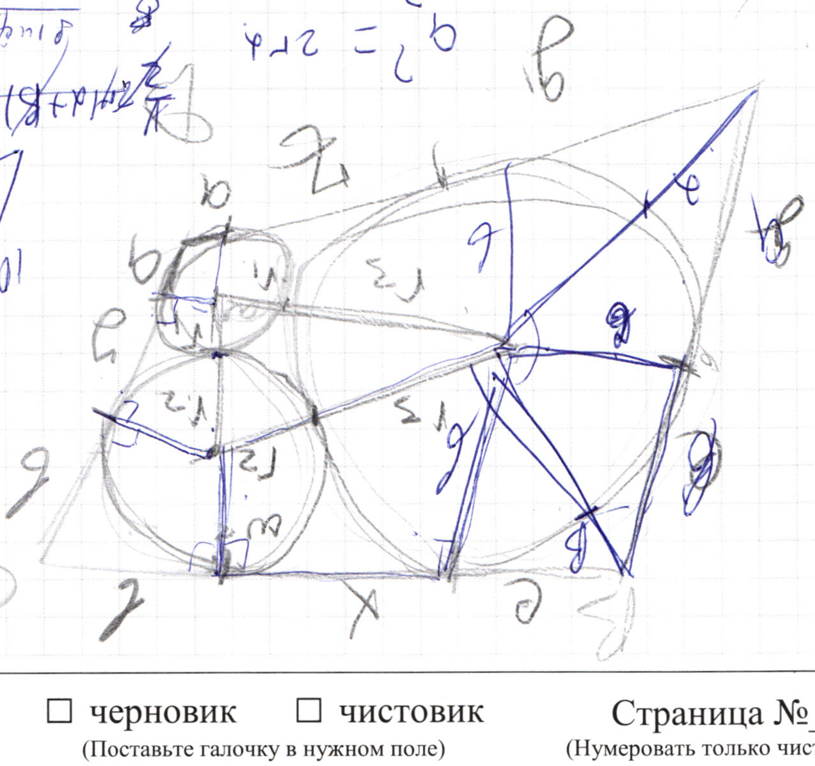
$$17 \cdot 17 = 119 + \dots = 289$$

$$160 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 5$$

$45^\circ,\ 90^\circ,\ 135^\circ,\ 180^\circ,\ 225^\circ$





ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

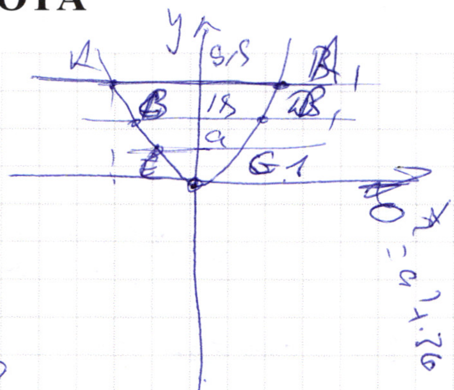
9-24

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1



Рассм. такие схемы:

1. ~~Пусть~~ $2y=2x^2$ пер. $y=98$ в т. $A(x_a; y_b)$ и $B(x_B; y_c)$ ? ?

1. $A, A_1$ - точки пересечения $y=2x^2$ и $y=98$, причём $A$ и $A_1$ симметр. отн. $OY$.

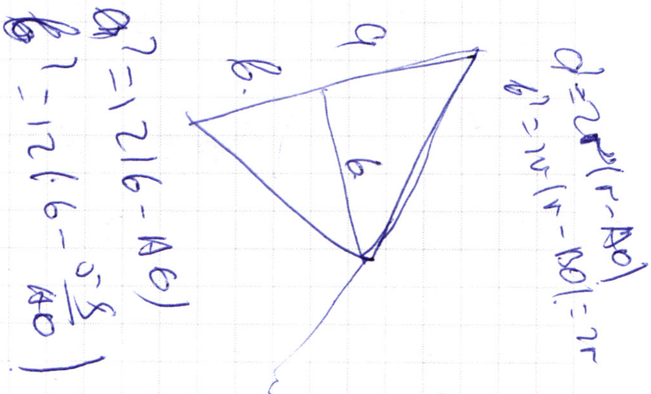
$2x^2=98$

$x^2=49$

$x=\pm 7 \Rightarrow x_A=-7,\ x_{A_1}=7.$

$y_A=y_{A_1}=98.$

$|AA_1|=14.$



2. Анализ для $BB_1$: $y=18$ и $y=2x^2$.

$2x^2=18$

$x=\pm 3$

$|BB_1|=6.$

$y_B=y_{B_1}=18$

3. Так для $a$ ($a>0$ по условию)

$\begin{cases} 2x^2=a \\ x=\pm\sqrt{\frac{a}{2}} \end{cases}$

$|CC_1|=\sqrt{2}\sqrt{a}=\sqrt{2a}$

4. Попробуем подобие тр-в.

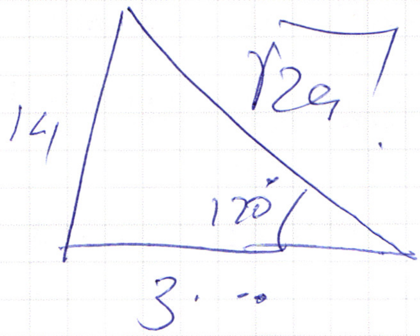
4.1. Пусть наибольшая сторона равна 14.

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 3

(Нумеровать только чистовики)




$187 \cdot 8 = 1496$
$1496 + 18 = 1514$
$1514 : 2 = 757$
$14 \cdot 14 = 196$
1523

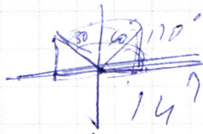
По т. косинусов: $196 = 9 + 2a + 3\sqrt{2a}$

$2a + 3\sqrt{2}\sqrt{a} - 187 = 0$

Решаем отн. $\sqrt{a}$ $(\sqrt{a} \geq 0)$

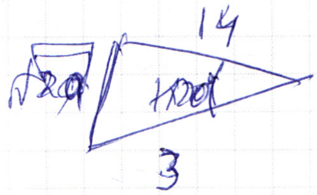
~~$D = 18 + 8 \cdot 187 =$~~

$D = 9 + 8 \cdot 187 =$




$14^2 = 196$

a




$\cos^2 60 - \sin^2 60 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$

$2a = 196 + 9 + 42 = 205 + 42 = 247$

$a = \frac{247}{2} = 123{,}5 \approx 11^2$

$\sqrt{2a} \approx \sqrt{247} \approx$

$\frac{1}{2} r(a+b) = \frac{1}{2} r^2 \sin\varphi$

$a + b = r \sin\varphi$

$\frac{58}{\sqrt{a^2+36}} = \sqrt{b^2+36}$

21

$\frac{1}{2} r(a+b) = \frac{1}{2} \sin\varphi \cdot 5S$

$58 = \sqrt{a^2 b^2 +}$

$r^2 \sin^2\varphi =$

$ab = \quad b = r\sin\varphi \cdot a$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

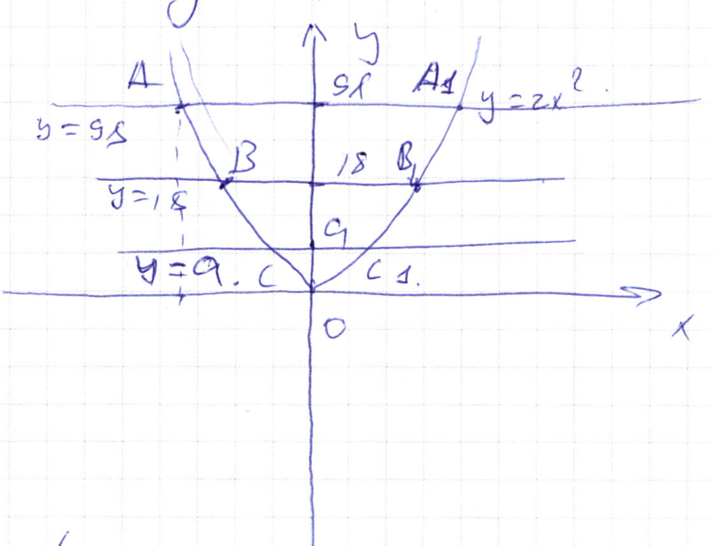
9-24

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача № 1.




Заметим, что:

а) A, B, C соотв. симметричны $A_1, B_1, C_1$ отн. OY.

б) $a>0$.

1. Рассмотрим пересеч. $y=98$ и $y=2x^2$

$2x^2=98$

$x=\pm 7$.

т.е. $A(-7;98)$, $A1(7;98)$

$|AA1|=14$

2. Ана

$(a+b)^2 = AO^2+BO^2-2AO\cdot BO\cdot\cos\alpha$

$BO^2 = b^2+r^2$

$AO^2 = (a^2+r^2)$

$\frac{1}{2}$ (

$\cancel{x}^{2}y^{2}, = 2\,4\,4$

0 2

1 · 2 · ~~1~~

$x+7 = 1+x^2-2x$

$x^2-3x-6=0$

$D = 9+24 = 33$

$x_1 = \frac{3+\sqrt{33}}{2}$

$x_2 = \frac{3-\sqrt{33}}{2}$

200    00

220    02

202    20

0, 2.

~~2~~ · 2   2   1

121

2 0 0 0

2 0 0 2

2 0 2 2

2 2 0 0

$x^2 - x - 7 > 0$

$D = 1+28 = 29$

$x_1 = \frac{1+\sqrt{29}}{2}$

$x_2 = \frac{1-\sqrt{29}}{2}$

$x > \frac{1+\sqrt{29}}{2}$

$x+7 > x^2$

$\sqrt{x+7} > x$

1.1. ~~Когда~~ $x \in (-4; 0]$ (3) - ...

$\log_{\sqrt{x+2}} x(x+4) \geq 1$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x \geq -7 \\ x > -4 \\ \sqrt{x+2} > x \end{cases}$$

$\sqrt{x+7} \neq 1+x$

$x > -4$

$\sqrt{x+1} > x$ (3)

$\beta = \frac{b^2}{2r}$

$\alpha = \frac{a^2}{2r}$

$(a+b)^2 = \left(\frac{b^2}{2r}+r\right)^2 + \left(\frac{a^2}{2r}+r\right)^2 - 2\cos\varphi$

$b = \sqrt{2\beta r}$

$a = \sqrt{2\alpha r}$

$$\begin{cases} 2r(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2 = (\alpha+r)^2+(\beta+r)^2-2(\alpha+r)(\beta+r)\cos 6 \\ 2r(\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}) = \end{cases}$$

☐ черновик     ☐ чистовик     Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле)     (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-24

ШИФР

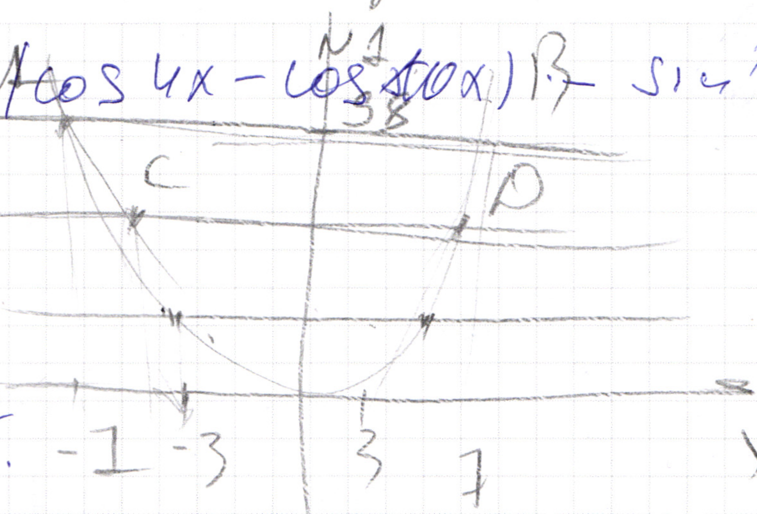
(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$g(x) = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x))$ $\sin^2 x + \cos^2 x + 4 =$

$= \frac{1}{2}(\cos$



$2rp = b^2$

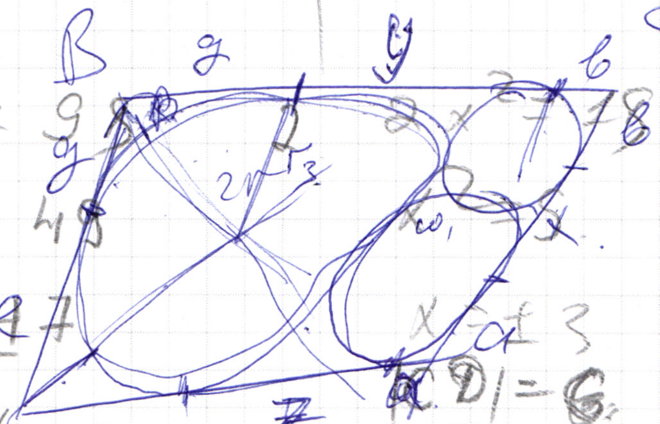
$2r\alpha = a^2$

$\alpha = \frac{a^2}{2x} = 9$

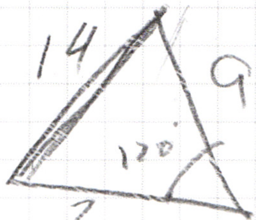
$\beta = \frac{b^2}{2x} = 49$

$x = 17$

$|AB| = 14$



$|CD| = 6$



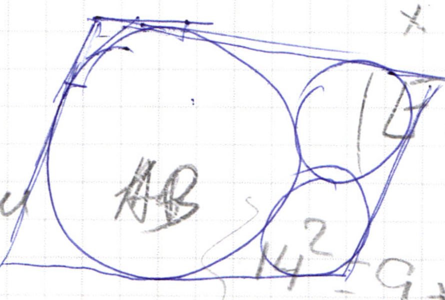
$x^2 = \frac{9}{2}$

$x = \pm\sqrt{\frac{9}{2}}$

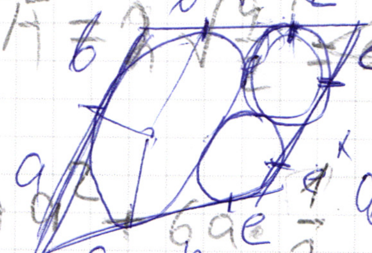
$4\sin^2 x < 1$

$\sin^2 x < \frac{1}{2}$

1. Если



$14^2 - 9 + 9$



$\frac{1}{2}$ $\cos x - \sin^2 2x$

$(a+b)^2 = (\frac{b^2}{2r} + r)^2 +$

$-\sin 2x - \sin 4x$

$g'(x) = -2\sin x \cos x / 1 = 4$

$-2\sin^2 x(1 - 4\sin^2 x) +$

$+ \cos^2 x)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1

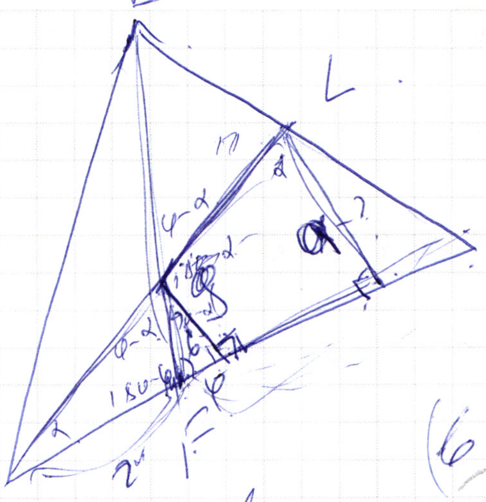
(Нумеровать только чистовики)

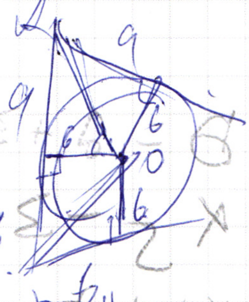
1. $\frac{S_{ABF}}{S_{BFC}} = \frac{2}{5}$

$S_{ABF} = \frac{2}{5} S_{BFC}$

$\frac{7}{5} S_{BFC} = S_{ABC}$

$S_{BGL} = \frac{7}{12} S_{ABC}$



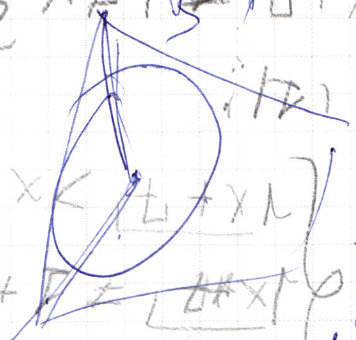


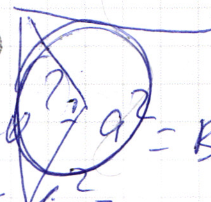
$AO^2 = a^2+36$

$BO^2 = b^2+36$

$\frac{1}{2} AO\cdot BO \sin\varphi = \frac{1}{2} R(a+b)$

$2\cdot 9\cdot \sin\varphi = \frac{1}{2}(a+b)$





$AO^2 - a^2 = BO^2 - b^2$

$a^2 - b^2 =$

$AO\cdot BO$

$\cancel{a^2+r^2+b^2+r^2 - 2\cdot 5\cdot 8\cdot \cos\varphi = a^2+b^2+2ab}$

$ab = r^2 - 5\cdot 8\cos\varphi$

$a^2+b^2$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-24

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$

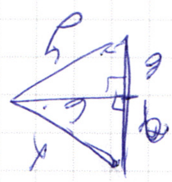
1. ОДЗ

$\begin{cases} \sqrt{x+7}-x > 0 \\ \sqrt{x+7}-x \neq 1 \\ x+4 > 0 \\ x \geq -7 \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt{x+7} > x \\ \sqrt{x+7} \neq 1+x \\ x > -4 \end{cases}$ $\begin{cases} x \neq \frac{3+\sqrt{33}}{2} \\ x \neq \frac{3-\sqrt{33}}{2} \\ \sqrt{x+7} > x \\ x > -4 \end{cases}$

2. При $x \in (-4; 0]$ $\sqrt{x+7} > x$ и $\sqrt{x+7}-x > 1$.

Поэтому: $x+4 > \sqrt{x+7}-x$

$2x+4 > \sqrt{x+7}$



$x^2 = 9^2+36$

$y^2 = 6^2+36$

$xy = 58$

$x^2+y^2$

$x^2 = 9^2+36 = \cancel{144}\cdot(12-x)$

$a^2 = 2r($

$x^2 = 144-12x$

$x^2+12x-144=0$

$x_1+x_2=-12$ ; $D=144+4\cdot144=$

$x_1x_2=$

$=$

$b^2 = \cancel{2}\, r(ABO-2r)$

$a^2 = 2r(AO-2r)$

$a^2+b^2+2ab =$

~~$b^2 = 2r+40$~~

$240+r$

$a^2+b^2+a^2-2ab\cos\varphi = a^2+b^2+2ab$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

11. [illegible] - 8.  $\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot 1$

Осталь 10 позиций.

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 2 |
| 1 | 1 | 2 |

$\sqrt{x+7} - \cancel{x} > 1$

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq \log_{\sqrt{x+7}-x}\sqrt{x+7} - x$.

Если $\sqrt{x+7} - x > 1$, то $x+4 \geq \sqrt{x+7} - x$.

$2x+4 \geq \sqrt{x+7}$

$x \geq -2$:

$4x^2+16-16x \geq x+7$

$4x^2 - 17x + 9 \geq 0$

$D =$

$b^2 = 2r(BO - r)$

$a^2 = 2r\left(\frac{5\sqrt{5}}{BO} - r\right)$

$a^2+b^2 = 12\left(\frac{BO^2+5\sqrt{5}}{BO} - 12\right)$.

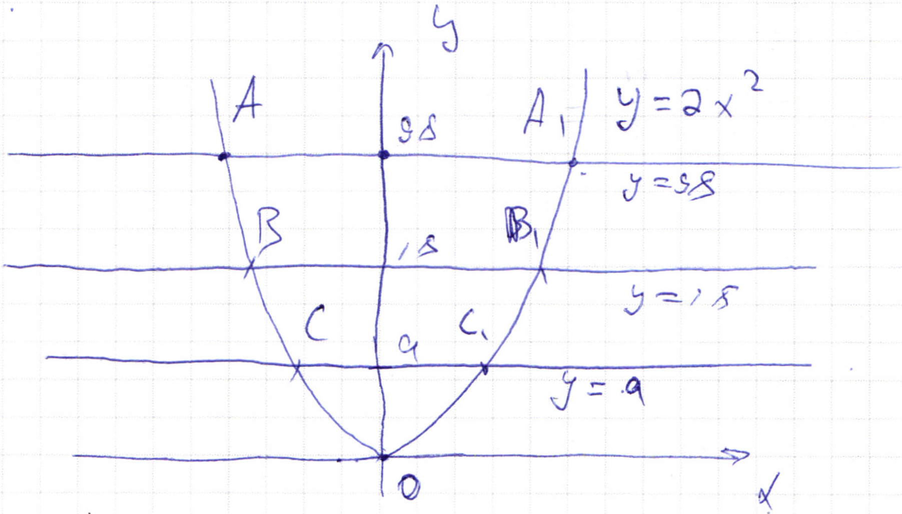
$a+b = \sqrt{12r}$; $ab^2 = 4r^2 / 5\sqrt{5} - BO - \frac{5\sqrt{5}}{BO} + 36$

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

## Задача 1.

1). Схематически изобразим „наши" прямые и параболу в Декартовой системе координат:




Учтём, что $a > 0$ (т.к. если $a<0$, то ~~y=~~ $y=a$ вообще не имеет общ. точек с $y = 2x^2$, если $a = 0$, то $y=a$ и $y = 2x^2$ касаются, а из одной точки отрезка не составить)

2). Пусть $AA_1$ – отрезок, отсекаемый на $y=98$, $BB_1$ — на $y=18$, $CC_1$ — на $y=a$.

Заметим, что $A, B, C$ симметричны $A_1, B_1, C_1$ соответственно отн. $OY$.

Рассмотрим по отдельности пересечение каждой прямой с данной параболой.

2.1. $2x^2 = 98$ — $y = 98$ и $y = 2x^2$

$x = \pm 7$. $(x_A = -7,\ x_{A_1} = 7)$

$|AA_1| = 14$.

2.2. $2x^2 = 18$ — $y = 18$ и $y = 2x^2$

$x = \pm 3$.

$|BB_1| = 6$

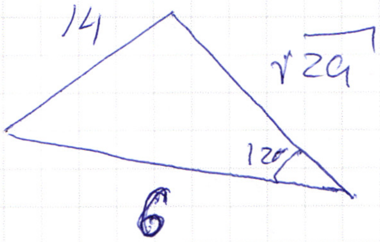
2.3. $2x^2 = a$ — $y = a$ и $y = 2x^2$

$x = \pm\sqrt{\frac{a}{2}}$.

$|CC_1| = 2\sqrt{\frac{a}{2}} = \sqrt{2a}$.

3. Составим возможные треугольники из отрезков $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$.

3.1. Пусть наибольшая сторона равна 14.




Запишем теорему косинусов для этого треугольника.

$2a + 36 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{2a} = 196$

$2a + 6\sqrt{2a} - 160 = 0$

Решим получ. кв. уравнение отн. $\sqrt{2a}$

$D = 36 + 4\cdot 160 = 4\cdot 169 = 26^2$

$\left[\begin{array}{l} \sqrt{2a} = 10 \\ \sqrt{2a} = -\frac{32}{2} < 0. \end{array}\right.$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sqrt{2a} = 10.$ Проверим, вып. ли неравенство треугольника:

$2a = 100.$

$a = 50.$

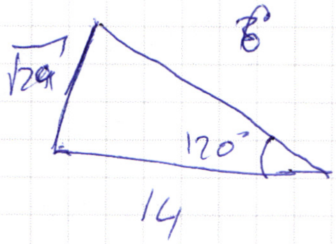
$6 + 10 = 16 > 14$

$14 + 6 = 20 > 10.$

$10 + 14 = 24 > 6.$

т.е. первое возм. знач. $a = 50.$

3.2. Пусть теперь наибольшая сторона равна $\sqrt{2a}$.




Решение этой ситуации аналогично предыдущей.

$2a = 196 + 36 + 6 \cdot 14 = 196 + 36 + 84.$

$2a = 316 \quad \sqrt{2a} = 2\sqrt{79} \approx 18.$

$a = 158.$

~~Однако~~ Проверим вновь нер-ва $\triangle$-ка:

$2\sqrt{79} + 14 > 6$ - очевидно

$2\sqrt{79} + 6 > 14$

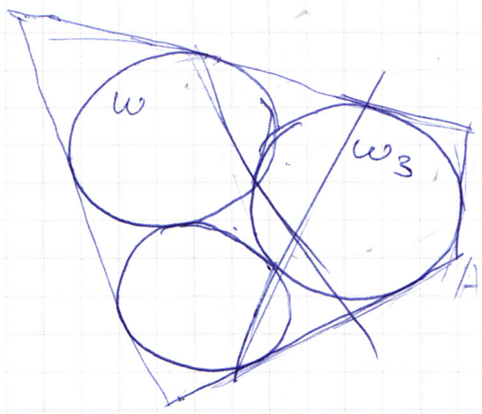
$6 + 14 = 20 > 2\sqrt{79}.$

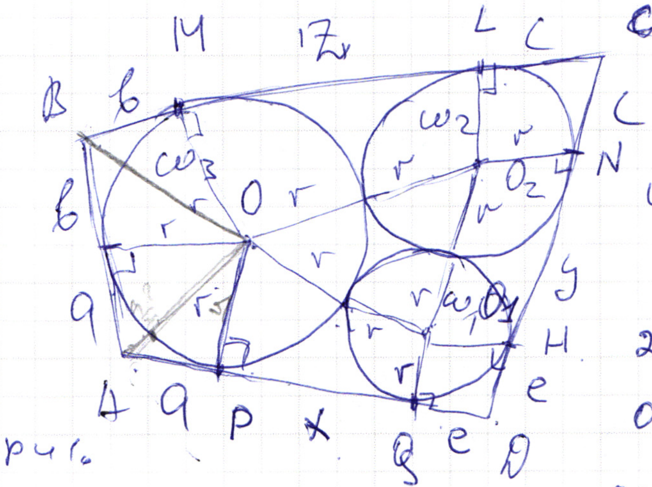
Итого: $a = 158$ либо $a = 50$

Ответ: $a = 50$, $a = 158$.

## Задача №4.

Решение




1. Пусть радиусы $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ равны $r$.

2. Используя теорему о касательных к окружности, исх. из одной точки для $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ и обозначения на моём рисунке, перепишем данное по условию задачи равенство след. образом:

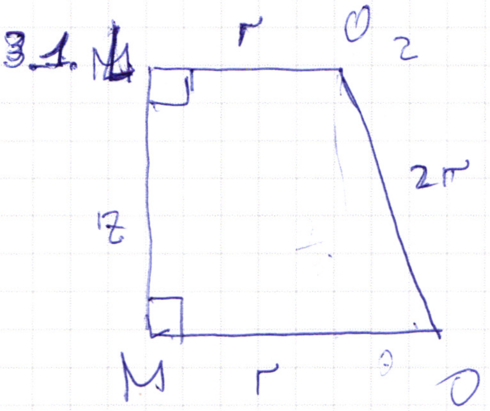
$$\cancel{a}+x+\cancel{e}+\cancel{b}+z+\cancel{c}-\cancel{a}-\cancel{b}-\cancel{c}-y-\cancel{e}=12.$$

$$x+z-y=12.$$

3. Заметим и рассмотрим след. прямоугольные трапеции:

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3.1.




Т.к. $LO_2 = MO = r$, отсюда же, что $LM = O_2O \Rightarrow z = 2r$.

и $MLO_2O$ - прямоуг.

3.2. Точно так и для $O_2O$, $MN$, $OPQO_1$:

$y = 2r$, $x = 2r$.

Итого:

$2r = 12$

$\underline{r = 6}$ - ответ на первый вопрос задачи.

4. По т. Пифагора:

$AO^2 = a^2 + r^2$

$BO^2 = b^2 + r^2$.

Запишем теор. косинусов для $\triangle ABO$:

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2r^2 - 2 \cdot AO \cdot BO \cdot \cos\varphi$.

$a^2 + b^2 + 2ab = a^2 + b^2 + 2r^2 - 2 \cdot 58 \cos\varphi$

$2ab = 72 - 116 \cos\varphi$

6) По т. Пифагора, а также т. о секущей, кас. из одной точки к окр-ности имеем т-ме.

$$\begin{cases} b^2 = 2r(BO-r) \\ a^2 = 2r(AO-r) \\ b^2 = BO^2 - r^2 \\ a^2 = AO^2 - r^2 \end{cases}$$

6.1 $BO^2 - r^2 = 2r \cdot BO - 2r^2$

$BO^2 - 12BO + 36 = 0.$

$(BO-6)^2 = 0$

$BO = 6.$

6.2. $AO^2 - 36 = 12AO - 72.$

$AO^2 - 12AO + 36 = 0.$

$AO = 6.$

$\frac{1}{2} BO \cdot AO \cdot \sin \widehat{AOB} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (a+b).$

$\frac{29}{6} \sin \widehat{AOB} = a+b.$

$$\begin{cases} AO^2 + BO^2 - 2 \cdot AO \cdot BO \cdot \cos \widehat{AOB} = (a+b)^2 \\ AO^2 = a^2 + 36 \\ BO^2 = 6^2 + 36. \end{cases}$$

$\frac{29}{6} \cdot \sin \widehat{AOB} = a+b$

$a^2 + b^2 + 72 - 2 \cdot 58 \cdot \cos \angle AOB = a^2 + b^2 + 2ab$

$72 - 116 \cdot \cos \angle AOB = 2ab$

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №3.

Решение

1. Рассмотрим случай, когда восьмерка заним первые семь позиций. Остальные 10 позиций и в таком случае у нас возможно $2^9$ чисел.

2. Во всех иных случаях для первой позиции всегда будет семерка. Тогда нам остается пос для 9-14 позиции: $2^{9-1} = 2^8$. Таких сим всего 11.

3. Итого всего: $2^9 + 2^8 \cdot 11$ чисел $= 2^8 \cdot 13$.

Отв: $13 \cdot 2^8$.

Задача № 5?

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$.

1. ООЗ:

$$\begin{cases} x \geq -7 \\ x \geq -4 \\ \sqrt{x+7} > x \\ \sqrt{x+7} \neq 1+x \end{cases}$$

2. Когда $x \in [-4; 0]$, $\sqrt{x+7} - x > 1$:

$x+4 \geq \sqrt{x+7} - x$

$4x^2 + 32x + 16 \geq x + 7$

$4x^2 + 31x + 9 \geq 0$.

2). Рассм $x \in (-4;0)$: $\sqrt{x+7} - x > 1$.

$x+4 \geq \sqrt{x+7} - x$.

$2x+4 \geq \sqrt{x+7}$.

$4x^2+16x+16 \geq x+7$.

$4x^2+15x+9 \geq 0$.

Для соотв. кв. у: $D = 225-16\cdot 9 = 225-144 = 81$.

$x_1 = \frac{-15+9}{8} = -\frac{6}{8} = -\frac{2}{3}$.

$x_2 = -\frac{22}{8} = -\frac{11}{3}$.

$x \in (-4; -\frac{11}{3}) \cup (-\frac{2}{3}; 0]$.

3). корни к ООЗ:

$\sqrt{x+7} \neq 1+x$

$x+7 \neq 1+x^2+2x$.

$x^2+x-6 \neq 0$.

Для соотв к.у: $D = 1+24 = 25$.

$x_1 = \frac{-1+5}{2} = 2$

$x_2 = -3$.

т.е. $x \neq 2$, $x \neq -3$.

4) При $x>0$ $\sqrt{x+7} - x > 1$:

$x+7 > 1+x^2+2x$.

$x^2+x-6<0$.

$x \in (0;2)$.

5). При $x>2$.

$x+4 < \sqrt{x+7} - x$.

$(2x+4)^2 < x+7$.

$4x^2+16x+16 < x+7$

$4x^2+15x+9<0$.

$x \in$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-24

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: $x = 17$, $x \neq -3$, $x \in (-4; -\frac{11}{3}) \cup (-\frac{2}{3}; 2]$.

Задача 2

Решение.

$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

$g(x) = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x) - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

$g(x) = \frac{1}{2}\cos 4x - \cos^2 5x - \frac{1}{2} - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

$g(x) = \frac{1}{2}\cos 4x - \sin^2 x + 3{,}5$

$g(x) = \frac{1}{2} - \sin^2 2x - \sin^2 x + 3{,}5$.

$g(x) = 3 - \sin^2 2x - \sin^2 x$

$g(x) = \cos^2 x - \sin^2 2x = \cos^2 x - 4\sin^2 x \cdot \cos^2 x$.

$g(x) = \cos^2 x(1 - 4\sin^2 x) = \cos^2 x - \cos^2 2x$.

Заметим, что досм. - точки чист.

$g'(x) = -\sin 2x - 2\sin 4x = 0$.

$\sin 2x + 4 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x = 0$.

$\sin 2x(1 + 4\cos 2x) = 0$.

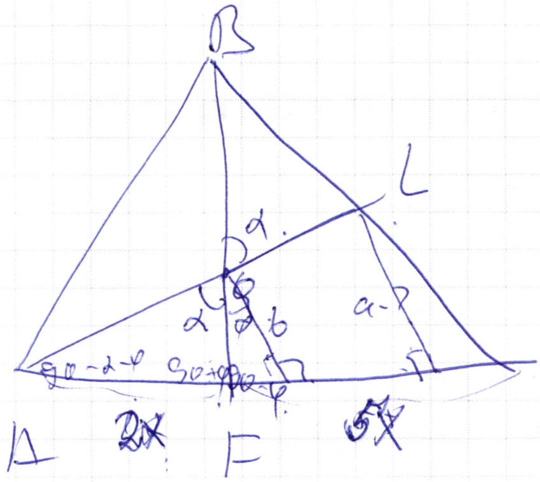
$\left[\begin{array}{l} x = 0 + \frac{1}{2}\pi k,\ k \in \mathbb{Z} - \text{мин.} \\ x = \pm\frac{1}{2}\arccos(\frac{1}{4}) + \pi l,\ l \in \mathbb{Z} - \text{мах.} \end{array}\right.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$ - минимум

$x = \pm\frac{1}{2}\arccos(\frac{1}{4}) + \pi l, l \in \mathbb{Z}$ - макс

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№6.




1. $\dfrac{S_{ABF}}{S_{BFC}} = \dfrac{2}{5}$

$\dfrac{S_{BQL}}{S_{ABC}} = \dfrac{5}{12}$

$S_{ABC} = \dfrac{7}{5} S_{BFL}$

$S_{ABC} = \dfrac{12}{5} S_{BQL}$

$\dfrac{7}{5} S_{BFL} = \dfrac{12}{5} S_{BQL}$

$S_{BQL} = \dfrac{7}{12} S_{BFL}$

2)