

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО  
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2

ШИФР

15-001

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола  $y = x^2$  пересекает прямые  $y = 169$ ,  $y = 64$  и  $y = a$ , высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра  $a$  из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом  $120^\circ$ ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$ .
3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник  $ABCD$ . Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ , причём  $\omega_1$  касается сторон  $AD$  и  $DC$ ,  $\omega_2$  касается сторон  $DC$  и  $CB$ , а  $\omega_3$  касается сторон  $CB$ ,  $BA$  и  $AD$ .
  - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что  $AD + BC - AB - CD = 10$ .
  - б) Найдите угол  $AOB$ , где  $O$  – центр окружности  $\omega_3$ .
  - в) Пусть дополнительно известно, что  $AO \cdot BO = 42$ . Найдите  $AB$ .
5. Решите неравенство  $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$ .
6. Точки  $F$  и  $L$  лежат на сторонах  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  соответственно, причём  $AF : FC = 3 : 4$ . Отрезки  $BF$  и  $AL$  пересекаются в точке  $Q$ ; площади треугольников  $BQL$  и  $BAC$  относятся как  $1 : 16$ . Найдите расстояние от точки  $L$  до прямой  $AC$ , если расстояние от точки  $Q$  до прямой  $AC$  равно 9.
7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка  $[1; 35]$ ,  $[36; 70]$ ,  $[71; 105]$ ,  $[106; 140]$ ,  $[141; 175]$ . Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1.

Дано:  $\angle = 120^\circ$

$$y = x^2$$

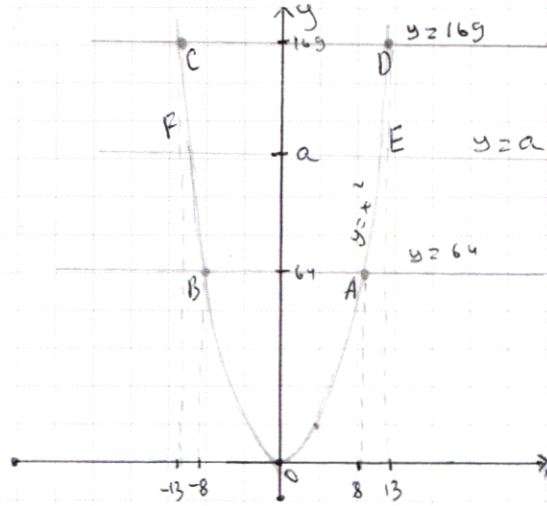
$$y = 169$$

$$y = 64$$

$$y = a$$

$$a = ?$$

Решение  
 $C(-13; 169)$   
 $D(13; 169)$   
 $A(8; 64)$   
 $B(-8; 64)$



$$\Rightarrow CD = 26$$

$$AB = 16$$

$\triangle ABC$  ( $a = 26; b = 16; \angle = 120^\circ$ ),  $c = ?$  ( $c = FE$ ),  $F(-x; a)$  и  $E(x; a)$ , где  $a = (x)^2$

По теореме косинусов  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$

$$c^2 = 26^2 + 16^2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 26 \cdot 16 =$$

$$= 26^2 + 16^2 + 26 \cdot 16 = 1348, \text{ то есть } c = FE = \sqrt{1348}$$

Т.к.  $y = x^2$  - четная функция (симметрична относительно  $Oy$ ), то

$$F\left(-\frac{\sqrt{1348}}{2}; a\right) \text{ и } E\left(\frac{\sqrt{1348}}{2}; a\right), \text{ а т.к. } a = x^2 = \left(\frac{\sqrt{1348}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1348}{4} = 337.$$

Ответ:  $a = 337$

Задача 3.

Дано:  $n$  - кол-во возможных чисел

$$n = 18$$

$$x = 0$$

$$y = 5$$

$$z = 9$$

Решение:

Т.к.  $n = 18$ , а нулевые кол-во единиц подряд  $y = 6$ , то значащие кол-во вариантов одного только перестановки чисел  $5 = 60$  (не учитывая оставшиеся цифры).

$18 - 6 = 12$  (кол-во чисел для оставшихся чисел  $x$  и  $z$ ), кол-во перестановок которых равно  $2^{12} = 64^2 = 4096$ . То есть общее возможное кол-во возможных чисел  $= 4096 \cdot 60 = 245760$

Ответ: 245760

Задание 5.

$$\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) \geq 1$$

По св-ву логарифма данное неравенство распадается на 2 случая:

$$1) \begin{cases} \sqrt{x+3}-x \geq 1 & (1) \\ x+5 > 0 & (2) \\ \sqrt{x+3}-x \leq x+5 & (3) \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sqrt{x+3}-x > 0 & (1) \\ \sqrt{x+3}-x < 1 & (2) \\ x+5 > 0 & (3) \\ \sqrt{x+3}-x \geq x+5 & (4) \end{cases}$$

1.1  $\sqrt{x+3}-x \geq 1$

$$\sqrt{x+3} \geq 1+x$$

$$\begin{cases} 1+x \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \\ x+3 \geq 1+2x+x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq -3 \\ x^2+x-2 \leq 0 \end{cases}$$

$$x^2+x-2 \geq 0$$

По Th. Виета  $x_1 = -2$ ;  $x_2 = 1$



$$x \in [-2; 1]$$



$$x \in [-3; +\infty)$$

1.2.  $x > -5$   $x \in (-5; +\infty)$

1.3.  $\sqrt{x+3}-x \leq x+5$

$$\sqrt{x+3} \leq 2x+5$$

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 2x+5 \geq 0 \\ x+3 \leq 4x^2+20x+25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -3 \\ x \geq -2,5 \\ 4x^2+19x+22 \geq 0 \end{cases}$$

$$4x^2+19x+22 \geq 0$$

По Th. Виета  $x_1 = 2,5$ ;  $x_2 = -2$



$$x \in (-\infty; -2] \cup [2,5; +\infty)$$

$$x \in [-2, 5; +\infty)$$

1)  $x \in \{2\}$

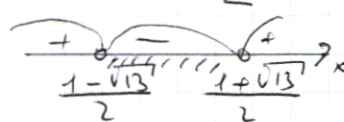
2.1.  $\sqrt{x+3} > x$

$$\begin{cases} x+3 > x^2 \\ x+3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-x-3 < 0 \\ x \geq -3 \end{cases}$$

$$x^2-x-3 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 3 = 13$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$



$$x \in \left( \frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right)$$

$$x \in [-3; +\infty)$$

$$x \in \left( \frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right)$$

2.2.  $\sqrt{x+3} < 1+x$

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 1+x \geq 0 \\ x+3 < 1+2x+x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \geq -1 \\ x^2+x-2 > 0 \end{cases}$$

$$x^2+x-2 > 0$$

По Th. Виета  $x_1 = -2$ ;  $x_2 = 1$



$$x \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$$

$$x \in [-3; +\infty)$$

$$x \in [-1; +\infty)$$

$$x \in (1; +\infty)$$

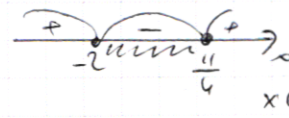
2.3.  $x > -5$ ;  $x \in (-5; +\infty)$

2.4.  $\sqrt{x+3}-x > x+5$

$$\sqrt{x+3} \geq 2x+5$$

$$x+3 \geq 4x^2+20x+25$$

$$\begin{cases} 4x^2+19x+22 \leq 0 \\ x \geq -3 \\ x \geq -2,5 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -2,2; x_2 = 1,25$$



$$x \in [-2,2; 1,25]$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ:  $x \in \{2\} \cup \left(1, \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$

Задача 7.

$[1; 35]$ ,  $[36; 70]$ ,  $[71; 105]$ ,  $[106; 140]$ ,  $[141; 175]$

Сумма чисел должна быть наименьшей, следовательно, сами слагаемые должны быть наименьшими из возможных.

Составим один ряд чисел (по одному из каждого промежутка):

~~$x_1 = 1; x_2 = 37; x_3 = 73; x_4 = 109; x_5 = 145$~~

$x_1 = 1; x_2 = 37; x_3 = 73; x_4 = 110; x_5 = 146$  (разница между последующими двумя числами равна 36)

Составим второй ряд, из 5 чисел. Взяв числа 2, 3, 5, 6 и числа  $35+3, 35+7, 35+5, 35+6$

$x_1 = 4; x_2 = 39; x_3 = 74; x_4 = 109; x_5 = 144$

$x_1 = 1; x_2 = 37; x_3 = 73; x_4 = 109; x_5 = 143$

Тогда второй ряд примет форму:

$y_1 = 5; y_2 = 41; y_3 = 78; y_4 = 114; y_5 = 148$

Третий ряд:

$z_1 = 9; z_2 = 46; z_3 = 82; z_4 = 118; z_5 = 152$

Четвертый ряд:

$a_1 = 13; a_2 = 50; a_3 = 86; a_4 = 122; a_5 = 156$

Пятый ряд:

$b_1 = 17; b_2 = 54; b_3 = 90; b_4 = 126; b_5 = 160$

Сумма чисел первого ряда  $= 363$  и с каждым рядом будет увеличиваться на 20, то есть общая сумма будет равна:

$$S = 363 \cdot 5 + 20 + 40 + 60 + 80 = 363 \cdot 5 + 200 = 1815 + 200 = 2015.$$

Ответ:  $S_{\text{мин}} = 2015$ .





### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2.  $[1; 35], [36; 70], [71; 105], [106; 140], [141; 175]$

5 5 5 5 5  
x y z a b

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$

S-координаты?

$\frac{a^2}{32}$

1-36x  $\times 2 \rightarrow 38$   
 $1: 37, 73, 107, 141$   
 $2: 37$   
 $3: 38$   
 $4: 39$   
 $5: 39$

$2: 37$   
 $3: 38$   
 $4: 39$   
 $5: 39$

$3: 73, 109, 143$   
 $4: 73, 109, 143$   
 $5: 73, 109, 143$

$4: 41, 75, 111, 145$   
 $5: 41, 75, 111, 145$

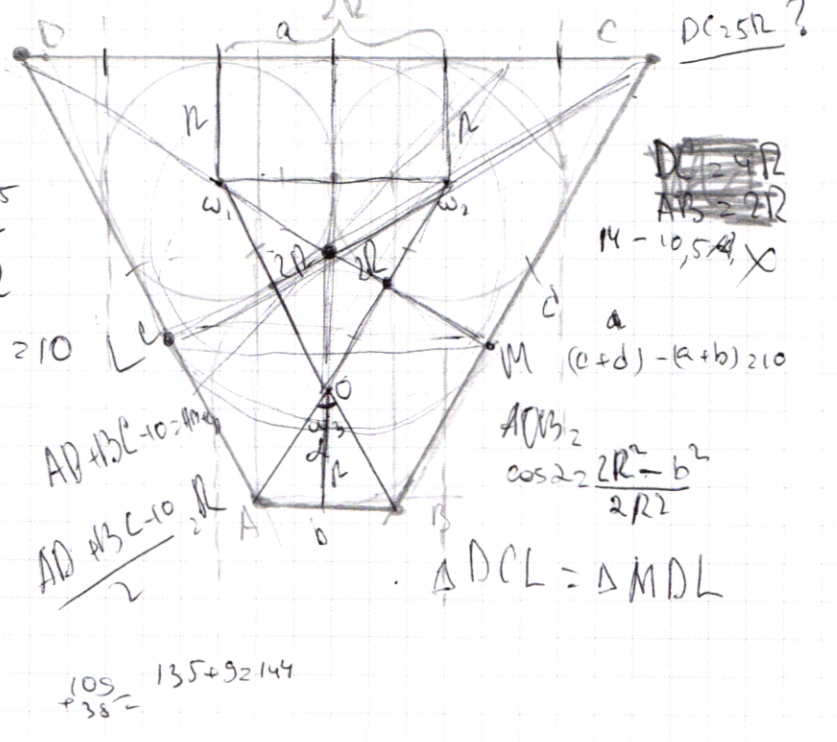
$7: 43, 77, 113, 147$   
 $9: 45, 79, 115, 149$

$357 + 2 \cdot 5$   
 $357 + 4 \cdot 5$   
 $357 + 8 \cdot 5$   
 $357 + 16 \cdot 5$

$357 + 32 = 389 \cdot 5 = 1945$

$5 \cdot 357 + 5(2+4+8+16) = 5(357+32) = 1945$

3. ABCD - четырехугольник



$w_1 - \text{сир}$   
 $w_2 - \text{сир}$   
 $w_3 - \text{сир}$

$R = ?$

$(AD+BC) - (AB+CD) = 10$

$AD \cdot BC = 10$

$AB = ?$

$105$

26



$$\frac{S_{ABC}}{S_{BQL}} = \frac{16}{1}$$

ML - ?

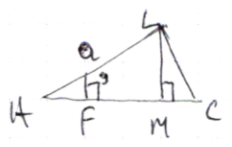
QE = ?

E ∈ AC, L ∈ BC

AL = 7x

S<sub>ABC</sub> = 16y

S<sub>BQL</sub> = y



S<sub>AB</sub> =  $\frac{ah}{2}$

т.е. и равнозначны, что BF - высота (h) ΔABC

Q ∈ BF

S<sub>ABC</sub> =  $\frac{a \cdot BF}{2}$

QF = 9au

S<sub>BQC</sub> =  $\frac{BQ \cdot AC}{2}$

S<sub>BQL</sub> =

h<sub>ALC</sub> - ?

Am

$\sin 5x \sin 9x = \sin 5x \cdot \sin 9x$

$\frac{\sin^2 7x + \cos^2 x}{2}$

$\frac{1}{\sqrt{8}} \sin 7x + \frac{1}{\sqrt{8}} \cos x$

$\sin^2 (7x - 4)$

$\frac{\sin 5\pi \sin 9\pi - \sin^2 7\pi - \cos^2 \pi}{2} - 3$

$\sin 7,5\pi \cdot \sin 4,5\pi - \sin^2 3,5\pi - 3$

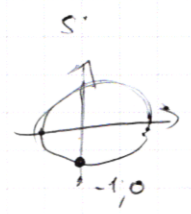
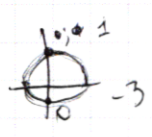
$-\sin^2 3,5\pi + \sin 2,5\pi \cdot \sin 4,5\pi$

$\frac{1}{2}(\cos 2x - \sin 2x)$

$\sin 7,5\pi \sin 4,5\pi \cdot \frac{1}{2} [\sin 3,5\pi + \sin \pi]$

$\sin 7,5\pi \cdot 1 = 1$

$-\sin^2 3,5\pi + \frac{1}{2} \sin 3,5\pi + \frac{1}{2} \sin \pi - 3$



$-\sin^2 270^\circ + \frac{1}{2} \sin 140^\circ - 3 = 2$

$2 \sqrt{-3}$



### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

а5.  $\log_{\sqrt{x+3}} - x(x+5) \geq -1$

1)  $\begin{cases} \sqrt{x+3} - x \geq 1 & (1) \\ x+5 \geq 0 & (2) \\ \sqrt{x+3} - x \leq x+5 & (3) \end{cases}$

2)  $\begin{cases} \sqrt{x+3} - x \geq 0 & (1) \\ \sqrt{x+3} - x < 1 & (1) \\ x+5 > 0 & (3) \\ \sqrt{x+3} - x \geq x+5 & (4) \end{cases}$

(1)  $\sqrt{x+3} \geq 1+x$   
 $x+3 \geq 1+2x+x^2$   $x \geq -1$   
 $x^2+x-2 \leq 0$   $x+3 \geq 0$   
 $x_1 = -2, x_2 = 1$   $x \geq -3$

(1)  $\sqrt{x+3} > x$   
 $\sqrt{x+3} > x^2$   
 $x > 0$   $\begin{cases} x^2 - x - 3 < 0 \\ x < 0 \end{cases}$



$[-2; 1]$

$\log_{\sqrt{-2+3}} -2(-2+5) \geq -1$

$\log_3 3 \geq -1$

$D = 1 + 4 \cdot 3 = 13$

$x \geq \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$   
 $n_1 \leq -1, n_2 > 2$   
 $\left( \frac{1 - \sqrt{13}}{2}, \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \right)$

(2)  $x > -5 \quad | \quad (-5; +\infty)$

(3)  $\sqrt{x+3} - x \leq x+5$

$\sqrt{x+3} \leq 2x+5$

$\begin{cases} x+3 \geq 0, x \geq -3 \\ x+3 \leq 4x^2 + 20x + 25 \end{cases}$

$4x^2 + 19x + 22 \geq 0$

$x_1 = -\frac{11}{4}, x_2 = -2$



$[-\frac{11}{4}; -2]$

$x \in (-\infty; -2] \cup [\frac{11}{4}; +\infty)$

(2)  $\sqrt{x+3} < 1+x$

$x+3 \geq 0$

$1+x \geq 0$

$x+3 < 1+2x+x^2$

$x^2+x-2 > 0$

$\left( (-\infty; -2) \cup (1; +\infty) \right)$

(3)  $x > -5$

(4)  $\sqrt{x+3} - x \geq x+5$

$\sqrt{x+3} \geq 2x+5$

$x+3 \geq 4x^2 + 20x + 25$

$4x^2 + 19x + 22 \leq 0$

$\left[ -2; \frac{11}{4} \right]$

Ответ:  $\{-2\} \cup \left( 1; \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right)$

23.  $18u$   $(0,5)9$   $5-6u$   $\frac{5 \times 6 \dots}{18}$   $12 \text{ бар.}$

$$\frac{18}{2} \cdot 5 \cdot 12$$

$$2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 12 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 60 = 64 \cdot 64 \cdot 60 = 64 \cdot 60$$

$$\begin{array}{r} 64 \\ \times 69 \\ \hline 568 \\ + 256 \\ \hline 384 \\ \times 4096 \\ \hline 1536 \\ + 3200 \\ \hline 245760 \end{array}$$

Ответ: 245760.

2.  $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 4x - \cos^2 x - 3$

$-\frac{1}{2} \leq \sin 5x \leq \frac{1}{2}$   $-\frac{1}{2} \leq \sin 9x \leq \frac{1}{2}$   $0 \leq \sin^2 4x \leq 1$   $0 \leq \cos^2 x \leq 1$

$f(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x$

$f(x) = \sin^2 2x + \cos^2 x$

$\sin 7x \cdot \sin 7x$

$\sin 7x \cdot \cos 7x \cdot \sin 7x + \cos 7x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x - \cos^2 x$

$f'(x) = \cos 5x \sin 9x + \cos 9x \sin 5x -$

$2 \cos 7x \sin 7x = \sin 14x$

①  $\sin 14x - \sin 14x + 2 \sin x = 2 \sin x$

②  $2 \sin x - 3$

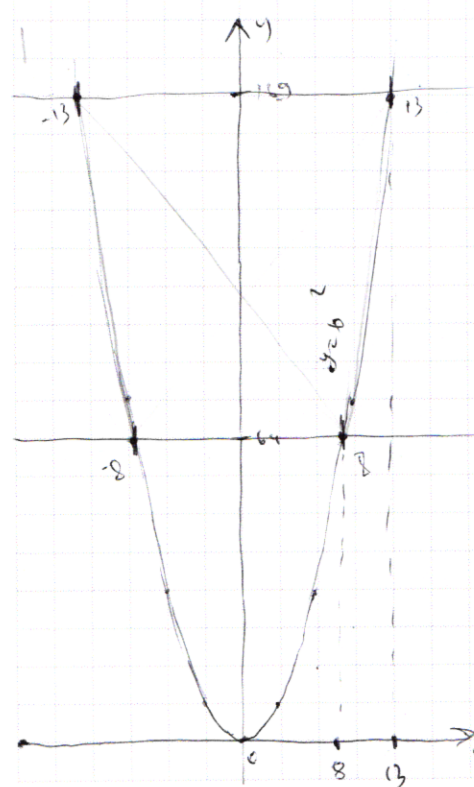
③  $2 \sin x = 3$   
 $\sin x = 1.5$   $f_{\max} = -1$   
 $f_{\min} = -5$

④  $2 \sin x = 3$

⑤  $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12$   
 $12 \cdot 30 \cdot 56 \cdot 90 \cdot 11 \cdot 12$   
 $144 \cdot 330 \cdot 56 \cdot 90$

$(-\frac{1348}{2}, a)$  и  $(\frac{1348}{2}, a)$

a  $y = x$   $y = 169$   $y = 64$   $y = a$



$(-13, 13)$   
 $(-8, 8)$

$a = 26$   
 $b = 16$   
 $d = 110^\circ$

$c^2 = 26^2 + 16^2 - 2 \cdot 26 \cdot 16 \cdot \frac{-1}{2} = 26^2 + 16^2 + 26 \cdot 16 =$

$(26 + 16)^2 - 26 \cdot 16$

$1764 - 416 =$

$c^2 = 1348$

$l$  - длина стороны  $a$ ,  $l = \sqrt{1348}$   
 $a = 26 \pm \frac{\sqrt{1348}}{2}$

$a = (\frac{\sqrt{1348}}{2})^2 = \frac{1348}{4}$

~~$va = n \cdot k + z$~~

$\frac{1348}{4} = 337$   $a = 337$

$\cos(90^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ$   $\cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ$   
 $2 = -\frac{1}{2}$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 16 \\ \hline 156 \\ + 160 \\ \hline 416 \\ - 1764 \\ \hline 1348 \end{array}$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

51; 35 }      36; 70      21; 105      106 140      141 175

1 37 73 109 143  
~~5~~ ~~41~~ ~~73~~  
 36 36

$$\begin{array}{r} 142 \\ - 37 \\ \hline 105 \\ - 7 \\ \hline 98 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 72 \\ - 32 \\ \hline 40 \\ - 7 \\ \hline 33 \end{array}$$

148      118      108  
 - 73      - 43      - 33

1	37	73	109	143	363
5	41	78	114	148	+ 4.5
9	46	82	118	152	
13	50	86	122	156	+ 146
17	54	90	126	160	+ 70    216

363 + 20 + 40 + 80 + 80  
 363 + 100 + 100 + 2

98 + 216 + 108 = 363

$$\begin{array}{r} + 142 \\ 216 \\ \hline 363 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 363 \\ 5 \\ \hline 1500 + 300 + 15 \\ \hline 1815 \end{array}$$



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)