МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2 ШИФР 15-026

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.

3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры “0”, “5” и “9” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “5” ровно шесть, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.

7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15 - 026

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) a, b, c $\quad 2R = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ $\quad S = \frac{ab \cdot \sin C}{2} = \frac{abc}{4R}$ $\quad p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{76+64}{2} + \frac{c}{2}$

$\sin C = \frac{c}{2R}$ $\quad r_a = \frac{S}{p-a}$

$S = \frac{ab \sin C}{2}$; $\sin C = \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

1) $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{ab\sqrt{3}}{4}$

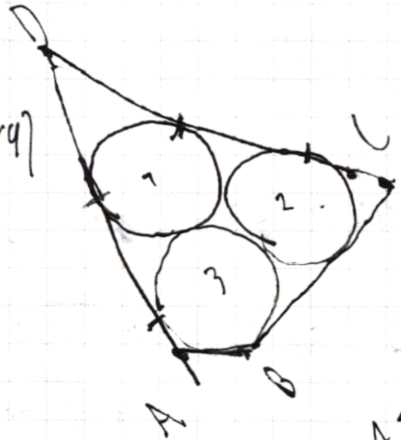
2) $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{ac\sqrt{3}}{4}$

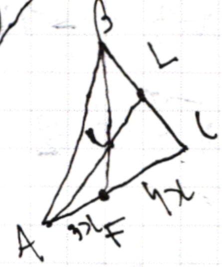
3) $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{bc\sqrt{3}}{4}$

1) $(p^2 - ap)(p^2 - pc - bp + bc) = a^2b^2 \cdot \frac{3}{16}$

$p^4 - p^3c - bp^3 + bcp^2 - ap^3 + ap^2c + abp^2 - apbc$

N4)





2) $f'(x) = 5 \cdot \cos 5x \sin 9x + 9\cos 9x \sin 5x - 2\sin 7x \cdot 7\cos 7x + 2\cos x \cdot \sin x = 0$

$5\sin 14x + 4\cos 9x \sin 5x$ $\quad -7\sin 14x$ $\quad \sin 2x$

$\underbrace{4\cos 9x \sin 5x + \sin 2x}_{g(x)} - 2\sin 14x = 0$

$\sin a \sin b = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$

$g'(x) = -4 \cdot 9\sin 9x \cdot \sin 5x + 4 \cdot 5 \cdot \cos 5x \cdot \cos 9x + 2\cos 2x$

$g'(x) = \underset{[-1;1]}{\cos 14x} - 16\sin 9x \sin 5x + \underset{[-2;2]}{2\cos x}$ $\quad \frac{\cos(4x)}{2} - \frac{\cos(14x)}{2}$

1) -4 2) $\sin\frac{5}{2}\pi \cdot \sin\frac{9}{2}\pi - \sin^2\frac{7}{2}\pi - 0 - 3 = 1 \cdot 1 - 1 - 3 = -3$ $\quad 3; -4$ Ответ: $-3; -4$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\frac{\cos 4x - \cos 14x}{2} + \cos^2 7x - \cos^2 x - 4 = \cos 4x - \cos 14x + 2\cos^2 7x - 2\cos^2 x - 8$

$14x = -\frac{\pi}{2}$

$\frac{4}{2}\cdot(-\sin 4x) + \frac{14}{2}\sin 14x + 2\underbrace{\cos 7x\cdot(-\sin 7x)}_{-\sin 14x} + \underbrace{2\cos x\cdot\sin x}_{\sin 2x}$

$x = -\frac{\pi}{28}$

$7\sin 14x - 2\sin 4x - \sin 14x + \sin 2x \mid 6\sin 14x - 2\sin 4x + \sin 2x$ | $x = \frac{\pi k}{2}$, к-чет

$6\sin 14x > 2\sin 4x + \sin 2x$

$x=0$ 1

$x=\frac{\pi}{2}$ 2

$x=\pi$ 3

3) $9\cdot 7\cdot 10^{11}\cdot 14$ если один раз июб

$1\cdot 7\cdot 7\cdot 3^{10}\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11$ случаи каждое отдельно

$-\ 1\cdot 7\cdot 3^{10}\cdot 13\cdot 12\cdot 11 \quad = \quad 3^{10}\cdot 13\cdot 12\cdot 11(14-1)$

$1+\sqrt{13} \not< 5$

5) $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 0$

ОДЗ $\begin{cases} \sqrt{x+3} > 0 \\ x+5 > 0 \\ \sqrt{x+3}-x > 0 \\ \sqrt{x+3}-x \neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x > -3 \\ x > -5 \\ x+3-x^2 > 0 \\ x+3 \neq x^2+2x+1 \end{cases}$

3) $x^2-x-3<0$

$x = \frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$

4) x^2+x+11

$x = \frac{-1\pm\sqrt{45}}{2}$

$\frac{1-\sqrt{13}}{2}$ $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$

$(\sqrt{x+3} - x - 1)(x+5-1) \geq 0 \Rightarrow \cancel{x\sqrt{x+3}}$ $x+3=t$

$(\sqrt{t} - t + 2)(t+1) = t\sqrt{t} + \sqrt{t} - t^2 - t + 2t + 2 \geq 0$

$\cancel{t\sqrt{t} + \sqrt{t}}$ град $t=4$

$t\sqrt{t} + \sqrt{t} - t^2 - t + 2t + 2 \;\Big|\; \frac{t-4}{\sqrt{t} + \frac{5}{\sqrt{t}}}$

$t\sqrt{t} - 4\sqrt{t}$

$5\sqrt{t} - t^2 - t + 2t + 2$

$5\sqrt{t} - 20\sqrt{t} - t^2 + 2t + 2$

| б $12\sin 7x\cos 7x - 4\sin 2x\cos 2x + \sin x\cos x$

$\sin(a+b)+$

$6\sin 14x = 2\sin 4x - \sin 2x = 4\sin 2x\cos 2x - \sin x\cos x = 12\sin 7x\cos 7x$

$(\sqrt{x+3} - x - 1)(x+5-\sqrt{x+3}-x) \geq 0$, $x+3=t$

$(\sqrt{t} - t + 2)(5-\sqrt{t}) \geq 0 \qquad \sqrt{t} - t + 2 \geq 0$

$y^2 - y - 2 \leq 0$

$y = \frac{1\pm\sqrt{9}}{2} = 2; -1$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

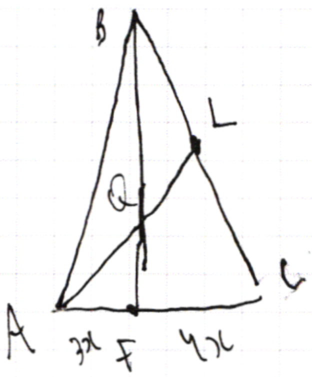
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-026

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{FQ}{QB}\cdot\frac{7x}{3x}=1$ | $\frac{BL\cdot}{LC\cdot QB}\cdot 9\cdot\frac{7}{3}=1$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-026

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N2

$\sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

$\frac{\cos 4x - \cos 14x}{2} + \cos^2 7x - \cos^2 x - 4$; найдем производную этой функции

$\frac{4}{2} \cdot (-\sin 4x) - \frac{14}{2} \cdot (-\sin 14x) + 2\cos 7x \cdot (-\sin 7x) - 2\cos x(-\sin x) =$

$= 7\sin 14x - 2\sin 4x - \sin 14x + \sin 2x = 6\sin 14x - 2\sin 4x + \sin 2x$

производная обращается в ноль, когда $x = \frac{\pi}{2}k, k \in Z$ и, когда $6\sin 14x = 2\sin 4x - \sin 2x$. Подставим $x=0$ и $x=\frac{\pi}{2}$ в функцию, при $x=0$ $\sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 = -4$, а при $x = \frac{\pi}{2}$ $\sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 = -3$. Функция не может быть меньше -4 и больше -3, так как $|\sin 5x \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x| \leq 1$

Ответ: наименьшее значение — -4, наибольшее — -3

N3

Сначала предположим, что „0" может быть первой цифрой, а потом такие числа вычтем. Три цифры „0", „5", „9" встречаются минимум по одному разу, еще 6 идущих подряд пятерок занимают шесть мест, всего вариантов вставить эти пятерки в число — $18-6+1=13$, вариантов передвинуть обязательные нули и девятки — $12 \cdot 11$. Поэтому всего таких чисел будет $1 \cdot 1 \cdot 3^{10} \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11$

Теперь из этого нужно вычесть числа, где первая цифра-ноль

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Рассуждая аналогичным образом, всего таких цифр — $1\cdot3^{10}\cdot12\cdot11$ (все такие же 17ти значные числа, но „0" не обязателен)

Получаем $3^{10}\cdot13\cdot12\cdot11-3^{10}\cdot12\cdot11 = 3^{10}\cdot12\cdot11\,(13-1)=3^{10}\cdot12^{2}\cdot11=$

$=3^{12}\cdot4^{2}\cdot11=3^{12}\cdot2^{4}\cdot11$

Ответ: $3^{12}\cdot2^{4}\cdot11$

№5

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5)\geq1$

методом рационализации приведем это неравенство к

$\cancel{(x+5-1)(\sqrt{x+3}-x-1)\geq1}$

~~заменим $x+3$ на t:~~

$\cancel{(t+1)(\sqrt{t}-t+2)=t\sqrt{t}+\sqrt{t}-t^2-t+2t+2}$

ОДЗ

1) $\begin{cases}x+5>0\\ x+3>0\\ \sqrt{x+3}-x>0\\ \sqrt{x+3}-x\neq1\end{cases}$

2) $\begin{cases}x>-5\\ x>-3\\ x^2-x-3<0\\ \cancel{x^2+x+11}\quad x^2+2x-x-2\neq0\end{cases}$

3) $\cancel{\frac{1-\sqrt{13}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{13}}{2}}$

3) $\frac{1-\sqrt{13}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{13}}{2}$

$(\sqrt{x+3}-x-1)(x+5-\sqrt{x+3}-x)\geq0$, заменим $x+3$ на t

$(\sqrt{t}-t+2)(5-\sqrt{t})\geq0$, $t<25$ по ОДЗ, поэтому $5-\sqrt{t}\geq0$ всегда

$\sqrt{t}-t+2\geq0$

$t\leq4$

$x\leq1$

Ответ $\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2};1\right]$

~~№7~~

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$S = \frac{ab \cdot \sin C}{2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $\sin C = \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Пусть $a = 169$, $b = 64$, c — неизвестная сторона

Тогда нужно решить 3 уравнения

1) $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = ab\frac{\sqrt{3}}{4}$

2) $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = ac\frac{\sqrt{3}}{4}$

3) $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ $bc\frac{\sqrt{3}}{4}$

1) $p^4 - p^3c - bp^3 + bcp^2 - ap^3 + ap^2c + abp^2 - apbc = a^2b^2 \cdot \frac{3}{16}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)