МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1 ШИФР 15-059

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

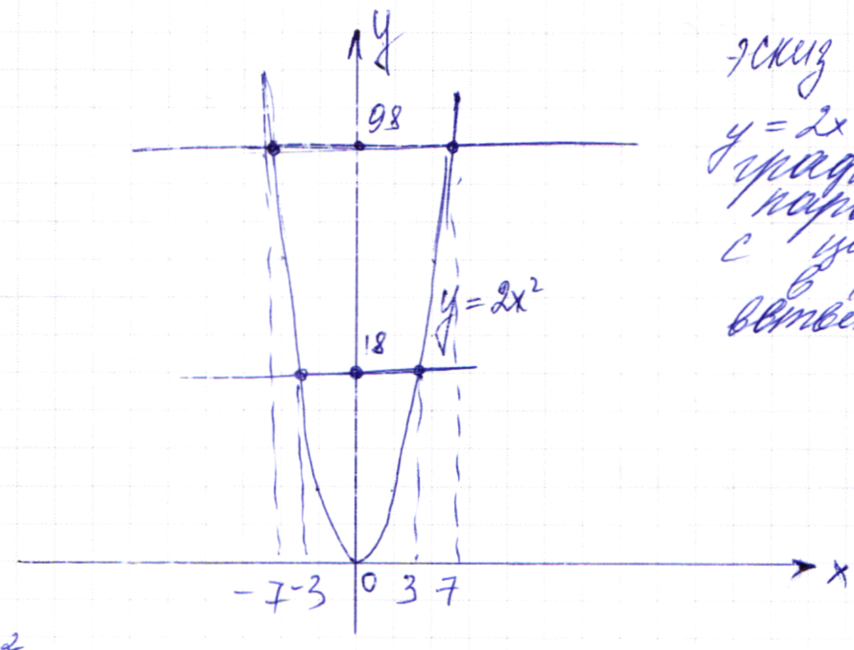
№1

$y = 2x^2$
$y = 98$
$y = 18$
$y = a$

$a = ?$ чтобы из отрезков Δ-ник с углом $120°$

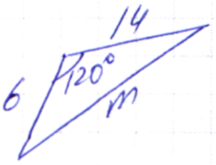
эскиз графика

$y = 2x^2$ - график парабола с центром в $(0;0)$ ветви вверх.



$y = 98 = 2x^2$
$x^2 = 49$
$x = \pm 7$, тогда отрезок внутри равен 14

$y = 18 = 2x^2$
$x^2 = 9$
$x = \pm 3$, отрезок внутри равен 6.



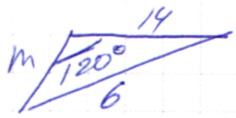
если в Δ-нике угол $120°$ между стороной 14 и 6, то

$m^2 = 14^2 + 6^2 - 2 \cdot 14 \cdot 6 \cos 120° = 14^2 + 6^2 + 14 \cdot 6 =$
$= 4(49 + 9 + 7 \cdot 3) = 4(49 + 30) = 4 \cdot 79$

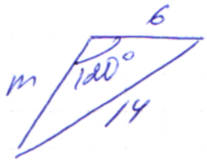
$m = 2\sqrt{79}$, т.к $m > 0$ по смыслу (сторона Δника)

тогда $x = \pm\sqrt{79}$

$x^2 = 79$ $\quad y = 2x^2 = 2 \cdot 79 = 158 = a$,



такого Δ-ника быть не может т.к. против большего угла лежит большая сторона, а $6 < 14$
$120°$ - больший угол.



в таком Δ-нике по теореме косинусов

$$14^2 = 6^2 + m^2 - 2\cdot m\cdot 6\cdot \cos 120°$$

$$14^2 = 6^2 + m^2 + 6m$$

$$m^2 + 6m + 6^2 - 14^2 = 0$$

$$D = 36 - 4\cdot 6^2 + 4\cdot 14^2 = 4(9 - 6^2 + 14^2) = 4(196 + 9 - 36) =$$

$$= 4(169) = (2\cdot 13)^2$$

$$m_{1,2} = \frac{-6 \pm 26}{2} = -3 \pm 13 = \left[\begin{array}{l} 10 \text{ — подходит} \\ -16 \text{ — не подх. по смыслу, } m>0, \text{ т.к. сторона Δ-ника} \end{array}\right.$$

$m = 10$, тогда $x = \pm 5$

$x^2 = 25$ $\quad y = 2x^2 = 50 = a$

Ответ: при $a = 50$
при $a = 158$

№3

17 значные числа, содержащие только „0", „7" и „8"
каждая встречается хотя бы 1 раз
цифра „8" встречается ровно 7 раз подряд.
Сколько их?

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17

1) „8" встречаются только подряд и ровно 7 раз, значит позиции, на которых может встречаться первая „8" это 1-11, то есть поставить первую восьмёрку 11 вариантов

если „8" на 1 позиции, то остальные ~~же~~ цифры на 8-17 позиции могут быть „7" или „0" вариантов их расстановок

$2^9\cdot 1$, т.к. на каждую позицию есть 2 варианта, но каждая цифра должна встречаться хоть раз, поэтому $\underbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdots 2}_{9}\cdot 1$, в какой-то позиции останется 1 вариант.

если „8" не на 1 позиции, таких вариантов 10, то вариантов расстановки других цифр ~~от~~ для каждого случая становится в 2 раза меньше, потому что на первой позиции не может стоять „0", тогда этих вариантов

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 2
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2^8 \cdot 1 \cdot 1 = 2^8$

и случаев, когда „8" не на 1 позиции 10, тогда

$10 \cdot 2^8$

Общее число случаев

$10 \cdot 2^8 + 2^9 = 2^9(5+1) = 2^9 \cdot 6 = 2^{10} \cdot 3 = 3 \cdot 1024 =$

$= 3072$

Ответ: 3072 числа

№5

Решить неравенство

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$ ОДЗ: $\begin{cases} x+4>0 \\ \sqrt{x+7}-x>0 \\ \sqrt{x+7}-x \neq 1 \\ x+7 \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x>-4 \\ x \geq -7 \\ \sqrt{x+7} > x \\ \sqrt{x+7} \neq x+1 \end{cases}$ $\sqrt{x+7} > x \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0 \\ x+7 \geq x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq 0 \\ x+7 \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2-x-7 \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq -7 \end{cases} \end{array}\right.$

$x^2-x-7=0$

$D = 1+28 = 29$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}$

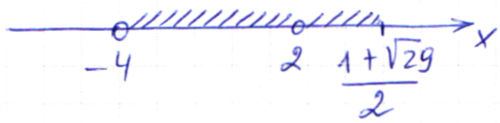
$0 \quad \frac{1+\sqrt{29}}{2} \quad x$ $\qquad -7 \quad 0 \quad x$

общ. $-7 \quad \frac{1+\sqrt{29}}{2} \quad x$

$\sqrt{x+7} \neq x+1$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x+7 \neq x^2+2x+1 \end{cases} \\ \cancel{\begin{cases} x+1<0 \\ x+7 \geq 0 \end{cases}} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2+x-6 \neq 0 \end{cases} \\ \cancel{\ldots} \end{array}\right.$ $\begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq -3 \quad x \neq 2 \end{cases}$

$x \neq 2$

ОДЗ:



$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq \log_{\sqrt{x+7}-x}(\sqrt{x+7}-x)$

$\Updownarrow$

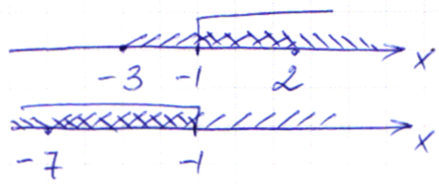
$(\sqrt{x+7}-x-1)(x+4-\sqrt{x+7}+x) \geq 0$

$(\sqrt{x+7}-x-1)(4-\sqrt{x+7}+2x) \geq 0$

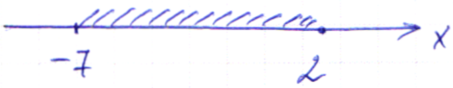
I случай

$\begin{cases} \sqrt{x+7}-x-1 \geq 0 \\ 4+2x-\sqrt{x+7} \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt{x+7} \geq x+1 & (1) \\ \sqrt{x+7} \leq 2x+4 & (2) \end{cases}$ (1) $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x+7 \geq x^2+2x+1 \end{cases} \\ \begin{cases} x+1 \leq 0 \\ x+7 \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2+x-6 \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq -7 \end{cases} \end{array}\right.$



(1)

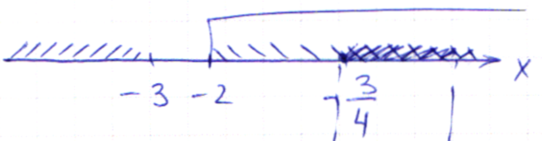


(2) $\sqrt{x+7} \leq 2x+4$ $\begin{cases} 2x+4 \geq 0 \\ x+7 \leq 4x^2+16+16x \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq -2 \\ 4x^2+15x+9 \geq 0 \end{cases}$ $D = 15^2 - 4\cdot4\cdot9 = 9(5\cdot5-16) = 9\cdot(25-16) = 9\cdot9$

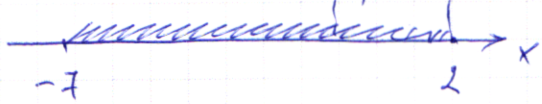
$x_{1,2} = \frac{-15 \pm 9}{8} = \left[\begin{array}{l} -\frac{3}{4} \\ -3 \end{array}\right.$

(2)



$\left[-\frac{3}{4}; 2\right]$

$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases}$



II случай

$\begin{cases} \sqrt{x+7}-x-1 \leq 0 \\ 4+2x-\sqrt{x+7} \leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt{x+7} \leq x+1 & (3) \\ \sqrt{x+7} \geq 2x+4 & (4) \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x+7 \leq x^2+2x+1 \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq -1 \\ x^2+x-6 \geq 0 \end{cases}$

(3)

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-059

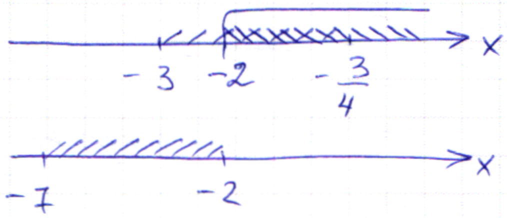
ШИФР

(заполняется секретарём)

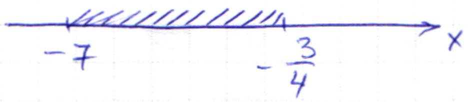
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(4) $\sqrt{x+7} \geqslant 2x+4 \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x+4 \geqslant 0 \\ x+7 \geqslant 4x^2+16+16x \end{cases} \\ \begin{cases} 2x+4 \leqslant 0 \\ x+7 \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right.$

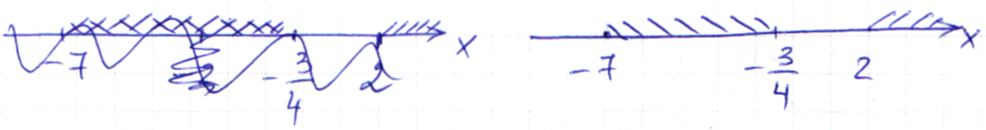
$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant -2 \\ 4x^2+15x+9 \leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leqslant -2 \\ x \geqslant -7 \end{cases} \end{array}\right.$



(4)



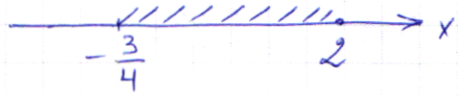
$\begin{cases} (3) \\ (4) \end{cases}$



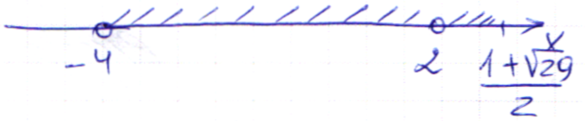
$\varnothing$

$\begin{cases} (1) \\ (2) \\ ОДЗ \end{cases}$

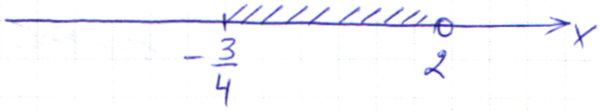
(1) и (2)



ОДЗ



общ.



Ответ: $\left[-\frac{3}{4}; 2\right)$

№2

$g(x) = \sin 3x \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 =$

$= -\frac{1}{2}(\cos 10x - \cos 4x) - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 = -\frac{1}{2}(2\cos^2 5x - 1 - \cos 4x) -$

$- \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 = \cancel{-\cos^2 5x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x - \sin^2 x + \cancel{\cos^2 5x} + 4 =$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2\cos^2 2x - 1) - \sin^2 x + 4 = \cancel{\frac{1}{2}} + \cos^2 2x - \cancel{\frac{1}{2}} - \sin^2 x + 4 =$

$= (2\cos^2 x - 1)^2 + 1 - \sin^2 x + 3 = 4\cos^4 x + 1 - 4\cos^2 x + \cos^2 x + 3 =$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$= 4\cos^4 x - 3\cos^2 x + 4$

пусть $t = \cos^2 x$ $\quad 0 \le t \le 1$

$f(x) = 4t^2 - 3t + 4$ - график парабола, ветви вверх

~~...~~ $t_{в.}$ $= \frac{3}{8}$ наименьшее значение в вершине

$t_{в.} = \frac{3}{8}$

$f(t_{в.}) = 4\frac{9}{64} - \frac{9}{8} + 4 = \frac{9}{16} - \frac{9}{8} + 4 = \frac{9-18}{16} + 4 =$

$= \frac{-9}{16} + 4 = \frac{+64-9}{16} = \frac{55}{16} = 3\frac{7}{16}$

Наибольшее на промежутке $[0;1]$ в $t=1$ т.к. 1 дальше всего от вершины.

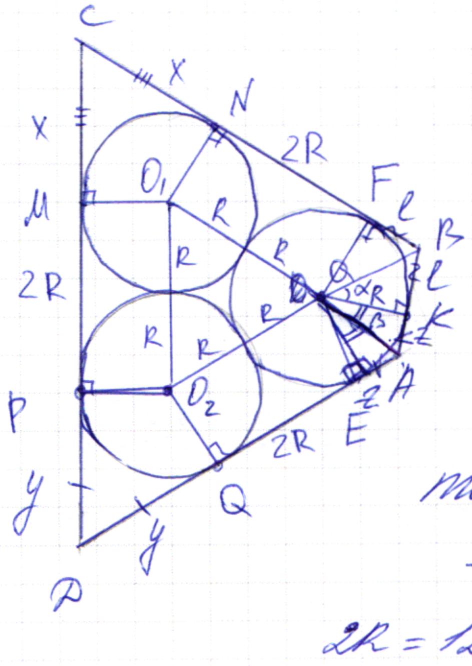
$f(1) = 4 - 3 + 4 = 5$

Ответ: наибольшее значение ~~...~~ 5
наименьшее значение $3\frac{7}{16}$

№4

ABCD ω_1 кас AD и DC
ω_2 кас DC и CB
ω_3 кас CB, BA и AD

а) $AD + BC - AB - CD = 12$ $\quad R = ?$
б) $\angle AOB = ?$, O - центр ω_3
в) $AO \cdot BO = 58$, $AB = ?$



решение:
а) 1) по свойству о-ти, вписанной в угол отрезки касательной из одной точки до точки касания равны (см. рис)

тогда $AD = y + z + 2R$
$AB = z + l$
$BC = l + x + 2R$
$CD = x + y + 2R$

тогда $y + z + 2R + l + x + 2R - z - l -$
$- x - y - 2R = 12$

$2R = 12 \rightarrow R = 6$

б) O_1NOF, O_1MO_2P, QO_2OE - прямоугольники, т.к. у них 2 противоположные стороны

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

равны и 2 угла при них 90° (радиус в точке касания перпендикулярен касательной)

в прямоугольнике противоположные стороны параллельны, тогда

$OO_2 \parallel AD$

$OO_1 \parallel CB$

OA - биссектриса $\angle EOK$, т.к. ω_3 вписана в него.

ω_1 такого же радиуса и лежит на продолжении AO, если её подвинуть, то она тоже вписанная и коснётся в тех же точках, значит т. O лежит на прямой O_1A

аналогично O лежит на прямой O_2B,

тогда $O_1A \cap O_2B = O$

~~$\angle BOA$~~ $\angle AOB = \angle O_1OO_2$ (вертикальные)

$\triangle$-ник OO_1O_2 - ~~правиль~~ равносторонний $\Rightarrow$ его углы равны $60°$

$\angle O_1OO_2 = 60° = \angle AOB$

в) $AO \cdot OB = 58 \quad AB = ?$

по теореме косинусов для $\triangle$-ника AOB

$AB^2 = AO^2 + OB^2 - 2 \cdot AO \cdot OB \cos\angle AOB =$

$= AO^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cos 60° = AO^2 + OB^2 - AO \cdot OB =$

$= AO^2 + OB^2 - 58$

$\angle KOB = \alpha$, $\angle KOA = \beta$

$\alpha + \beta = 60° \qquad tg\alpha = \frac{e}{R} = \frac{e}{6} \qquad tg\beta = \frac{2}{6}$

$\alpha = 60° - \beta \quad \beta = 60° - \alpha$

$tg\alpha = \frac{e}{6}$ $\quad tg(60° - \alpha) = \frac{z}{6}$

$AO = R\cos\beta \quad OB = R\cos\alpha$

$AO^2 + OB^2 = R^2(\cos^2\beta + \cos^2\alpha) = 36(\cos^2\beta + \cos^2\alpha)$

$\cos\beta = \sin(\alpha + 30)$ из $\triangle$-ников AOE и AOK

$\cos\beta = \cos(90 - \alpha - 30) = \cos(60 - \alpha)$

по теореме синусов $\quad \frac{AB}{\sin 60°} = \frac{AO}{\sin\beta} = \frac{OB}{\sin\alpha}$

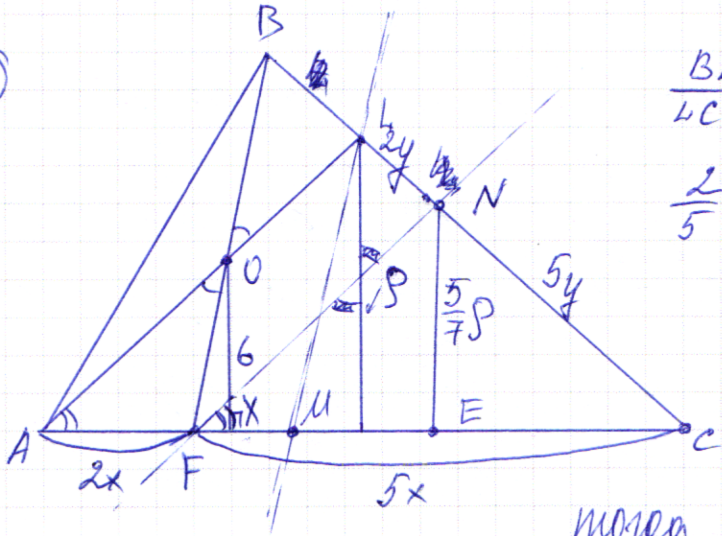
$2AB = \frac{AO}{\sin\beta} = \frac{OB}{\sin\alpha}$

Ответ: а) $R = 6$

б) $\angle AOB = 60°$

в) $AB = \sqrt{AO^2 + OB^2 - 58}$

№6



$\frac{BL}{LC} = \frac{FM}{MC}$

$\frac{2}{5} = \frac{LN}{NC}$ (по теореме Фалеса)

$5LN = 2NC$

~~$\triangle AN$~~ $\triangle ALC \sim \triangle FNC$ * с коэф. под. $\frac{5}{7}$

тогда $NE = \frac{5}{7}\rho$

$\frac{CF}{FA} = \frac{CN}{CL}$

* $\triangle ALC \sim \triangle FNC$, т.к. общий угол $\angle C$,

$\triangle AOX \sim \triangle FNE$ т.к. углы при основании равны ~~две~~ стороны параллельны

$\square$ черновик $\quad$ ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-059
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2. $g(x)$ наиб. и наим. ?

$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$

$\sin 30 \cdot \sin 60 = \frac{1}{2}(\cos 90 + \cos 30)$ $\quad$ $\sin 30 \cdot \sin 90 = \frac{1}{2}(\cos 60 + \cos 120)$

$0 \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{2} \cdot 1$ $\quad \cos 60$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ $\quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot 1$

$120 = 90 + 30 \quad \cos 60$

$\sin 45 \cdot \sin 45 = \frac{1}{2}(\cos 90 + \cos 0) =$ $\quad$ $\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$

$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2}$

$g(x) = \frac{1}{2}(\cos(7x+3x) + \cos(7x-3x)) - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 =$

$= \frac{1}{2}\cos 10x + \frac{1}{2}\cos 4x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

$g'(x) = \frac{1}{2}(-\sin 10x) \cdot 10 + \frac{1}{2}(-\sin 4x) \cdot 4 - 2\sin x \cos x + 2\cos 5x(-\sin 5x) \cdot 5$

$g'(x) = -5\sin 10x - 2\sin 4x - \sin 2x - 5\sin 10x =$

$= -2\sin 4x - \sin 2x - 10\sin 10x$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin 30 + \sin 60 = 2\sin 45 \cos 15$

$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ $\quad -10\sin 10x = -10\sin(8x+2x) =$

$= -10\sin 8x \cos 2x + -10\sin 2x \cos 8x$

$-10 \cdot 2\sin 4x \cos 4x \cos 2x - 10\sin 2x(2\cos^2 4x - 1)$

$-20 \cdot 2\sin 2x \cos 2x \cos 4x - 10\sin 2x(2\cos^2 4x - 1) - 2 \cdot 2\sin 2x \cos 2x - \sin 2x = 0$

$\sin 2x = 0$ $\quad -40\cos 2x \cos 4x - 20\cos^2 4x + \cancel{10}\,9 - 2\cos 2x \cancel{-1} = 0$

$2\cos^2 2x - 1 \quad (2\cos^2 2x - 1)^2$

$-40\cos^2 2x(2\cos^2 2x - 1) - 20(2\cos^2 2x - 1)^2 - 2\cos 2x + 9 = 0$

$-80\cos^3 2x + 40\cos 2x - 80\cos^4 2x + 2 \cdot 20 \cdot 2\cos^2 2x + 20 - 2\cos 2x + 9 = 0$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

① $y=2x^2$ $y=98$ $y=18$ $y=a$ треуг. с углом $120°$ при каком a?

$98=2x^2$

$49=x^2$ $x=\pm7$ $AB=14$

$18=2x^2$ $9=x^2$ $x=\pm3$ $BC=6$

$AC^2=14^2+6^2-14\cdot6\cdot2\cos120°=14^2+6^2-14\cdot6=$

$=4(7^2+3^2-7\cdot3)=4\cdot(49+9-21)=4(28+9)=$

$=4\cdot37$ $14^2=x^2+6^2-x\cdot6\cdot2\cos120°=$

$AC=2\sqrt{37}$ $14^2=x^2+6^2-6x$

$x=\pm\sqrt{37}$ $x^2=37$ $y=2x^2=2\cdot37=74$

Отв. $a=74$

$x^2-6x+6^2-14^2=0$

$D=36-4\cdot6^2+4\cdot14^2=$

$\cancel{6^2=x^2+14^2-x\cdot14}$

$4(9-6^2+14^2)=$

$=4(9-36+196)=$

$=4\cdot(185-36)=$

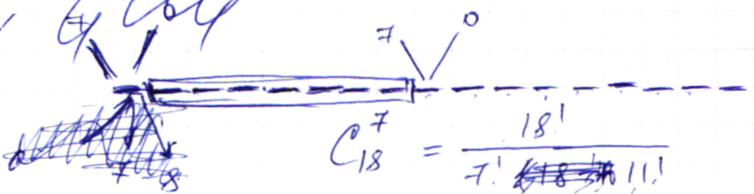
$=4\cdot151$

$14\cdot14=56$ … 2^{10} $32\cdot32=\dots$ $2^5=$

③ 17 зн. числа

„0" „7" „8"

„8" - ровно 7 штук подряд



$C_{18}^7=\frac{18!}{7!\cdot11!}$

$\frac{18!\,17\cdot18}{2!\cdot16!}$

$2^9\cdot1\cdot C_{18}^7=2^9\cdot\frac{18!}{7!\cdot11!}=$

$=\frac{2^9\cdot12\cdot13\cdot14\cdot15\cdot16\cdot17\cdot18}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot3}=2^5\cdot4\cdot13\cdot2\cdot16\cdot17\cdot18$

$=2^5\cdot2^3\cdot13\cdot2^4\cdot17\cdot18=$

$=2^{12}\cdot13\cdot17\cdot18=$

$=2^{10}\cdot$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-059

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$-80\cos^4 2x - 80\cos^3 2x + 80\cos^2 2x + 38\cos 2x + 29 = 0$ $\sin\alpha = \cos(90-\alpha)$

$\cos 2x = t$

$-80t^4 - 80t^3 + 80t^2 + 38t + 29 = 0$

$80t^4 + 80t^3 - 80t^2 - 38t \mp 29 = 0$ ± 1

$80 + \cancel{80} - \cancel{80} - 38 - 29 \neq 0$

$\cancel{80} - 80 - 80 + 38 - 29 \neq 0$

$90 - \beta = 60 + 30 \quad \beta = 90 - \alpha + 30$

$g(x) = \sin 3x \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

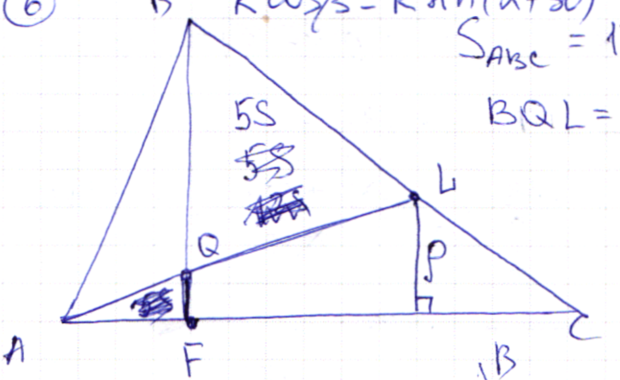
$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2} \cos\alpha\cos\beta - \cancel{\cos}\ \sin\alpha\sin\beta$

$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta) -$

$-\cos(\alpha-\beta)$

$-\cancel{\cos\alpha}\cos\beta \cancel{+} - \sin\alpha\sin\beta$

(6) $R\cos\beta = R\sin(\alpha+30)$



$S_{ABC} = 12S$

$BQL = 5S$

$\cos(30+60) = 0 =$

$= \sin 30 \cancel{\cos} 60 - \cancel{\sin} 60 \cos 30$

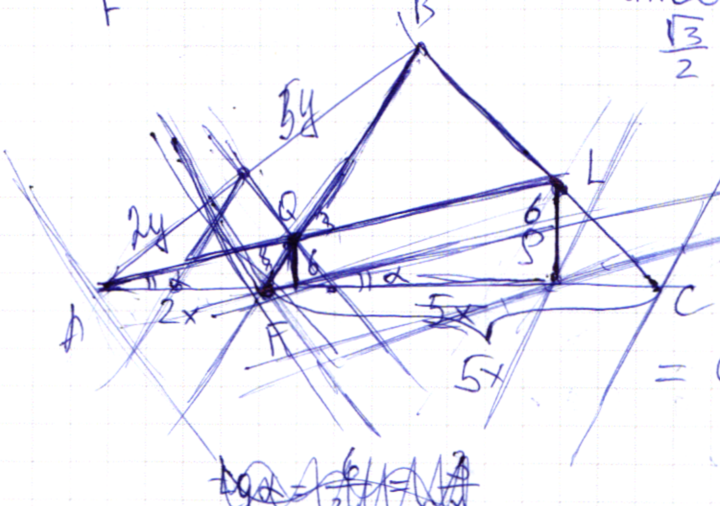
$\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt3}{2} - \frac{\sqrt3}{2}\cdot\frac{1}{2} = 0$

$\rho(Q, AC) = 6$

$\cos(60+90) = 150$

$= \sin 60 \sin 90 + \cancel{\sin}\cos 60 \cos 90$

$\frac{\sqrt3}{2}\cdot 1 \cancel{+} \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{\sqrt3}{2}$



$\cos(30+90) =$

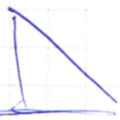
$= \cos 30 \cos 90 - \cancel{\cos}\sin 30 \cdot$

$0 \qquad \frac{1}{2}\cdot 1 =$

$= -\frac{1}{2}$

$\cancel{\operatorname{tg}\alpha = \frac{6}{2x}}$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$



$\cancel{\cos(60-30) = \cos 60\cos 30 + \cos\sin 30}$

$\cancel{\frac{\sqrt3}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt3}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2\sqrt3}{2}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№5

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$

$x+4>0$
$\sqrt{x+7}-x>0$
$\sqrt{x+7}-x \neq 1$

$\begin{cases} x>-4 \\ \sqrt{x+7}>x \\ \sqrt{x+7} \neq 1+x \end{cases}$

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq \log_{\sqrt{x+7}-x} \cancel{(x+4)} (\sqrt{x+7}-x)$

$(\sqrt{x+7}-x-1)(x+4-\sqrt{x+7}+x) \geq 0$

$(\sqrt{x+7}-x-1)(2x-\sqrt{x+7}+4) \geq 0$

$\begin{cases} \sqrt{x+7} \geq x+1 \ (1) \\ \sqrt{x+7} \leq 2x+4 \ (2) \end{cases}$ или $\begin{cases} \sqrt{x+7} \leq x+1 \\ \sqrt{x+7} \geq 2x+4 \ (2) \end{cases}$

(1) $x+1 \geq 0$ $x \geq -1$
$x+7 \leq x^2+2x+1$
$x^2+x-6 \geq 0$

-3 -1 2 x

(1) • $\begin{cases} x+1 \geq 0 & x \geq -1 \\ x+7 \geq x^2+2x+1 \end{cases}$

$x^2+x-6 \leq 0$

• $\begin{cases} x+1 \leq 0 \\ x \leq -1 \\ x+7 \geq 0 \end{cases}$ $x \geq -7$

$D = 1+24 = 25$

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \left[\begin{matrix} -3 \\ 2 \end{matrix}\right.$

-3 -1 2

-7 -1 -2

(2) $x+2 \geq 0$ $x \geq -2$
$x+7 \geq 4x^2+16+16x$
$3x^2+15x+9 \leq 0$

$D = 15^2 - 3 \cdot 9 \cdot 4 = 225 - 108 =$

$= 117 = 3 \cdot 39 = 3 \cdot 3 \cdot 13$

$\times \frac{13}{9}$ 147

$x_{1,2} = \frac{\cancel{-15} \pm 3\sqrt{13}}{\cancel{6} \cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$

-2

$\frac{-5-\sqrt{13}}{2}$ $\frac{-5+\sqrt{13}}{2}$

(2) $\begin{cases} 2x+4 \geq 0 \\ x+7 \leq 4x^2+16+2 \cdot 2 \cdot 4x \end{cases}$

$x+2 \geq 0$ $x \geq -2$

$3x^2+16x+9 \leq 0$

$D = 16^2 - 4 \cdot 3 \cdot 9 =$

$-\frac{64}{27}$ 37 $\times \frac{15}{15}$ 75 15 225

$= 4(16 \cdot 4 - 27) =$

$= 4(64-27) = 37$

$\times \frac{27}{4}$ 108

$x_{1,2} = \frac{-16 \pm 2\sqrt{37}}{6} =$

$= \frac{-8 \pm \sqrt{37}}{3}$

$\frac{12}{9}$ 108

-2 $\frac{8+\sqrt{37}}{3}$

$-\frac{225}{108}$ 117

-7 2

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

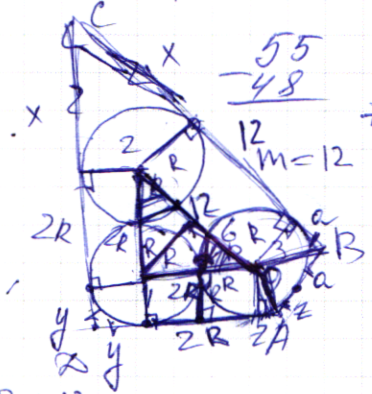
№4 ABCD $\omega_1, \omega_2, \omega_2$ $R_1 = R_2 = R_3$

ω_1 кас. AD и DC
ω_2 кас. DC и CB
ω_3 кас. CB, BA и AD

$\cancel{2\sin\alpha\sin}$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right)$$

$$16 \times 3 = 48$$



$$55 - 48 = 12 \quad 7$$

$R = ?$ $\cancel{AB}$ $\cancel{AD} + BC - \cancel{AB} - \cancel{CD} = 12$

$\cancel{z} + 2R + \cancel{y} + \cancel{a} + m + \cancel{x} -$
$- \cancel{z} - \cancel{a} - \cancel{x} - \cancel{y} - 2R = 12$

$m = 12$

$12 = 2R$ $R = 6$

$2R + 2R + 12$

$p = 2R + 6$

$$S_\Delta = \sqrt{(2R+6)(2R+6-2R)^2(2R+6-12)} =$$

$$= \sqrt{2(R+3)\cdot 36\,(R-3)} =$$

$$\sqrt{4R^2-36}\cdot \frac{12\cdot 6}{2}$$

$$= 2\sqrt{R^2-9}\cdot 6 = 12\sqrt{R^2-9}$$

$\cancel{R/2 \cdot 3\sqrt{R^2-9}} =$

$$\frac{2R}{\sin\alpha} = \frac{12\cdot 6}{\sin(180-2\alpha)}$$

$$\frac{R}{\sin\alpha} = \frac{6}{\sin 2\alpha}$$

$$R = \frac{6\sin\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{3}{\cos\alpha}$$

$R\cos\alpha = 3$

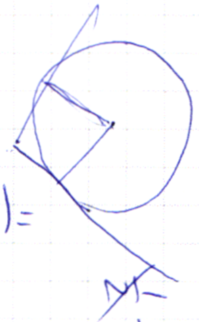
$$\cos\alpha \; \frac{R + \frac{(12-2R)}{2}}{2R} = \frac{R+6-R}{2R} = \frac{3}{R}$$

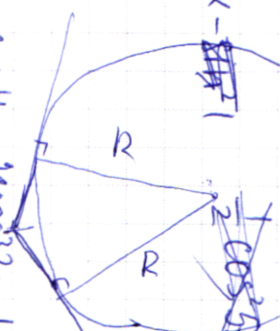
$\sin 30 \sin 60 =$
$\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt3}{2}$

$\frac{\sqrt3}{4}$

$$= -\frac{1}{2}\left(\cos 90 - \cos 30\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(0 - \frac{\sqrt3}{2}\right) =$$





$$g(x) = -\frac{1}{2}\left(\cos 10x - \cos 4x\right) - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$$

$$-\frac{1}{2}\cos 10x + \frac{1}{2}\cos 4x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$$

$$-\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{\cos^2 5x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x - \sin^2 x + \cancel{\cos^2 5x} + 4$$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x - \sin^2 x + 4$$

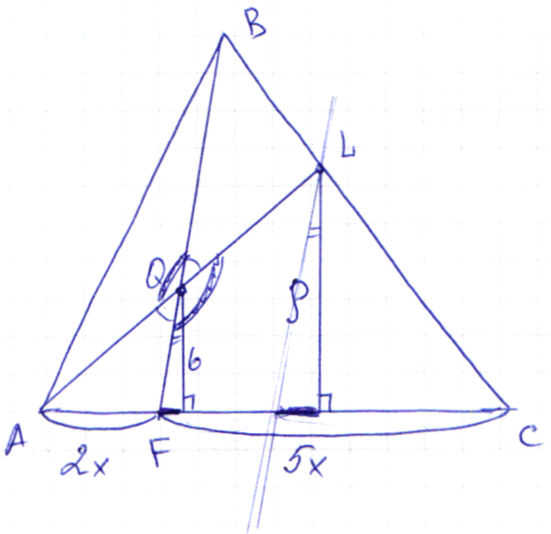
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2\cos^2 2x - 1) - \sin^2 x + 4$$

$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$

$$\cos^2 2x - \sin^2 x + 4$$

$$= -\frac{1}{2}(2\cos^2 x - 1)^2 \ldots 4\cos^4 x + 1 - 4\cos^2 x + \cos^2 x + 3$$

$\frac{\sqrt3}{4}$



$$\frac{S_{BQ\text{ℓ}L}}{S_{BAC}} = \frac{5}{12}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)