МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1

ШИФР 9-21

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120°?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры “0”, “7” и “8” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “8” ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-21

ШИФР

(заполняется секретарём)

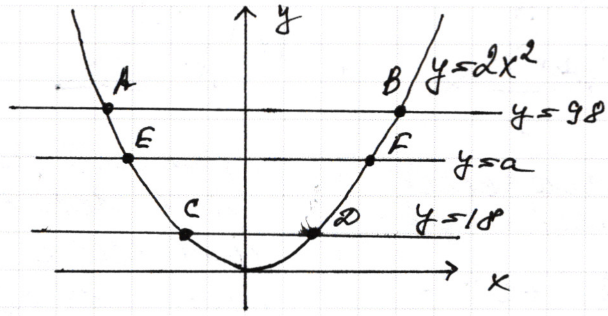
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $y=2x^2$

$y=98$

$y=18$

$y=a$



$y=2x^2$ – парабола, вершина в т. $(0;0)$. Находится в ~~первой~~ первом и втором координатных ~~четвертях~~. углах.

Отрезки образуемые пересечением $y=2x^2$ и прямыми:

1. с $y=98$ – отрезок AB

$2x^2=98$, $x^2=49$, $x=\pm 7$

Длина отрезка – модуль разности x-координат ~~точек~~ точек пересечения

~~a =~~ $AB=|7-(-7)|=\underline{14}.$

2. с $y=18$ – отрезок CD

$2x^2=18$, $x^2=9$, $x=\pm 3$

$CD=|3-(-3)|=\underline{6}.$

~~a.~~3. с $y=a$ – отрезок EF

$2x^2=a$, $x=\pm\sqrt{\frac{a}{2}}$; $EF=\left|\sqrt{\frac{a}{2}}-\left(-\sqrt{\frac{a}{2}}\right)\right|=2\sqrt{\frac{a}{2}}$.

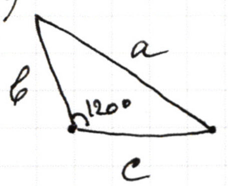
Из отрезков AB, CD и EF можно образовать треугольник с углом $120°$ таким образом, чтобы против этого угла лежал ~~сторона AB,~~ отрезок AB, или CD или EF.

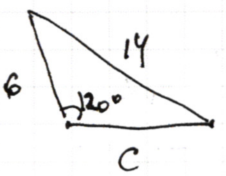
Пусть $AB=a$, $CD=b$, $EF=c$; $a=14$; $b=6$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

1)





по теореме косинусов:

$14^2 = 6^2 + c^2 - 2\cdot 6\cdot c\cdot \cos 120^\circ$

$196 - 36 = c^2 + 6c$

$c^2 + 6c - 160 = 0$

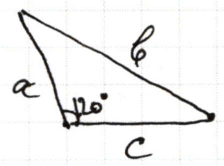
$D = 36 + 640 = 676 = 4\cdot 169$

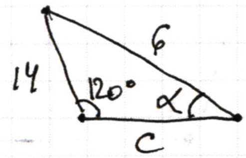
$\sqrt{D} = \sqrt{4\cdot 169} = 2\cdot 13$

$c = \frac{-6 \pm 2\cdot 13}{2}$

$c = -3 \pm 13$

2)



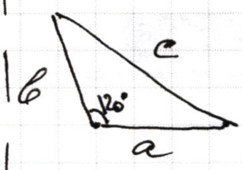


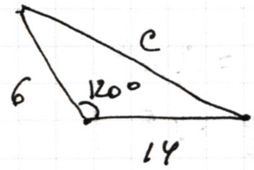
против большего угла лежит большая сторона. т.к. $14 > 6$, то $\alpha > 120^\circ$ а это невозможно, т.к. сумма углов треугольника меньше 180°.

$\varnothing$

нет решения

3)





по теореме косинусов:

$c^2 = 6^2 + 14^2 - 2\cdot 6\cdot 14\cdot \cos 120^\circ$

$c^2 = 36 + 196 + 6\cdot 14$

$c^2 = 232 + 84$

$c^2 = 316$

($\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$)

$c = \pm 2\sqrt{79}$.

~~Возмо~~ т.к. c – сторона треугольника, то $c > 0$. Значит, возможны два c:

$c_1 = 13 - 3 = 10$; $c_2 = 2\sqrt{79}$.

$c = EF = 2\sqrt{\frac{a}{2}} \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{2}} = \frac{c}{2}$, $\frac{a}{2} = \frac{c^2}{4}$, $a = \frac{c^2}{2}$.

Отсюда $a_1 = \frac{c_1^2}{2} = \frac{100}{2} = 50$.

$a_2 = \frac{c_2^2}{2} = \frac{4\cdot 79}{2} = 2\cdot 79 = 158$

Ответ: $a_1 = 50$; $a_2 = 158$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2. $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$

$\sin 3x \cdot \sin 7x = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x)$.

$g(x) = \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 10x - (1 - \cos^2 x) + \cos^2 5x + 4$.

$g(x) = \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 10x + \cos^2 x + \cos^2 5x + 3$.

В точках максимума и минимума (точки экстремума) производная функции равна 0 (тангенс угла наклона касательной равен 0).

Найдём производную функции $g(x)$:

$g'(x) = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot(-\sin 4x) - \frac{1}{2}\cdot 10\cdot(-\sin 10x) + (\cos^2 x)' + (\cos^2 5x)'$

$(\cos^2 x)' = (\cos x \cdot \cos x)' = -\sin x \cos x - \sin x \cos x = -2\sin x \cos x$

$(\cos^2 5x)' = -5\sin 5x \cos 5x - 5\sin 5x \cos 5x = -10\sin 5x \cos 5x$.

$g'(x) = -2\sin 4x + 5\sin 10x - 2\sin x\cos x - 10\sin 5x\cos 5x =$

$= -2\sin 4x + 5\sin 10x - \sin 2x - 5\sin 10x = -2\sin 4x - \sin 2x =$

$= -2\cdot 2\sin 2x\cos 2x - \sin 2x = -\sin 2x(4\cos 2x + 1)$.

$g'(x) = 0$.

$-\sin 2x(4\cos 2x + 1) = 0$.

$\sin 2x = 0$ или $4\cos 2x + 1 = 0$

$2x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ $\qquad \cos 2x = -\frac{1}{4}$

$x = \frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z}$ $\qquad 2x = \pm(\pi - \arccos\frac{1}{4}) + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

т.к. при повороте угла на $2\pi k$ значения $\sin x$ и $\cos x$ повторяются, то возьмём угол x в пределах 2π. Отсюда:

$$x = \frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2};\ \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{4}\right);\quad -\pi + 2\pi + \arccos\frac{1}{4}$$

$$\pi + \arccos\frac{1}{4}$$

$$x = \frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2};\ \pi + \arccos\frac{1}{4};\ \pi - \arccos\frac{1}{4};\ \arccos\frac{1}{4} - \pi.$$

при $x = \frac{\pi}{2}$ $g(x) = \sin\frac{3\pi}{2}\cdot\sin\frac{7\pi}{2} - \sin^2\frac{\pi}{2} + \cos^2\frac{5\pi}{2} + 4 =$

$$= -1\cdot(-1) - 1 + 0 + 4 = 1 - 1 + 4 = 4.$$

при $x = \frac{3\pi}{2}$ $g(x) = \sin\frac{9\pi}{2}\sin\frac{21\pi}{2} - \sin^2\frac{3\pi}{2} + \cos^2\frac{15\pi}{2} + 4 =$

$$= 1\cdot 1 - 1 + 0 + 4 = 4.$$

при $x = \pi + \arccos\frac{1}{4}$ $g(x) = \cancel{\sin}(\pi + 3\arccos$

$= -\cos\left(3\arccos\frac{1}{4}\right)\cdot\left(-\cos\left(7\arccos\frac{1}{4}\right)\right) -$

$- \cos^2\left(\arccos\frac{1}{4}\right) + \cos^2\left(\pi + 5\arccos\frac{1}{4}\right) + 4 =$

$= \cos\left(3\arccos\frac{1}{4}\right)\cdot\cos\left(7\arccos\frac{1}{4}\right) -$

$-\frac{1}{16} + co$

$g(x) = -\sin\left(3\arccos\frac{1}{4}\right)\cdot\left(-\sin\left(7\arccos\frac{1}{4}\right)\right) - \sin^2\left(\arccos\frac{1}{4}\right) +$
$+ \cos^2\left(\pi + 5\arccos\frac{1}{4}\right) + 4 = \sin\left(3\arccos\frac{1}{4}\right)\cdot\sin 7\arccos\frac{1}{4} -$
$-\sin^2\left(\arccos\frac{1}{4}\right) + \cos^2\left(5\arccos\frac{1}{4}\right) + 4.$

Ответ: $g(x)_{min} = 4$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-21

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

③ Представим семь последовательно стоящих цифр „8" как один элемент. Обозначим его x.

Тогда всё число можно будет представить как:

X										
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Таким образом, x — как бы одна цифра 11-значного числа (вместо 7 цифр 17-значного).

Всего возможных положений ~~цифры~~ ~~числа~~ числа x — 11.

В условии сказано, что цифр 8 ровно 7. Тогда в оставшихся 10 положениях цифры „8" нет, они все находятся в числе x.

Тогда в оставшихся 10 клетках находятся либо 0, либо 7.

По условию, каждая цифра встречается хотя бы один раз. Значит, из этих 10 позиций 2 точно, однозначно заняты 0 и 7 соответственно.

X	0	7								
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Вариантов расстановки цифры 0 — 10, тогда цифры 7 — 9.

Остаётся 8 свободных ячеек, которые могут быть заняты либо 0, либо 7.

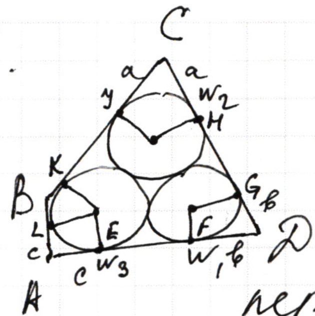
Вариантов расстановки 0 и 7 в восьми ячейках: 2^8.

Итого возможное количество 17-значных чисел:

$$11\cdot 10\cdot 9\cdot 2^8$$

Ответ: $11\cdot 10\cdot 9\cdot 2^8$

④ ~~АО~~ Пусть радиус окружностей 2R.

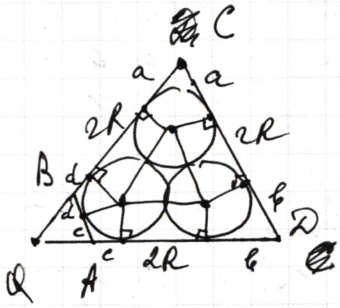


Обозначим точки касания как на рисунке.

По свойству ~~на~~ двух касательных к одной окружности и их точки пересечения:

$CY = CH = a$; $DG = DF = b$;

$AE = AL = c$; $BL = BK = d$.



Из рисунка: ~~$AB = c + d$~~ ~~$BC = d +$~~ окружности касаются одной прямой. Значит, прямая, соединяющая их радиусы параллельна прямой, которой они касаются.

Т.к. окружности касаются друг друга и имеют равные радиусы, то расстояние между их центрами равно 2R.

Из рисунка: $AB = c + d$; $BC = a + d + 2R$; $CD = a + b + 2R$;

$AD = \cancel{a}\, c + b + 2R$.

Отсюда

$BC + AD = a + d + 2R + c + b + 2R =$

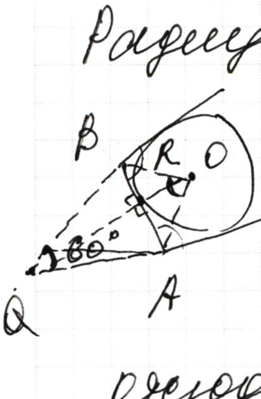
$= (c + d) + (a + b + 2R) + 2R = AB + CD + 2R$.

По условию $\cancel{AB+}\ AD + BC - AB - CD = 12$, т.е.

$AD + BC = AB + CD + 12$; отсюда $AB + CD + 12 = AB + CD + 2R$

$12 = 2R$, $R = 6$.

Радиус окружностей равен 6



3 отрезка, соединяющие центры окружностей, образуют равносторонний треугольник. Стороны AD, CD и BC четырехугольника параллельны сторонам равностороннего треугольника. Если продлить AD и BC до пересечения, то получится равносторонний треугольник.

Отсюда $\angle BCD = \angle CDA = 60°$ (Углы равносторон. треуг.)

Значит $a = b$ = $BQ = AQ$ (см. рисунок)

$c = d$

$AB = \cancel{2}\,2c$; $BC = a + c + 12$; $CD = 2a + 12$; $AD = a + c + 12 \Rightarrow BC = AD$;

~~Ра~~ Ответ: $R = 6$

$\angle BOA =$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9 - Д1

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5. $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4)\geq 1$

ОДЗ: $\begin{cases} (x+4)>0 \\ \sqrt{x+7}-x>0 \\ \sqrt{x+7}-x\neq 1 \\ x+7\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array} \begin{cases} x>-4 \\ \sqrt{x+7}>x \\ \sqrt{x+7}\neq x+1 \\ x\geq -7 \end{cases}$

(3) $\sqrt{x+7}=x+1$

$x+7=x^2+2x+1$

$x^2+x-6=0$, $D=1+24=25$, $x=\frac{-1\pm 5}{2}$ $\nearrow -3$, $\searrow 2$

проверка: $\sqrt{-3+7}=-3+1$

$\sqrt{4}=-2$ неверно.

$\sqrt{2+7}=2+1$

$\sqrt{9}=3$ верно.

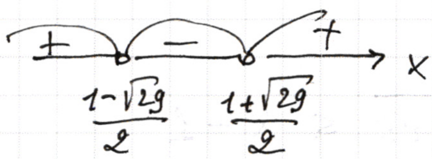
Значит, $x\neq 2$

(2) $\sqrt{x+7}>x$; при $x\leq 0$ верно

при $x>0$: $x+7>x^2$

$x^2-x-7<0$, $D=1+28=29$.

$x=\frac{1\pm\sqrt{29}}{2}$, $\cancel{x=\frac{1+\sqrt{29}}{2}}$ ~~($x=\frac{1-\sqrt{29}}{2}$ не подходит, т.к. $x>0$)~~.



$\cancel{x\in\left[\frac{1-\sqrt{29}}{2}\right]}$ $\begin{cases} x\in\left(\frac{1-\sqrt{29}}{2};\frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) \\ x>0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

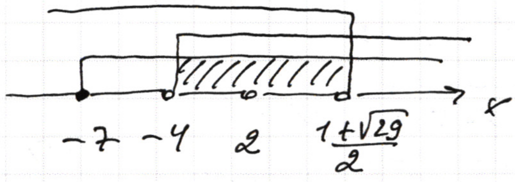
$\Leftrightarrow x \in \left(0; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

Значит, $x \in (-\infty; 0] \cup \left(0; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

$x \in \left(-\infty; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

Полное ОДЗ:

$$\begin{cases} x > -4 \\ x < \frac{1+\sqrt{29}}{2} \\ x \geq -7 \\ x \neq 2 \end{cases}$$



$x \in (-4; 2) \cup \left(2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

$\Downarrow$ $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$

$$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq \log_{\sqrt{x+7}-x}(\sqrt{x+7}-x).$$

$$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) - \log_{\sqrt{x+7}-x}(\sqrt{x+7}-x) \geq 0$$

$$\log_a b - \log_a c \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)(b-c) \geq 0.$$

$$(\sqrt{x+7} - x - 1)(x + 4 - \sqrt{x+7} + x) \geq 0.$$

$$(\sqrt{x+7} - x - 1)(2x + 4 - \sqrt{x+7}) \geq 0$$

Разобьём на два неравенства:

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - x - 1 \geq 0 \\ 2x + 4 - \sqrt{x+7} \geq 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \sqrt{x+7} - x - 1 \leq 0 \\ 2x + 4 - \sqrt{x+7} \leq 0 \end{cases}$$

~~(на ОДЗ~~

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} \geq x + 1 \\ \sqrt{x+7} \leq 2x + 4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \sqrt{x+7} \leq x + 1 \\ \sqrt{x+7} \geq 2x + 4 \end{cases}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-21

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le -1\\ x\ge -7\end{cases}\\ \begin{cases}x^2+x-6\le 0\\ x+1\ge 0\end{cases}\end{array}\right.\\ (2x+4)^2-x-7\ge 0\\ 2x+4\ge 0\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}x+1\ge 0\\ x^2+x-6\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x+4\le 0\\ x+7\ge 0\end{cases}\\ (2x+4)^2-x-7\le 0\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x\in[-7;-1]\\ \begin{cases}(x+3)(x-2)\le 0\\ x\ge -1\end{cases}\end{array}\right.\\ 4x^2+15x+9\ge 0,\ D=225-16\cdot 9=81\\ x\ge -2\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}x\ge -1\\ (x+3)(x-2)\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le -2\\ x\ge -7\end{cases}\\ 4(x+3)\left(x+\frac{3}{4}\right)\le 0\end{array}\right.\end{array}\right.$$

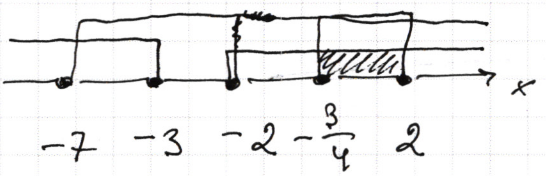
$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x\in[-7;-1]\\ x\in[-1;2]\end{array}\right.\\ 4(x+3)\left(x+\frac{3}{4}\right)\ge 0\\ x\ge -2\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}x\ge -1\\ x\in(-\infty;-3]\cup[2;+\infty)\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le -2\\ x\ge -7\end{cases}\\ x\in\left[-3;-\frac{3}{4}\right]\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$\cancel{x\in[-7;-1]}$

$$\begin{cases}x\in[-7;2]\\ x\in(-\infty;-3]\cup\left[-\frac{3}{4};+\infty\right)\\ x\ge -2\end{cases}$$

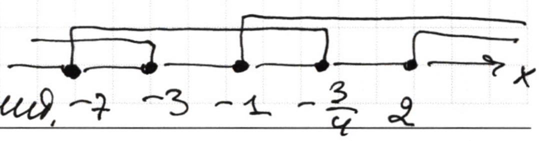
$$\left\{\begin{array}{l}x\ge -1\\ x\in(-\infty;-3]\cup[2;+\infty)\\ \left[\begin{array}{l}x\in[-7;-2]\\ x\in\left[-3;-\frac{3}{4}\right]\end{array}\right.\end{array}\right.$$



$x\in\left[-\frac{3}{4};2\right]$

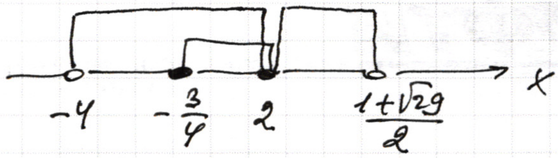
$$\begin{cases}x\ge -1\\ x\in(-\infty;-3]\cup[2;+\infty)\\ x\in\left[-7;-\frac{3}{4}\right]\end{cases}$$

Нет решений



☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$$\begin{cases} x \in \left[-\frac{3}{4}; 2\right] \\ x \in (-4; 2) \cup \left(2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) \end{cases}$$



$$x \in \left[-\frac{3}{4}; 2\right)$$

Ответ: $x \in \left[-\frac{3}{4}; 2\right)$

7. Число делится на 45 только если оно делится и на 9, и на 5.

Значит, чтобы число не делилось на 45, оно не должно заканчиваться на 0 или 5 и сумма его цифр не должна делиться на 9.

~~Значи~~ Значит, среди выбранных чисел не должно быть двух, чья разность соответствует указанным выше параметрам.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

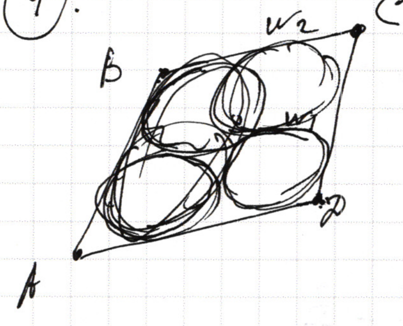
9-21

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(4).



$AD+BC-AB-CD=12.$

$R_1=R_2=R_3$

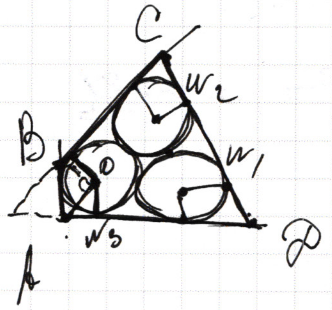
$(a^2+36)(z^2+36)=$
$=58^2.$

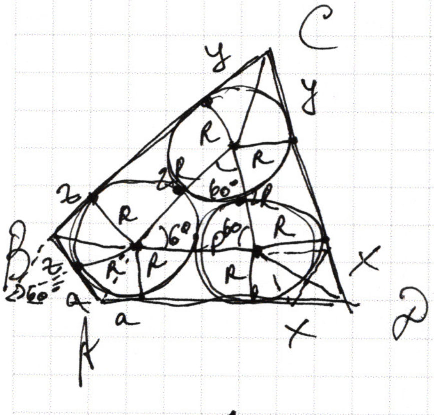
В ~~про~~ четырехугольник можно вписать фигуру если

$AD+BC=AB+CD.$

по условию ~~AB~~

$AD+BC=AB+CD+12.$





$AB=z+a$

$BC=y+z+2R$

$CD=y+x+2R$

$DA=a+x+2R$

$AO=\sqrt{a^2+36}$

$BO=\sqrt{z^2+36}.$

$\sqrt{(a^2+36)(z^2+36)}=58.$

$\sin\alpha = (z+a)\cdot\frac{1}{6}$

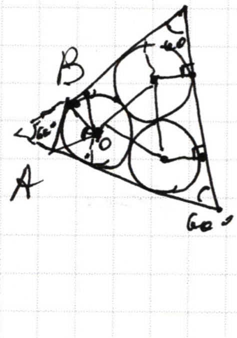
$\frac{AB}{6}.$

$\angle AOB=60°$

$\alpha=\beta+\gamma$

$tg\,\beta=\frac{z}{R};\ tg\,\gamma=\frac{a}{R},$

Радиус $=6$.



$x=y;$
$$\begin{cases} AB=z+a \\ BC=x+z+2R \\ CD=2x+2R \\ DA=a+x+2R \end{cases}$$

$AB=OD$

$AO\cdot BO=58$

$z=\frac{R}{tg\,30°}=\frac{6\cdot 2}{}=12.$

$z=a.$

$AB=z+a;\ BC=x+z+12;\ CD=2x+12;\ AD=a+x+12$

$AD+BC=AB+CD+12.$

$CD+AB+2R=AB+CD+12.$

$2R=12$

$R=6$

$BC+DA=2x+a+z+4R.$

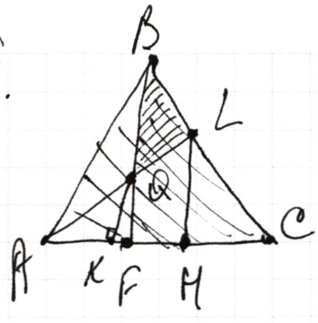
$BC+DA=(2x+2R)+(a+z)+2R.$

$BC+DA=CD+AB+2R.$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

⑥.

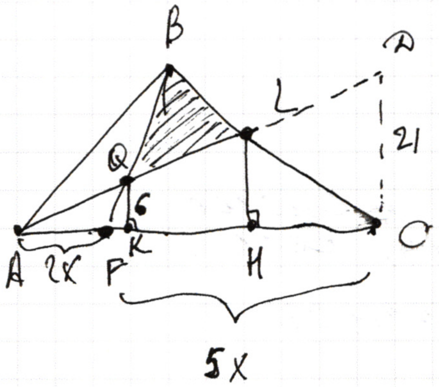


$AF : FC = 2:5$

$S_{BQL} : S_{BAC} = 5:12$

$QK = 6.$

$LH - ?$



$\triangle AQK \sim \triangle ALH$

$\triangle AQK \sim \triangle ADC$

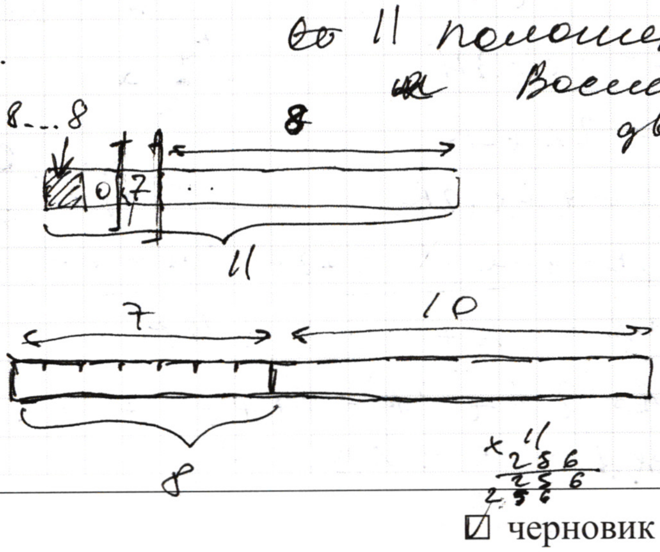
$k = \frac{AC}{AF} = \frac{7x}{2x} = \frac{7}{2}.$

$DC = \frac{Q}{K} \cdot k = 6 \cdot \frac{7}{2} = 3 \cdot 7 = \underline{21}$

⑨.

~~в~~ 11 положений 7 восьмёрок

~~и~~ Восемь положений для двух цифр.



$10 \cdot 9 \quad 11 \cdot 2^8 = 11 \cdot 256 = \boxed{2816.}$

16 16

$\times \frac{11}{256}$ 256 2816

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9 - 21

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$g(x) = \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 10x - 1 + \cos^2 x + \cos^2 5x + 4.$

$g'(x) = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot(-\sin 4x) + \frac{1}{2}\cdot 10\cdot \sin 10x + (-2\sin x\cos x) - 10\sin 5x\cos 5x$

$g'(x) = -2\sin 4x + \cancel{5\sin 10x} - \sin 2x - \cancel{5\sin 10x} = 0.$

$\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}$

$-2\sin 4x - \sin 2x = 0.$

$-4\sin 2x\cos 2x - \sin 2x = 0.$

$-\sin 2x(4\cos 2x + 1) = 0.$

$(\cos 5x\cdot\cos 5x)' =$

$= -5\sin 5x\cdot\cos 5x +$

$+ (\cos 5x\cdot(-5\sin 5x)) =$

$= -10\sin 5x\cos 5x.$

$\sin 2x = 0$ или $4\cos 2x + 1 = 0.$

$2x = \pi k, k\in Z.$

$\cos 2x = -\frac{1}{4}.$

Выделяем 2π.

$\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}$

(дальше значения sin/cos повторяются)

$\boxed{x = \frac{\pi k}{2}, k\in Z.}$

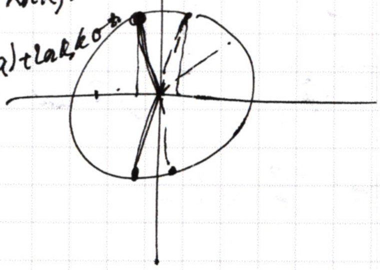
~~$2x = \pm(\pi - \arccos\frac{1}{4}) + \pi k$~~

$\cos x = a$

$x = \pm\arccos a + 2\pi k, k\in Z.$

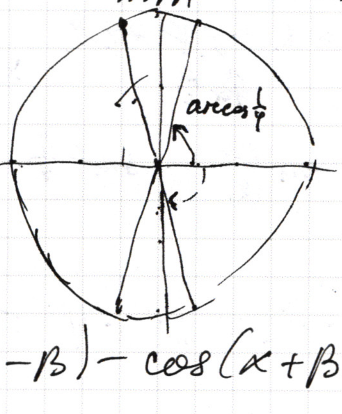
$\cos x = -a$

$x = \pm(\pi - \arccos a) + 2\pi k, k\in Z.$



$\frac{max}{min}$ при $\sin 2x = 0 \to x = \frac{\pi k}{2}$

или $\cos 2x = -\frac{1}{4}.$



$x = \pm\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4}\right) + \pi k$

$k\in Z.$

$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)) =$

$= \frac{1}{2}(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$

60

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

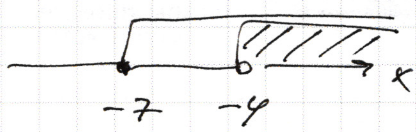
$30° + 30°$

$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} (1)\ \sqrt{x+7}\,(3x+5) \geq 2x^2+7x+11 \\ (2)\ x > -4 \\ (3)\ \sqrt{x+7} > x \\ (4)\ \sqrt{x+7} \neq x+1 \\ (5)\ x \geq -7 \end{cases}$$



$(2)\ (5) \Rightarrow \boxed{x > -4}$

(4): $x+7 \neq x^2+2x+1$.

$x^2+x-6 \neq 0$. $D = 1+24 = 25$.

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \to -3,\ \to 2$.

проверка:

$\sqrt{x+7} \overset{?}{\neq} x+1$

$\sqrt{7+2} \overset{?}{\neq} 2+1$, $\sqrt{9} \overset{?}{\neq} 3$ верно

$\sqrt{7-3} = 1-3$ неверно.

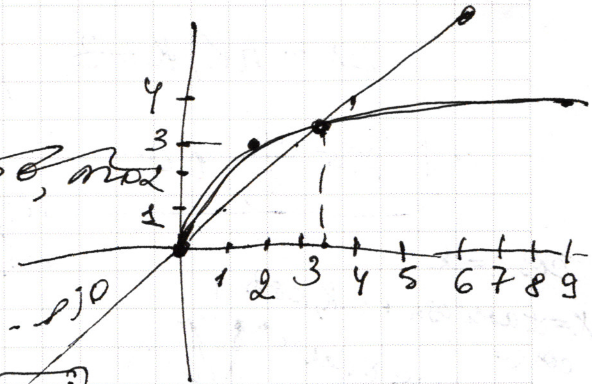
из (4): $x \neq 3$

из (3): $\sqrt{x+7} > x$,

$x+7 > x^2$

$x^2 - x - 7 < 0$.

$D = 1+28 = 29$.



$x = \sqrt{x+7}$ $x^2 - x - 7 = 0$.

$\frac{\pi}{2}$: $g(x) = \sin\frac{3\pi}{2}\sin\frac{7\pi}{2} - \sin^2\frac{\pi}{2} + \cos^2\frac{5\pi}{2} + 4 =$

$= -1\cdot(-1) - 1 + 0 + 4 = \underbrace{1-1}_{=0} + 4 = 4$ тонт.

$\frac{3\pi}{2}$: $g(x) = \sin\frac{9\pi}{2}\sin\frac{21\pi}{2} - \sin^2\frac{3\pi}{2} + \cos^2\frac{15\pi}{2} + 4 =$

$= 1\cdot 1 - 1 + 0 + 4 = 4$ тонт.

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9 - 21
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2. $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

$g'(x) = 3\cos 3x \cdot \sin 7x + \sin 3x \cdot 7\cos 7x - 2\sin x\cos x + (-2\sin x\cos x)$

$(\sin^2 x)' = (\sin x \cdot \sin x)' = \cos x \cdot \sin x + \sin x \cdot \cos x = 2\sin x\cos x$

$(\cos^2 5x)' = (\cos 5x \cdot \cos 5x)' = -5\sin 5x\cos 5x - 5\cos 5x \cdot \sin 5x = -10\sin 5x\cos 5x$

$g'(x) \cancel{= 3\sin 7x\cos 3x + 7\sin 3x\cos 7x - 4\sin x\cos x = 0}.$

$3 \cancel{\sin 7x\cos 3x + 7\sin 3x\cos 7x - 2\sin 2x = 0}.$

$g'(x) = 3\sin 7x\cos 3x + 7\sin 3x\cos 7x - 10\sin 5x\cos 5x - 2\sin x\cos x = 0.$

$\sin 3x \cdot \sin 7x = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x).$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\sin(30° + 60°) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$

$\cancel{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2 = \frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\overset{\cos}{\cancel{\sin}}(\alpha+\beta) - \overset{\cos}{\cancel{\sin}}(\alpha-\beta)\right)$

$\cancel{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\beta\alpha - \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}$

~~cos~~:

$\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta = -2$

$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)).$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

(5.) $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$ ОДЗ: $\begin{cases} (x+4)>0 \\ \sqrt{x+7}-x>0 \\ \sqrt{x+7}-x\neq 1. \\ x+7\geq 0 \end{cases}$

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq \log_{\sqrt{x+7}-x}(\sqrt{x+7}-x)$

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) - \log_{\sqrt{x+7}-x}(\sqrt{x+7}-x) \geq 0$

$\log_a b - \log_a c \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)(b-c)\geq 0.$

$a=\sqrt{x+7}-x$

$b=x+4$

$c=\sqrt{x+7}-x$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \end{array} \begin{cases} (\sqrt{x+7}-x-1)(x+4-\sqrt{x+7}+x)\geq 0 \\ x+4>0 \\ \sqrt{x+7}-x>0 \\ \sqrt{x+7}-x\neq 1 \\ x+7\geq 0. \end{cases}$$

(1): $(\sqrt{x+7}-x-1)(2x+4-\sqrt{x+7})\geq 0.$

$2x\sqrt{x+7}+4\sqrt{x+7}-\overset{-x-7}{(x+7)}-2x^2-4x+x\sqrt{x+7}-2x-4+$
$+\sqrt{x+7}\geq 0$

$3x\sqrt{x+7}+5\sqrt{x+7}-7x-2x^2-11\geq 0.$

$(3x+5)(\sqrt{x+7})-7x-2x^2-11\geq 0.$

$\sqrt{x+7}(3x+5)\geq 2x^2+7x+11.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-21

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(x+7)(3x+5)^2 \geq (2x^2+7x+11)^2.$

$\cancel{(x+7)(9x^2+30x+25) \geq (4x^4}$

$2x+4-\sqrt{x+7} \geq 0$

$\sqrt{x+7}-x-1 \geq 0.$

$\sqrt{x+7} \geq x+1 \Rightarrow \sqrt{x+7} > x+1.$

$(x+3)(x-2) < 0.$

$x \in (-3;2)$

$x+1 > 0$

$x > -1$

$x \in (-1;2).$

$-3;2$

$x < -1$

$x > -7$

$(-7;-1)$

$4x^2+16x+16-x-7 \geq 0 \quad -15 \quad -9$

-24

$-\frac{3}{4} \cdot 9 - 15 =$

$= \frac{6}{8}$

$4x^2+15x+9 \geq 0$

$D = 225-16\cdot 9 = (15-4\cdot 3)(15+12) = 3\cdot 27 = 81.$

$x_{1,2} = \frac{-15 \pm 9}{8}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

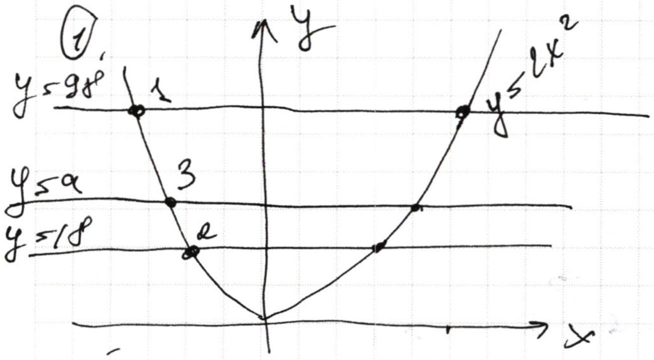
9-21

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(1)



~~$a=-26$~~
~~$a=10$~~

$a=-26$
не подходит,
т.к. $y=2x^2\geq 0$.

$a=10$

(1) ✓
(2) •
(3) ✓
(4)
(5) •
(6)
(7)

2^{84}
36

$316=4\cdot 79$

$\sin(160°-\alpha)=$

~~$\sin 60° \cos\alpha - \sin\alpha \cos 60° =$~~
~~$=\frac{\sqrt3}{2}\cos\alpha-\frac12\sin\alpha$~~

(1) $2x^2=98$, $x^2=49$
$x=\pm 7$.
первый отрезок $=14$.

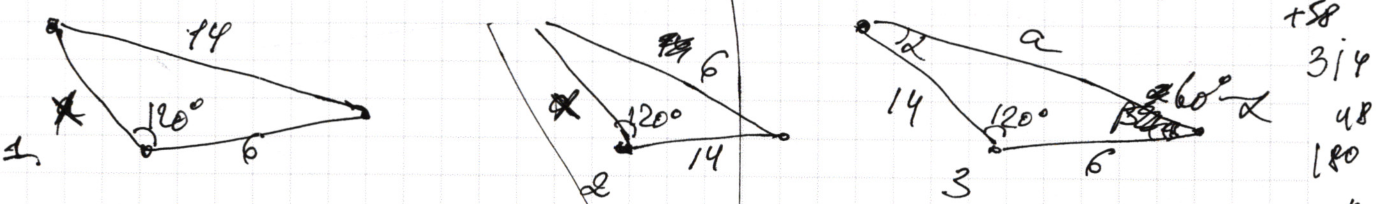
$$\begin{array}{r} 21 \\ \times 21 \\ \hline 21 \\ 42 \\ \hline 441 \\ +58 \\ \hline 499 \end{array}$$

(2). $2x^2=18$, $x^2=9$
$x=\pm 3$.
Второй отрезок $=6$.
три варианта;

60
$60+28$
88

$\frac{a}{\sin 120}$ $\frac{6}{\sin\alpha}=\frac{14}{\sin(60°-\alpha)}$

256+
+58
314
48
180
4



$14^2=a^2+36-12a\cos 120°$

$196=a^2+36+12a\cdot\frac12$

$a^2=160-6a$

$a^2+6a-160=0$.

$D=36+640=676$
$2\cdot 338=4\cdot 169$

$\sqrt{D}=2\cdot 13$

$a=\frac{-6\pm 2\cdot 13}{2}=-3\pm 13 \to \begin{matrix}-26\\10\end{matrix}$.

$36=a^2+14^2-28a\cos 120°$

$36=a^2+196+28a\cdot\frac12$

$-160=a^2+14a$

$a^2+14a+160=0$

$\varnothing$

(против большего угла большая сторона).

$a^2=14^2+36-28\cdot 6\cdot\cos 120°$

$a^2=196+36+128\cdot\frac12 a$

$a^2=232+64a$

$a^2-64a-232=0$,

$D=64^2+4\cdot 232=$

$=16\cdot(256+58)=$

$16\cdot 314$

~~$=16\cdot 499$~~

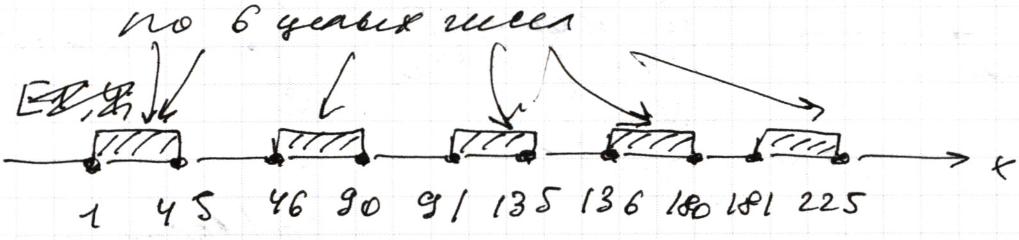
$a>14$.

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

7. Разность любых двух выбранных чисел $\vdots 45$ при $\vdots 9$ + $\vdots 5$.

Сумма цифр не делится на 9.
+ не заканчивается на 5 или 0.



Признак чисел.

0 1 2 3 4 5 6 7

max max

~~не обяз 0~~
~~не обяз 5.~~