

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2

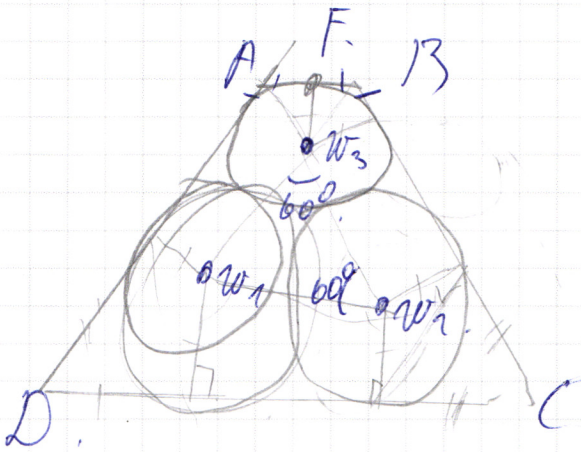
ШИФР

9-27

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120° ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.
3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
- а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.
- б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
- в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB .
5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.
7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№ 4.

Долю.

$$R_1 = R_2 = R_3 = R.$$

FB · FB =

$$\angle W_3 W_2 W_1 = \angle W_1 W_3 W_2 = 60^\circ.$$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin 5x \cdot \sin 9x - \cos 8x \cdot \cos 6x = -1$$

$$\frac{\cos \beta - \cos \alpha}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\frac{\cos \alpha + \cos \beta}{2} = -1$$

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 8 \quad \alpha = 14$$

$$\frac{\alpha - \beta}{2} = 5 \quad \beta = 4$$

~~$$\frac{\cos 14x - \cos 4x}{2}$$~~

$$\frac{\cos 4x}{2} - \frac{\cos 14x}{2} = \left(\frac{\cos \alpha + \cos \beta}{2} \right) = -1$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 8 \quad \alpha = 14$$

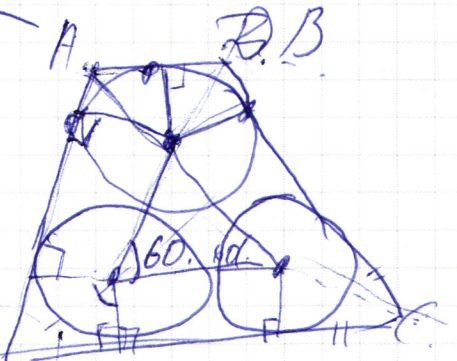
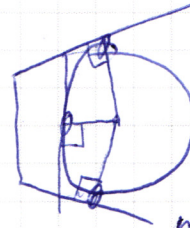
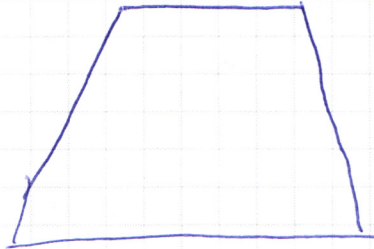
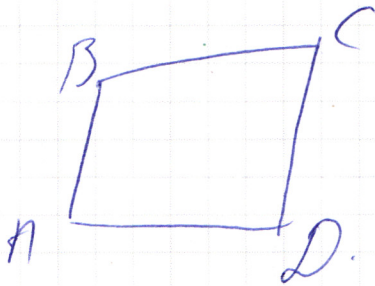
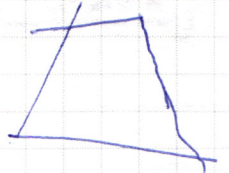
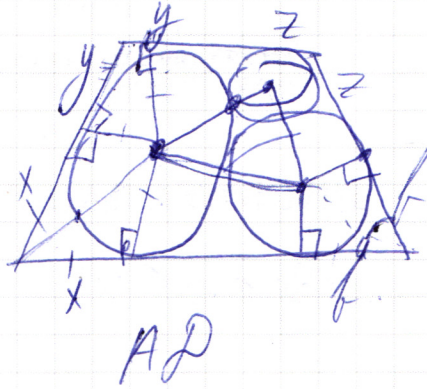
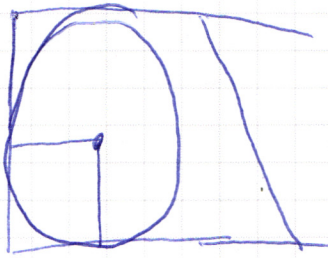
$$\frac{\cos 4x}{2} - \frac{\cos 14x}{2} = \frac{\cos 14x}{2} - \frac{\cos 2x}{2} = -1$$

$$\frac{\alpha - \beta}{2} = 6 \quad \beta = 2$$

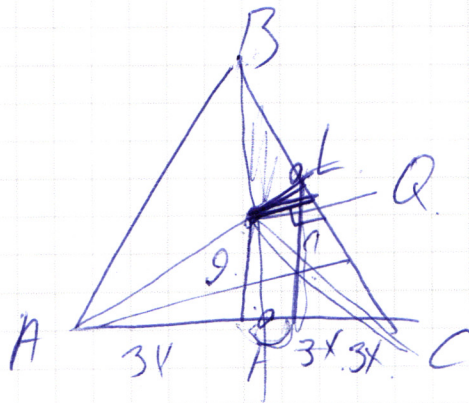
$$-\cos 14x = 1$$

$$\cos^2 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

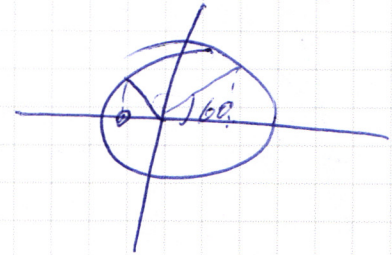
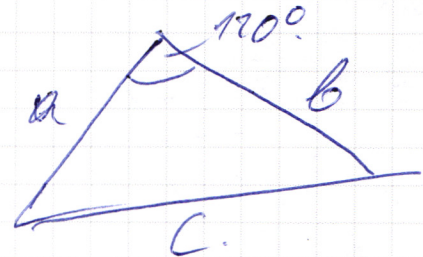
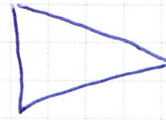
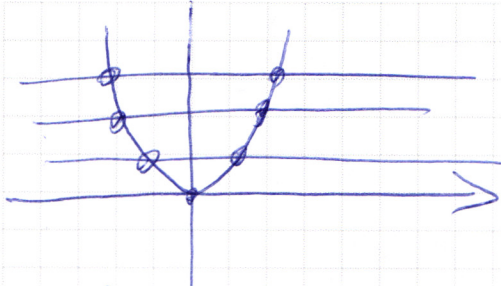
$$\cos^2 \alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2}$$



$$AD + BC - AC - CD = 10$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



1) $a < 64$.

$\cos(120^\circ)$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(120^\circ) = a^2 + b^2 + ab$

$a + b > c$

~~$a + 64 > c$~~

$169 = x^2 \quad x = \pm 13 \quad \boxed{26}$

$64 = x^2 \quad x = \pm 8 \quad \boxed{16}$

$x = \pm \sqrt{a}, 2\sqrt{a}$

$2\sqrt{a} + 16 > 26$
 $16 + 16 > 2\sqrt{a}$

$\sqrt{a} > 10$

$\sqrt{a} > 5$

$42 > 2\sqrt{a}$

$21 > \sqrt{a}$

$\frac{16}{42} + \frac{26}{42}$

$\sqrt{a} > 5$

$21.21 < a$

$\longrightarrow 0 \longrightarrow$

$a \geq 25$

$a \in (25; 941)$

$\frac{21}{21} + \frac{21}{42}$

II $y = 169 - \max$

$c^2 = a^2 + b^2 + ab$

$c^2 = 64 + 64 +$

$a^2 = 42^2 -$

$c^2 = (a+b)^2 - ab$

$a^2 = (26+16)^2 - 16 \cdot 26$

$26^2 = (16+a)^2 - 16a$

$a = t^2 \quad 2105$

$t^2 + 8t - 105 = 0 \quad 121 \cdot 4 = 2 \cdot 11$

$D = 64 + 420 = 484$

$\frac{-8 + 2 \cdot \sqrt{105}}{2} \quad (7)$

$\frac{8 \pm 22}{2}$

$$g(x) = \sin 5x + \sin 9x - \sin$$

$$\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) \geq 1$$

$$1) \sqrt{x+3} - x > 1$$

$$x+5 \geq \sqrt{x+3} - x$$

$$2x+5 \geq \sqrt{x+3}$$

$$\frac{d+\beta}{2} = 9x \quad d=14 \quad 2d=28$$

$$\frac{d-\beta}{2} = 5x$$

$$d+\beta = 18x$$

$$d-\beta = 10x$$

$$AD + BC - AB - CD = 10$$

OD3:

$$x+5 > 0$$

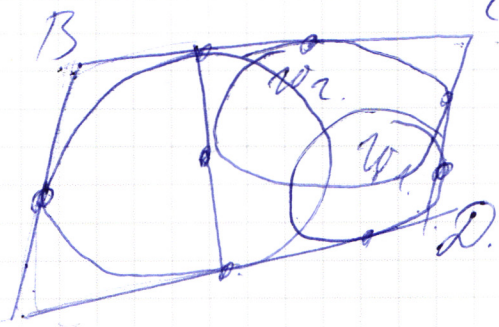
$$\sqrt{x+3} - x > 0$$

$$\sqrt{x+3} - x + 1$$

$$x > 0$$

$$x+3 > x^2$$

$$\frac{d+\beta}{d} = 8$$



$$[1; 33], [36; 70], [71; 105], [106; 140]$$

35.

$$\sin 5x + \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$$

$$\sin \left(\cos \alpha + \cos \beta \right) = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\frac{\cos 7x}{2} - \frac{\cos 2x}{2}$$

$$d+\beta = 8x$$

$$d-\beta = 5x$$

$$2d = 14x \quad d=7$$

$$\frac{\cos 7x}{2} - \frac{\cos 2x}{2} - \sin^2 7x - \cos^2 x \quad \beta = 2x$$

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha - 1$$

$$\begin{array}{r} 1248 \\ + 316 \\ \hline 1564 \\ + 1304 \\ \hline 2868 \\ + 1118 \\ \hline 3986 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 126 \\ + 126 \\ \hline 252 \\ + 156 \\ \hline 408 \\ + 676 + 256 + \\ \hline 1340 \end{array}$$

$$\frac{\cos 4x}{2} - \frac{\cos 14x}{2}$$

$$\begin{array}{r} 676 \\ - 256 \\ \hline 420 \\ + 105 \\ \hline 525 \end{array}$$

$$a = \frac{1248}{12} = 104$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2

$$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$$

$$\begin{aligned} & \sin 5x \cdot \sin 9x - 1 + \cos^2 7x - \cos^2 x - 3 = -1 + \cos^2 7x \\ & = \sin 5x \cdot \sin 9x + (\cos 7x - \cos x)(\cos 7x + \cos x) - 4 = \\ & = \sin 5x \cdot \sin 9x + \cos(-2 \sin 3x \cdot \sin 4x) + (2 \cos 4x \cdot \cos 3x) - 4 = \\ & = \sin 5x \cdot \sin 9x + (-\cos 8x \cdot \cos 36x) - 4 = \\ & = \sin 5x \cdot \sin 9x - \cos 8x \cdot \cos 36x - 4 \end{aligned}$$

$$\frac{\cos 4x}{2} - \frac{\cos 14x}{2} - \frac{\cos 14x}{2} - \frac{\cos 2x}{2} - 4$$

$$g(x) = -\cos 14x + \frac{\cos 4x}{2} - \frac{\cos 2x}{2} - 4$$

$$g(x) = -\cos 14x + \frac{2 \cos^2 2x - 1}{2} - \frac{\cos 2x}{2} - 4 =$$

$$= -\cos 14x$$

g min

$$\sin 5x \cdot \sin 9x - \cos 8x \cdot \cos 6x$$

$$\sin 5x (\sin 8x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos 8x) - \cos 8x (\cos 5x \cdot \cos x - \sin 5x \cdot \sin x)$$

$$\sin 5x \cdot \sin 8x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin 5x \cdot \cos 8x - \cos 8x \cdot \cos 5x \cdot \cos x + \cos 8x \cdot \sin 5x \cdot \sin x - 4$$

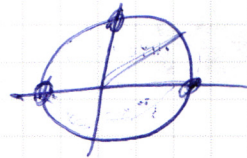
$$\cos x (\sin 5x \cdot \sin 8x - \cos 8x \cdot \cos 5x)$$

$$\cos x (-\cos 8x \cdot \cos 13x) - 4$$

$$g(x) = \cos 8x \cdot \cos 13x - 4$$

$$\min(g(x)) = \text{при } \cos x = 0.$$

$$\max \min(g(x)) = -3$$



$$\max(g(x)) =$$

$$\max(g(x)) \text{ когда } x = \pi$$

$$\min(g(x)) \text{ когда } x = \frac{\pi}{2}$$

$$\max(g(x)) = -3$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$$

$$\begin{aligned} \sin^2 7x + \cos^2 7x &= 1 \\ -1 + \cos^2 7x & \end{aligned}$$

$$\frac{\cos 7x}{2} - \frac{\cos 2x}{2} - \frac{\sin^2 7x}{2} - \cos^2 x - 3$$

$$g(x) = \frac{\cos 7x}{2} - \frac{\cos 2x}{2} - 1 + \cos^2 7x - \cos^2 x - 3$$

$$(\cos 7x - \cos x)(\cos 7x + \cos x) - 4$$

$$-2 \sin 4x \cdot \sin 3x \cdot (2 \cdot \cos 4x \cdot \cos 3x)$$

$$- \cos 8x \cdot \cos 6x$$

$$\sin 5x \cdot \sin 9x - \cos 8x \cdot \cos 6x - 4$$

$$\sin 5x \cdot \sin 9x$$

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 9x$$

$$\frac{\alpha - \beta}{2} = 5x$$

$$\alpha = 14x$$

$$\beta = 4x$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta =$$

$$\sqrt{x+3} - x < 1$$

$$x \in (-3; \frac{1+\sqrt{13}}{2})$$

$$x \in$$

$$x \in (-3; x \in (1; +\infty))$$

$$x \in (-3; \frac{1+\sqrt{13}}{2})$$

$$x \in (4; \frac{1+\sqrt{13}}{2})$$

$$\boxed{5, 7}$$

141.

Сумма точек не делится

(5)

1+2; 3; 4; 5. 49. 11.

18

18

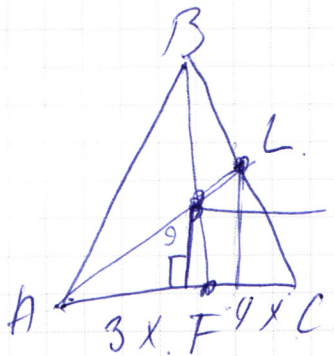
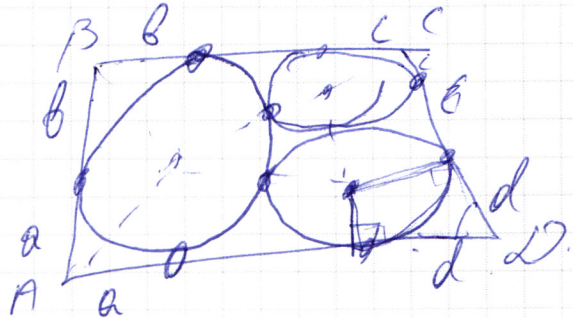
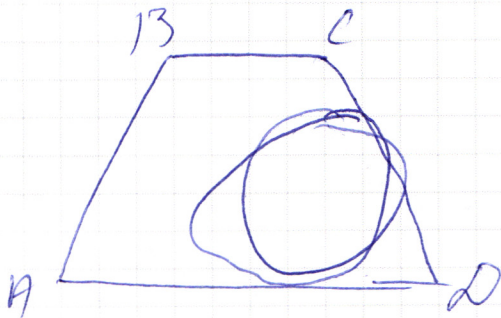
6⁵

0, 5, 9

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

↓² ↓²

55



$$AF : FC = 3 : 4$$

$$\frac{S(BQL)}{S(BAC)} = \frac{1}{16}$$

OM Q go AC = 9

$$\sqrt{x+3} > x+1$$

$$x > -1$$

$$x+3 > x^2+2x+1$$

$$0 > x^2+x-2$$

$$\frac{x(-2; 1)}{x(-1; 1)}$$

$$x+1 < 0$$

$$x < -1$$

$$x+3 > 0$$

$$x > -3$$

$$x(-3; -1)$$

$$\begin{array}{r} 1750 \\ + 325 \\ \hline 2075 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x 35 \\ \underline{+ 75} \\ x 35 \\ \underline{+ 75} \\ x 75 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x 25 \\ \underline{+ 75} \\ 325 \end{array}$$

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
- 11 12 13 14 15
- 16 17 18 19 20
- 21 22 23 24 25

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

Количество мест 18. цифрами "0", "5", "9"
~~количество мест~~ Пусть 5 и 6 ячеек будут

всегда заданы паттернами.

На остальные места можно поставить либо

0; либо 9.

когда паттерны начинаются с 1 позиции
количество вариантов размещения

$2^{12} - 2$. Поскольку мы не можем поставить

только "0" или только "9"

когда "5" - начинается не с 1 позиции.

то мы не можем поставить "0" на 1 позицию
или свободных местом 11. и цифра 9 уже
стоит.

Для одной 9: $2^{11} - 1$.

Для всего будет сумма вариантов.
 ~~$(7-6)+1$~~ $(2^{11}-1) + 2^{12}-2$

$$12 \cdot (2^{11}-1) + 2^{12}-2 = 6 \cdot 2^{12} - 12 + 2^{12} - 2$$

$$7 \cdot 2^{12} - 14$$

Ответ количество вариантов $7 \cdot 2^{12} - 14$.

№7.

Разностью остатков от деления числа на 35.

(0, 1, 2, 3 ... 34)

Если разность чисел будет иметь остаток 0 то все числа разность чисел будет делиться на 35.

В нашем случае если остаток чисел от деления на 35 одинаковы, то числа будут разность чисел будет делиться на 35.

Можно число выбрать 25 чисел - и у них будут разные остатки.

Возьмем остатки от 1 до 25.

Их сумма будет вычисляться.

$$\frac{25 \cdot (26)}{2} = 25 \cdot 13 = 325.$$

С каждой числу можно взять по пять чисел все части от деления числа прибавим к остаткам

$$35 \cdot 0 \cdot 5 + 35 \cdot 1 \cdot 5 + 35 \cdot 2 \cdot 5 + 35 \cdot 3 \cdot 5 + 35 \cdot 4 \cdot 5 = \\ = 35 \cdot 5 (1 + 2 + 3 + 4) = 10 \cdot 35 \cdot 5 = 1750.$$

$$\text{Окончательная сумма будет } 1750 + 325 = \\ = 2075.$$

Ответ: сумма будет 2075.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$a + 8\sqrt{a} - 105 = 0. \quad \text{Пусть } t^2 = a$$

$$D = t^2 + 8t - 105 = 0$$

$$D = 64 + 420 = 484 = (22)^2$$

$$t_1 = \frac{-8 - 22}{2} - \sqrt{a} > 0$$

$$t_2 = \frac{-8 + 22}{2} = 7.$$

$$\sqrt{a} = 7.$$

$$a = 49.$$

$$a = 49$$

Ответ $a = 49$

$a = 312$

$$\log_{\sqrt{x+3}} - x (\sqrt{x+5}) \geq 1. \quad \text{НС.}$$

$$I) \sqrt{x+3} - x > 1.$$

$$(x+5) \geq \sqrt{x+3} - x.$$

$$\sqrt{x+3} > x+1.$$

$$2\sqrt{x+3} > 2x+2.$$

$$I. i. x + x + 1 > 0.$$

$$x+3 > x^2 + 2x + 1.$$

$$x^2 + 10x + 25 > 0.$$

$$4x^2 + 10x + 25 \geq x+3$$

$$x \in (-3; 1)$$

$$2\sqrt{x+5} \geq \sqrt{x+3}.$$

$$1) x + 2\sqrt{x+5} > 0. \quad x > -\frac{5}{2}$$

$$4x^2 + 10x + 25 \geq x+3$$

$$4x^2 + 9x + 22 \geq 0$$

$$x = 0 \quad \Delta = 81$$

$$x \in (-\frac{5}{2}; +\infty)$$

$$OДЗ: \sqrt{x+5} > 0$$

$$x > -5.$$

$$\sqrt{x+3} - x > 0.$$

$$\sqrt{x+3} > x.$$

$$1) x \geq 0.$$

$$x+3 \geq x^2$$

$$0 \geq x^2 - x - 3.$$

$$x \in [0; \frac{1+\sqrt{13}}{2}]$$

$$x < 0.$$

$$x+3 > 0.$$

$$x > -3.$$

$$x \in (-3; 0)$$

$$x \in (-3; \frac{1+\sqrt{13}}{2})$$

$$\sqrt{x+3} - x + 1.$$

$$x^2 + x - 2 \neq 0.$$

$$x_1 = 1.$$

$$x_2 = -2.$$

$$OДЗ:$$

$$x \in (-3; -2) \cup (1;$$

$$1 + \frac{1+\sqrt{13}}{2})$$

$$\frac{1+\sqrt{13}}{2})$$

черновик

чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 3

(Нумеровать только чистовики)

$$\text{П102 } \sqrt{x+3} - x < 1$$

$$x \in \left(1; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$$

$$(x+5) \leq \sqrt{x+3} - x$$

$$2x+5 \leq \sqrt{x+3}$$

$$1) 2x+5 \leq 0$$

$$x \leq -\frac{5}{2}$$

$$x \in \left(-3; -\frac{5}{2}\right)$$

\emptyset

$$2) 2x+5 > 0$$

$$4x^2 - 2x + 5$$

$$2x+5 \geq \sqrt{x+3}$$

$$4x^2 + 10x + 25 \leq x+3$$

$$4x^2 + 9x + 22 \leq 0$$

$$D < 0$$

$$x \in \emptyset$$

~~Видовий~~

Нет решений для второго случая

то $x \in \left(-\frac{5}{2}; 1\right)$

с учетом ОДЗ $x \in \left(-\frac{5}{2}; -2\right) \cup (-2; 1)$

Ответ $x \in \left(-\frac{5}{2}; -2\right) \cup (-2; 1)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

~~$\log_{\sqrt{x+3}}(x+5) \geq 1$~~

~~1) $\sqrt{x+3} - x > 1$~~

~~$\sqrt{x+3} > x+1$~~

~~1.1) $x+1 \geq 0, x \geq -1$~~

~~$x+3 > x^2+2x+1$~~

~~$0 \geq x^2+x-2$~~

~~$x_1 = 1$~~

~~$x_2 = -2$~~

~~$x \in (-2; 1)$~~

~~$x \in [-1; 1]$~~

~~1.2 $x+1 \leq 0, x \leq -1$~~

~~$x+3 \geq 0, x > -3$~~

~~$x \in (-3; -1)$~~

~~$0 < \sqrt{x+3} - x < 1$~~

~~$\sqrt{x+3} - x > 0$~~

~~$\sqrt{x+3} - x < 1$~~

~~$\sqrt{x+3} > x$~~

~~$\sqrt{x+3} < x+1$~~

ОДЗ

$x+5 > 0$

$x > -5$

~~$\sqrt{x+3} \cdot x > 0$~~

~~$\sqrt{x+3} > x$~~

1) $x > 0$

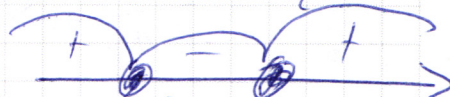
$x+3 > x^2$

$0 \geq x^2 - x - 3$

$D = 1 + 12 = 13$

$x_1 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$

$x_2 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$



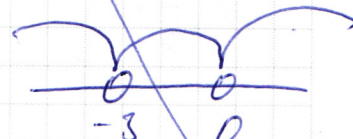
$\frac{1 - \sqrt{13}}{2} \quad \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$

$x \in [0; \frac{1 + \sqrt{13}}{2}]$

$x < 0$

$x+3 > 0$

$x > -3$



$x \in (-3; 0)$

$x \in (-3; 0) \cup [0; \frac{1 + \sqrt{13}}{2}]$

~~$\sqrt{x+3} - x \neq 1$~~

~~$\sqrt{x+3} \neq x+1$~~

~~$x+3 = x^2+2x+1$~~

~~$x^2+x-2 \neq 0$~~

~~$x_1 = 1$~~

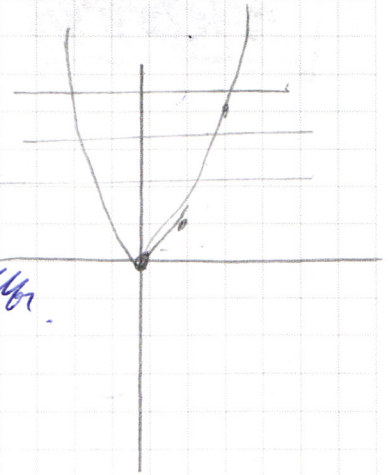
~~$x_2 = -2$~~

ОДЗ:

$x \in (-3; -2) \cup (-2; 1) \cup$

$\cup (1; \frac{1 + \sqrt{13}}{2}) \cup (2; \dots)$

$$y = x^2 \quad y_1 = 169; \quad y_2 = 64; \quad y_3 = a.$$



Решим уравнения чтобы высчитать длину каждой стороны.

$$x_1^2 = 169$$

$$x_2^2 = 64$$

$$x_3^2 = a$$

$$x_1 = \pm 13 \quad \text{длина первой стороны } a$$

$$x_2 = \pm 8$$

$$x_3 = \pm \sqrt{a}$$

$$f_1 = 13 \cdot 2 = 26$$

$$f_2 = 8 \cdot 2 = 16$$

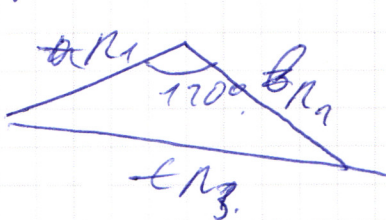
$$f_3 = 2\sqrt{a}$$

Известно, что любые

Сумма любых двух сторон

больше третьей

$$\begin{cases} f_1 + f_2 > f_3 \\ f_3 + f_2 > f_1 \end{cases} \quad \begin{cases} 26 + 16 > 2\sqrt{a} \\ 2\sqrt{a} + 16 > 26 \end{cases} \quad \begin{cases} 48 > 2\sqrt{a} \\ \sqrt{a} > 10 \end{cases} \quad \begin{cases} 24 > \sqrt{a} \\ \sqrt{a} > 5 \end{cases}$$



Угол против наибольшей стороны больше максимален.

$$\cos(110) = -\frac{1}{2}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(110)$$

1) Пусть $2\sqrt{a}$ - будет максимална тогда.

II - случай максимална. Ли сторона 26.

$$(2\sqrt{a})^2 = (26)^2 + (16)^2 + 16 \cdot 26$$

$$(26)^2 = (16)^2 + a(2\sqrt{a})^2 + 16 \cdot 2\sqrt{a}$$

$$(2\sqrt{a})^2 = 676 + 256 + 316$$

$$676 = 256 + 4a + 16 \cdot 2\sqrt{a}$$

$$(2\sqrt{a})^2 = 1248$$

$$\sqrt{120} = 4a + 16 \cdot 2\sqrt{a}$$

$$2\sqrt{a} < 48$$

$$(2\sqrt{a})^2 < 48^2 \quad 48^2 = 1304$$

Этот равенство приводит к $a + 48\sqrt{a} - 105 = 0$.

$$4a = 1248 \quad a = 312$$

$$\boxed{a = 312}$$