ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

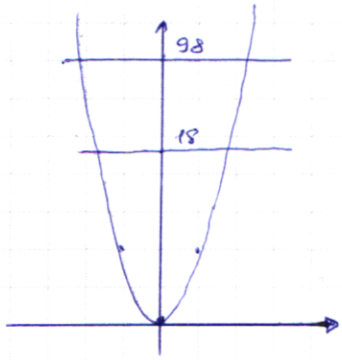
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-058

ШИФР

(заполняется секретарём)

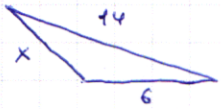
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№1.

Парабола $y=2x^2$ пересек. $y=98$ в точках : $98=2x^2 \Rightarrow x=\pm 7 \Rightarrow$ длина отрезка $=14$.
Парабола $y=2x^2$ пересек. $y=18$ в точках $18=2x^2 \Rightarrow x=\pm 3 \Rightarrow$ длина отрезка $=6$

Нам нужно составить треугольник с углом $120°$ в котором известны две стороны: 6 и 14. Очевидно, что у стороны, равной 6, противолежащий угол не м.б. равен $120°$ (т.к. $6<14$, а против большей стороны лежит больший угол). Значит, остается два случая: (обозначим неизв. сторону за x)

1) 

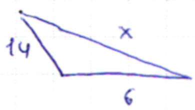
$\Rightarrow$ по т. косинусов: $196 = x^2+36-12x\cos 120°$

$196 = x^2+36+6x$

$x^2+6x-150=0$

$x = \dfrac{-6\pm\sqrt{36+600}}{2} = -3\pm\sqrt{159}$. Подходит только $x=\sqrt{159}-3$, т.к. сторона >0. $\Rightarrow$ перес. в точках $\pm\dfrac{\sqrt{159}-3}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 2\cdot\dfrac{159+3-6\sqrt{159}}{4} = \dfrac{162-6\sqrt{159}}{2} = 81-3\sqrt{159} = a$

2) 

$x^2 = 196+36+2\cdot\frac{1}{2}\cdot 14\cdot 6 = 196+36+64 = 296$

$x=\sqrt{296} = 2\sqrt{74} \Rightarrow$ параб. перес. прямую $y=a$ в точках $\pm\sqrt{74}=x$: $y=2x^2 = 2\cdot 74 = 148 \Rightarrow a = 148$

Ответ $148=a$; $a=81-3\sqrt{159}$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№ 3

1 случай. Семерка восьмерок идет с первой позиции => остается 10 мест, каждое из которых можно заполнить двумя способами. Получается $2^{10} = 1024$ способа.
Но нужно вычесть 2, т.к. у нас должны встреч. все цифры => $1024 - 2 = 1022$ способа

2 случай. Семерка восьмерок идет не с первой позиции, а со второй по восьмую, с 3ей по девятую и т.д.
В этих случаях первое место может заниматься только семеркой (т.к. с 0 число начинаться не может, а все остальные $17 - 8 - 1 = 9$ цифр можем поставить 2^9 способами -1, т.к. нужно вычесть способ, в котором все семерки. Получаем 511 способов.
Передвигать семерку восьмерок мы можем 10-ю способами, смещая ее начало со 2ой позиции до 11-ой. Получаем: $10 \cdot 511$ способов

Складывая 1 и 2 случаи, получаем: $5110 + 1022 = 6132$ способов, а значит, 6132 чисел.

Ответ: 6132 чисел.

№ 7.

Заметим, что все числа во всех пяти промежутках содержат все остатки по модулю 45. Очевидно, что любое, даже наим. число из каждого промежутка, в котором числа больше чем в другом, больше чем даже наибольшее число в другом промежутке, в котором все числа меньше (я имею в виду, что, например, любое число из промежутка [136; 180] больше чем любое из чисел в промежутке [46; 90]. Значит, из каждого большего промежутка нам надо стараться выбирать наименьшие числа => из промежутка [181; 225] мы выберем числа сравнимые по модулю 45 с 1, 2, 3, 4, 5, 6 : 181, 182, 183, 184, 185, 186.
На промежутке [136; 180] мы не можем выбрать числа, дающие остатки 1, 2, 3, 4, 5, 6 по мод. 45. Придется взять сравнимые по модулю с 7, 8, 9, 10, 11, 12 и т.д... Напишем, числа, сравнимые с чем по модулю 45, мы будем брать из каждого промежутка:

остатки

[181; 225]	- 1, 2, 3, 4, 5, 6
[136; 180]	- 7, 8, 9, 10, 11, 12
[91; 135]	- 13, 14, 15, 16, 17, 18
[46; 90]	- 19, 20, 21, 22, 23, 24
[1; 45]	- 25, 26, 27, 28, 29, 30

Сумма данных чисел равна:

$25 + 26 + 27 + 28 + 29 + 30 + 64 + 65 + 66 + 67 + 68 + 69 + 103 + 104 + 105 + 106 + 107 + 108 + 142 + 143 + 144 + 145 + 146 + 147 + 181 + 182 + 183 + 184 + 185 + 186 =$

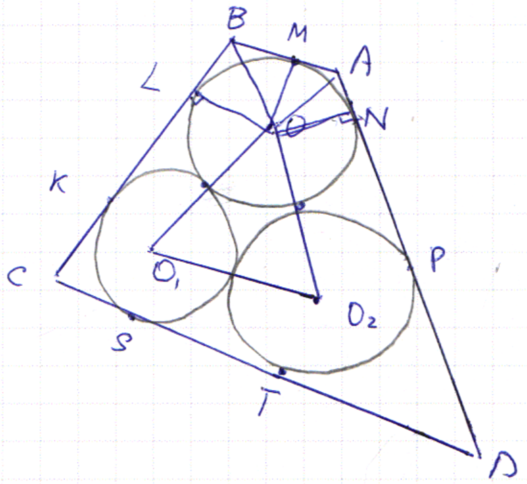
$= 15 \cdot 5 + 25 \cdot 6 + 64 \cdot 6 + 103 \cdot 6 + 142 \cdot 6 + 181 \cdot 6 = 75 + 6(25 + 64 + 103 + 142 + 181) =$

$= 3090 + 75 = 3165.$

Ответ: 3165.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№4.

а) Введем обозначения как на рисунке. Заметим, что $MA = AN$, $BM = BL$ и т.д. как отрезки касательных.

$\Downarrow$

$AD + BC - AB - CD = 12 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow NP + LK - ST = 12$

Также заметим, что линия центров проходит через точку касания этих окружностей (из-за симметрии) и четырехугольники $ONPO_2$, O_2TSO_1, O_1KLO – прямоугольники, т.к. касательные перпендикулярны линиям, соед. радиусы с точкой касания.

Значит, $NP + LK - ST = 12 \Leftrightarrow 4R = 12 \Leftrightarrow \boxed{R = 3}$

б) $\triangle OO_1O_2$ – равносторонний, т.к. все его стороны – два радиуса

$\angle LON = 360^\circ - 60^\circ - 180 = 120^\circ$

Аналогично: $\angle BOM = \frac{1}{2}\angle LOM$ (BO – бис-са в дельтоиде)

$\angle AOM = \frac{1}{2}\angle MON$ (AO – бис-са в дельтоиде) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BOA = \frac{1}{2}\angle LON = \boxed{60^\circ}$

Ответ: а) 3 ; б) 60°

№ 5.

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$

1) Запишем ОДЗ: $x+4>0 \Leftrightarrow x>-4$

$\sqrt{x+7}-x \neq 1 \Rightarrow x+7 = x^2+2x+1 \Rightarrow x^2+x-6=0 \Rightarrow x = \frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1\pm 5}{2}$ $\left[\begin{matrix}-3\\2\end{matrix}\right.$

$\Rightarrow x\neq -3;\ x\neq 2.$

$\sqrt{x+7}-x>0 \Leftrightarrow x+7>x^2 \Leftrightarrow x^2-x-7<0$

$x=\frac{1\pm\sqrt{1+28}}{2} \Rightarrow x\in\left(\frac{1-\sqrt{29}}{2};\frac{1+\sqrt{29}}{2}\right).$

$x+7\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -7.$

2) Будем решать по случаям:

1. $0<\sqrt{x+7}-x<1$: $(x+4)\leq\sqrt{x+7}-x \Leftrightarrow \sqrt{x+7}\geq 2x+4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+7\geq 4x^2+16x+16 \Leftrightarrow 4x^2+15x+9\leq 0$

$x_{1,2} = \frac{-15\pm\sqrt{225-144}}{8} = \frac{-15\pm 9}{8}$ $\left[\begin{matrix}-3\\-\frac{3}{4}\end{matrix}\right.$

$\Rightarrow x\in[-3;-\frac{3}{4}]$. По ОДЗ $x\in(\frac{1-\sqrt{29}}{2};-\frac{3}{4}]$.

Теперь надо учесл $\sqrt{x+7}-x<1$: $\sqrt{x+7}<x+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+7<x^2+2x+1 \Leftrightarrow x^2+x-6>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-3)\cup(2;\infty).$

$\Rightarrow$ нам не подходит получ. значени.

2. $\sqrt{x+7}-x>1 \Rightarrow x\in(-3;2)$. (*)

$(x+4)\geq\sqrt{x+7}-x \Leftrightarrow \sqrt{x+7}\leq 2x+4 \Leftrightarrow x+7\leq 4x^2+16x+16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x^2+15x+9\geq 0 \Rightarrow x\in(-\infty;-3]\cup[-\frac{3}{4};\infty).$

С учетом (*) нам подходит только $[-\frac{3}{4};2)$.

Ответ: $x\in[-\frac{3}{4};2)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2.

$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 =$

$= \frac{\cos 4x - \cos 10x}{2} - \sin^2 x + \frac{1 + \cos 10x}{2} + 4 =$

$= \frac{\cos 4x + 1}{2} + 3 + \cos^2 x = \frac{2\cos^2 2x - 1 + 1}{2} + 3 + \cos^2 x =$

$= \cos^2 2x + 3 + \cos^2 x = (2\cos^2 x - 1)^2 + 3 + \cos^2 x = 4\cos^4 x - 3\cos^2 x + 4$

Введем обозначения $\cos^2 x = t$, $t \in [0; 1]$.

Получим $\varphi(t) = 4t^2 - 3t + 4$.

$\varphi'(t) = 8t - 3 \Rightarrow t = \frac{3}{8}$

$\varphi(0) = 4$

$\varphi(1) = 5$ - наиб. знач.

$\varphi(\frac{3}{8}) = 4 \cdot \frac{9}{64} - \frac{9}{8} + 4 = \frac{9}{16} - \frac{9}{8} + 4 =$

$= \frac{9 + 64 - 18}{16} = \frac{55}{16}$ - наим. знач

Ответ: $\cancel{\frac{3}{8}}$ - $\frac{55}{16}$ - наим. значение

5 - наибольшее значение

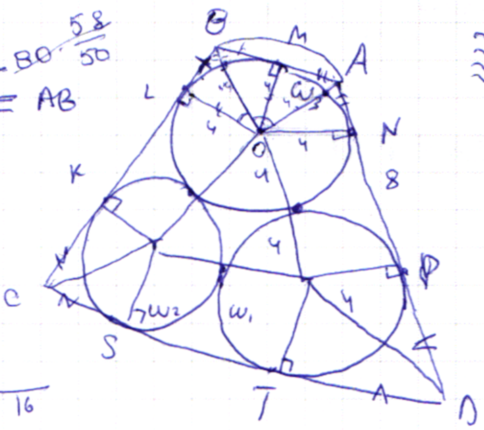
$AO = \frac{58}{BO}$

$BO^2 + \frac{58^2}{BO^2} = AB$ ~~$BO \cdot \frac{58}{50}$~~

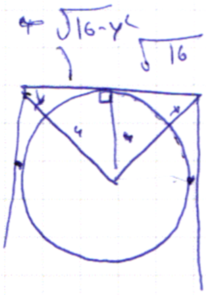
~~3a~~ m.koc.

A

$AO \cdot BO = 58$



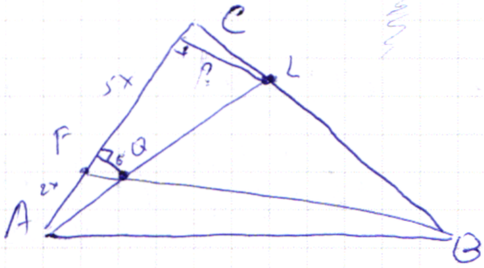
$NP - LK - 57 = 12$



$\frac{BQL}{\Delta BAC} = \frac{5}{12}$

$x \cdot (1$

6



$\frac{1-\sqrt{29}}{2} \vee -3$

$1-\sqrt{25} \vee -6$

$-\sqrt{25} \vee -7$

$x+4 \geq (\sqrt{x+7} - x)$

$(\sqrt{x+7} - x)(x+4-\sqrt{x+7}+x) \geq 0$

$(\sqrt{x+7} - x)(2x+4-\sqrt{x+7}) \geq 0$

$\sqrt{x+7} - x > 1$

$x+7 > x^2+2x-6$

$x+7 > x^2+2x+1$

$x^2+x-6 < 0$

$\cos^2 5x = \frac{1+\cos 10x}{2}$

~~$\sin 4x - \sin 10x$~~

$\frac{\cos 4x - \cos 10x + 1 + \cos 10x}{2}$

$\cos 2x -$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$\frac{\cos 4x + 1}{2} + 4 - \sin^2 x =$

$= \frac{2\cos^2 2x - 1 + 1}{2} + 4 - \sin^2 x = \cos^2 2x + \cos^2 x + 3$

$4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1 + \cos^2 x + 3 =$

$= 4\cos^4 x - 3\cos^2 x + 4$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-058

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

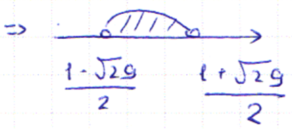
Напишем ОДЗ: $x + 4 > 0 \iff x > -4$

$\sqrt{x+7} - x \neq 1 \Rightarrow \sqrt{x+7} = x+1 \iff x^2+2x+1 = x+7 \iff x^2+x-6=0 \iff$

$\iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1\pm 5}{2} \quad \left[\begin{array}{l}-3\\2\end{array}\right. \Rightarrow x \neq -3,\ x \neq 2$

$x+7>0 \Rightarrow x>-7.$

$\sqrt{x+7} - x > 0 \iff \sqrt{x+7} > x \iff x+7 > x^2 \Rightarrow x^2 - x - 7 < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ 

$\Rightarrow x \in \left(\frac{1-\sqrt{29}}{2}; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{x \in \left(\frac{1-\sqrt{29}}{2}; -3\right) \cup (-3; 2) \cup \left(2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)}$

$\cancel{x \in (-3; 2)}$

~~с учетом всех ОДЗ.~~

Теперь будем решать на ОДЗ:

1) $\sqrt{x+7} - x \in (0; 1)$:

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \leq \log_{\sqrt{x+7}-x} \sqrt{x+7} -$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\cos^2 5x + \cos^2 x$

$a^2 + b^2 + c^2 - 2c \cos$

8 чис

$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

30 чис

$15 - 9 = 6$

aaa
bbb
aab
abb
aba

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \ldots$

$\cos(\alpha-\beta) = \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$225 - 144 = 81$

$\cos(\alpha+\beta) = -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta$

$$\frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2} = \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\frac{\cos 4x - \cos 11x}{2}$$

2 … 8 … 8 11, 12, 13, 14, 15, 16 17

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 - 10

$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+28}}{2}$ $\frac{1 \pm \sqrt{25}}{2}$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$

$16 + 9 = 144$

$\cos 4x$

$81 - 39$

$81 - 36 =$

$159 \cdot 11$

$144 \cdot 169$

$\frac{1-6}{2} =$

$\frac{1-6}{2}$

$(4x)'$

$= 4$

$\frac{1-\sqrt{29}}{2} \vee -3$

13

$\log_a b > 1$

$-x > \sqrt{x+7}$

$73 - 18 = 55$

$\frac{1-\sqrt{29}}{2} \vee -3$

$1-\sqrt{29} \vee -6$

$1 - \sqrt{29} \vee -6$

$1 - 2\sqrt{29} + 29 \vee 36$

$-\sqrt{29} \vee -7$

$6 \vee 2\sqrt{29}$

$3 \vee \sqrt{29}$

$<$

$\sqrt{x+7} - x$

$\frac{9}{64} \cdot 4 = \frac{36}{64}$

$\frac{64+9-18}{16} = \frac{55}{16}$

$\sqrt{x+7} > x$

$73 - 18 = 55$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-058

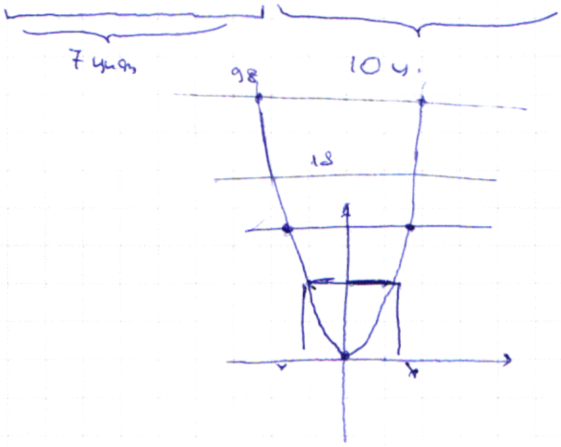
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) - \log_{\sqrt{x+7}-x}(\sqrt{x+7}-x) \geq 0$



$\sqrt{159} = 13-3$

$y = 2x^2 \Rightarrow y = 98 \Rightarrow x = \pm 7$

$y = 18 \Rightarrow x = \pm 3$

отв $= 6,\ 14$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$\cos 120^\circ = \cos(\pi - 60) =$

$= -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

$636 : 4 = 159$

$159 : 3 = 53$

$14 \cdot 6 = 64$

$[14, 6]$

$196 + 36 + 64 = 296$

$196 = 36 + x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot 6$

$x^2 + 6x - 150 = 0$

$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 600}}{2}$

$636 : 4 = 159$

$296 : 4 = 74$

$74 = 2 \cdot 37$

$\log_a b > c \Rightarrow (a-1)(b-c) > 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

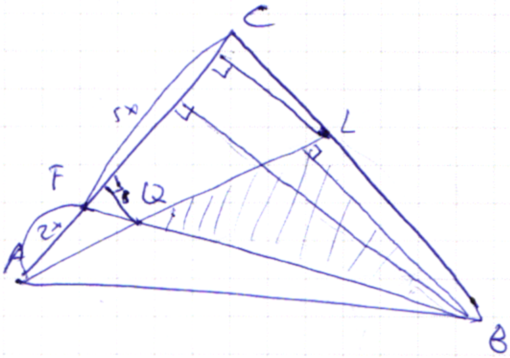
(Нумеровать только чистовики)

181
182
183
184
185
186

$$\begin{array}{r} 46 \\ +\ 18 \\ \hline 64 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 91 \\ +\ 12 \\ \hline 103 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 136 \\ +\ 6 \\ \hline 142 \end{array}$$

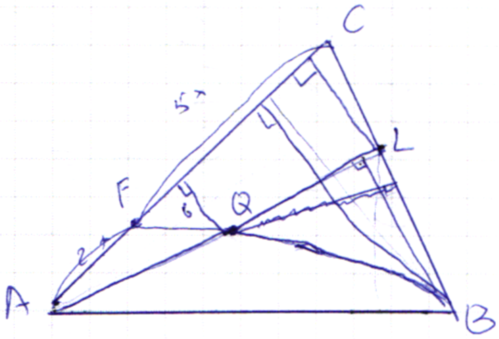


$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{5}{12}$

$1+2+3+4+5 = 15$

$$\begin{array}{r} 2\ 1 \\ 181 \\ 142 \\ 103 \\ 64 \\ 25 \\ \hline 515 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 515 \\ \times\ 6 \\ \hline 3090 \\ +\ 75 \\ \hline 3165 \end{array}$$



$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{5}{12}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-058

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^2+8x+y^2+8y+2\sqrt{x^2+8x}\cdot\sqrt{y^2+8y}$

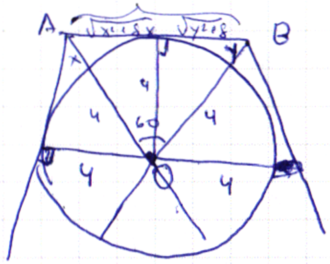
$x^2+8x+16+y^2+8y+16$

$= \sqrt{16+8x+x^2+16+8x+y^2-(4+x)(4+y)}\cdot$

$\underbrace{(4+x)(4+y)}_{58}$

$x(x+8)$

$= \sqrt{16+4x+4y-xy+x^2+y^2}$



$16=(8+y)\cdot y=$

$=16$

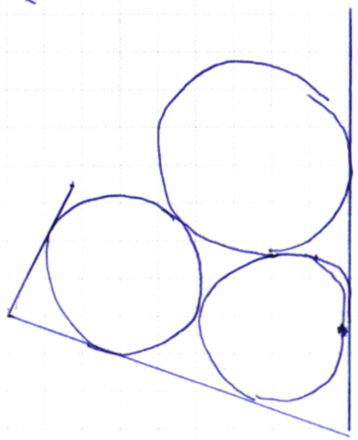
$\frac{58}{4+y}-4=\frac{58-16-4y}{4+y}=\frac{42-4y}{4+y}$

$(4+x)(4+y)=58 \quad \frac{58}{4+y}=4+x$

$16+8y+y^2-16=8y+y^2$

$8y+y^2=$

№ 4.



~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ ~~4а~~ ~~4б~~ 4в ~~5~~ 6 ~~7~~

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)