МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2 ШИФР 15-039

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.

3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.

7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка [1; 35], [36; 70], [71; 105], [106; 140], [141; 175]. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-039

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Билет 2.

№ 2.

$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

Для того, чтобы найти min и max функции (значение) возьмём производную от $g(x)$

1) для $\sin 5x \cdot \sin 9x = \sin' 5x \cdot \sin 9x + \sin' 9x \cdot \sin 5x =$

$= 5\cos 5x \cdot \sin 9x + 9\cos 9x \cdot \sin 5x$

2) для $\sin^2 7x = +7\sin 7x \cdot \cos 7x \cdot 2 = +14\sin 7x \cdot \cos 7x$

3) для $\cos^2 x = -2\cos x \cdot \sin x \Rightarrow$

$g'(x) = 5\cos 5x \cdot \sin 9x + 9\cos 9x \cdot \sin 5x - 14\sin 7x \cdot \cos 7x +$

$+ 2\cos x \sin x = 0$, т.к. min и max при $g'(x) = 0$

4) т.к. $\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)}{2} \Rightarrow$

$\frac{5}{2} \cdot (\sin 4x + \cancel{\sin 14x}) + \frac{9}{2}(\sin(-4x) + \cancel{\sin 14x}) - 7\cancel{\sin 14x} + 2\sin x \cdot$

$\cdot \cos x = 0 \Rightarrow$ т.к. $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \Rightarrow$

$\sin 2x - 2\sin 4x = 0$

т.к. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \Rightarrow$

$\sin 2x - 2 \cdot 2\sin 2x \cdot \cos 2x = 0$

$\sin 2x(1 - 4\cos 2x) = 0$

$$\left[\begin{array}{ll} x = \frac{\pi}{2}k,\ k \in \mathbb{Z} & -\max \\ x = \frac{\arccos\frac{1}{4}}{2} & -\min \end{array}\right.$$

~~Ответ: max~~ [illegible]

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

при max : $g(x) = -3$

при min : $g(x) =$

Ответ: max $= -3$, min $=$.

№ 2.

1) т.к. $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$ параллельны O_x => подставив значение в $y = x^2$ и сложив по модулю получим длину отрезков.

а) $y_1 = 169 = x^2 \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 13 \\ x_2 = -13 \end{array}\right. \Rightarrow l_1 = 26$$

б) $y_2 = 64 = x^2$

$$\left[\begin{array}{l} x_3 = 8 \\ x_4 = -8 \end{array}\right. \Rightarrow l_2 = 16$$

2) у нас 2 варианта расположение $\angle 120^\circ$ в $\triangle$, т.к. $16 = l_2 < l_1 = 26$ =>

а) при $l_1 > l_a$ подставим в теорему cos :

$26^2 = 16^2 + a_1'^2 - 2a \cdot 16 \cdot \cos 120^\circ$ => т.к. $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$ =>

$676 = 256 + a_1'^2 + 16a_1' \Leftrightarrow a_1'^2 + 16a_1' - 420 = 0$

$D/4 = 64 + 420 = 484 = 22^2$ =>

$$\left[\begin{array}{l} a_1' = -8 + 22 = 14 \Rightarrow a = \left(\frac{a'}{2}\right)^2 = 49. \\ a_2' = -8 - 22 - \varnothing \quad \text{т.к. не пересекает } y = x^2 \end{array}\right.$$

б) при $l_a > l_1$:

$a_3^2 = 26^2 + 16^2 - 2 \cdot 26 \cdot 16 \cdot \cos 120^\circ$ =>

$a_3^2 = 932 + 26 \cdot 16 = 1348$ => $a_3 = 2\sqrt{337}$ =>

$a = 337$.

Ответ: 49 и 337.

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-039

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

т.к. „5" ровно 6 и min 1 „0" и „9" =>

1) рассмотрим случай, где все 6 „5" в самом начале (в самых больших разрядах) => на остальные (расстановку) 2^{12}, но нельзя, когда все „0" или „9" => вычитаем 2 варианта

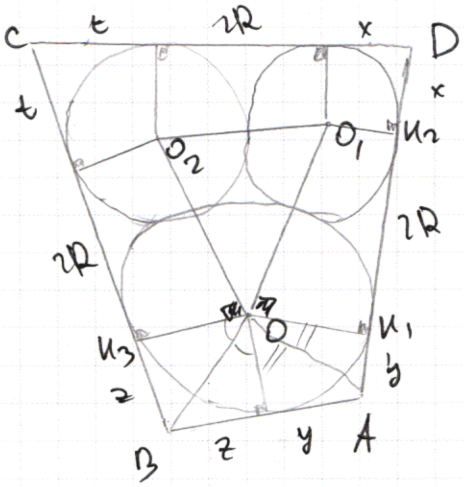
2) для случаев, где начинается не с „5", 1-ая цифра всегда 9 (т.к. должно быть 12 значений) => 2^{11} для одного случая нахождение „5" (если они стоят на одном месте) => нужно вычесть вариант, где все остальные 9 (все 0 не могут быть, т.к. 1-ая „9") => $(2^{11}-1)$, а т.к. 12 вариантов нахождения группы „5" => $(2^{11}-1)\cdot 12$. =>

3) Всего $=(2^{12}-2)+(2^{11}-1)\cdot 12=(4096-2)+(2048-1)\cdot$
$\cdot 12 = 28660$

уточнение: у нас степень 2, т.к. два варианта для цифры: „9" и „0".

Ответ: 28660.

№4.



Дано: ω_1 кас AD и DC, ω_2 кас DC и BC, ω_3 кас BC, AB, AD

$R_1 = R_2 = R_3 = R$

а) $AD + BC - AB - CD = 10$

б) O – центр ω_3

в) $AO \cdot BO = 42$

Найти: а) R, б) $\angle AOB$, в) AB.

Решение:

1) т.к. окружности касаются сторон => расстояние от т. кас до вершины (стычки этих сторон) равны (по теор) => пусть они равны x, y, z, t (см рис)

2) т.к. ω_1 кас ω_2 и ω_3, и ω_2 кас ω_3 => расстояние между т. кас общей прямой равны (по теор) $2\sqrt{Rr}$, а т.к. $R_1 = R_2 = R_3$ => равны $2R$

3) $AD = 2R + x + y$, $BC = 2R + z + t$, $AB = y + z$, $CD = t + x + 2R$

=> т.к. ~~AB~~ $AD + BC - AB - CD = 10$ =>

$\cancel{2R} + \cancel{x} + \cancel{y} + 2R + \cancel{z} + \cancel{t} - \cancel{y} - \cancel{z} - \cancel{t} - \cancel{x} - \cancel{2R} = 10$ =>

$2R = 10 \Leftrightarrow R = 5$.

4) т.к. $O_1O_2 = O_2O = OO_1 = 2R$ => $OO_1K_1K_2$ – прямоуг. (по пр.) (аналог. другие 2 прямоуг.) => $\angle O_2OK_3 = \angle O_1OK_1 = 90°$, а т.к. $OO_2 = O_2O = O_1O = 2R$ => ΔOO_1O_2 – равност. => $\angle O_1OO_2 = 60°$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) т.к. OB и OA – бис. $\Rightarrow \angle AOB = \frac{360^\circ - 180^\circ - 60^\circ}{2} =$

$= \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$.

6) $AO^2 = y^2 + R^2$; $BO^2 = z^2 + R^2 \Rightarrow$

$(y+z)^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cdot \cos 60^\circ$ (по теор. cos):

$(y+z)^2 = y^2 + R^2 + z^2 + R^2 - 2AO \cdot BO \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$

$2yz = 2R^2 - AO \cdot BO$

7) $AO^2 \cdot BO^2 = (y^2+R^2)(z^2+R^2) = y^2z^2 + y^2R^2 + z^2R^2 + R^4 =$

$= (y^2+z^2+R^2)^2 + (R^2-y^2-z^2)\cdot(R^2+y^2+z^2) =$

$= (R^2+y^2+z^2)(R^2 - \cancel{y^2} - \cancel{z^2} + \cancel{y^2} + \cancel{z^2} + R^2) = 2R^2(R^2+y^2+z^2) =$

$= 2R^2(R^2 + (y+z)^2 - 2yz) = 2R^2(R^2 + (y+z)^2 - 2R^2 + AO \cdot BO) \Rightarrow$

$42^2 = 50 \cdot (AB^2 - 25 + 42)$

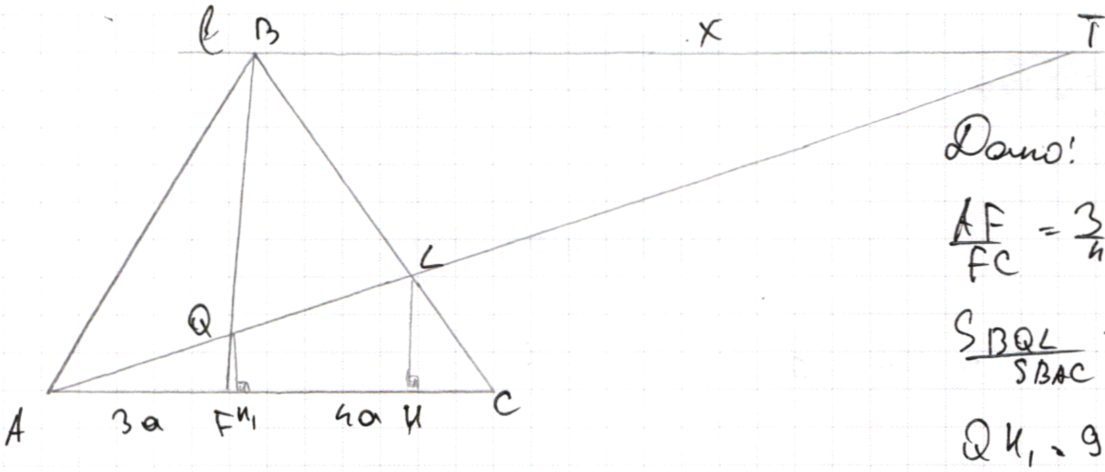
$42^2 = 50 \cdot (AB^2 - 17)$

$AB^2 - 17 = \frac{882}{25} \Rightarrow AB^2 - 17 = 35,28 \Rightarrow AB^2 = 17,28 \Rightarrow$

$AB = \sqrt{17,28}$

Ответ: в) $\sqrt{17,28}$. б) 60°, а) 5.

№6.



Дано: $\triangle ABC$,

$\frac{AF}{FC} = \frac{3}{4}$

$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{1}{16}$

$QH_1 = 9$

Найти: LH.

Решение:

1) если найдем $\frac{AQ}{AL}$, то по подобию легко решим задачу:

2) $\frac{S_{BQL}}{S_{CBF}} = \frac{BL \cdot BQ}{BF \cdot BC}$, т.к. $\frac{S_{ABF}}{S_{CBF}} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{S_{CBF}}{S_{ABC}} = \frac{4}{7} \Rightarrow$

$\frac{S_{BQL}}{S_{ABC}} = \frac{4BL \cdot BQ}{7BF \cdot BC} = \frac{1}{16}$

3) $\frac{S_{BQL}}{S_{ABL}} = \frac{QL}{AL}$ (по теор.), $\frac{S_{ABL}}{S_{ABC}} = \frac{BL}{BC} \to$

$\frac{S_{BQL}}{S_{ABC}} = \frac{BL \cdot QL}{AL \cdot BC} = \frac{1}{16}$

4) построим $l \parallel AC$, $BT = x \Rightarrow$ по подобию:

$\frac{BL}{CL} = \frac{x}{AC}$, $\frac{BQ}{QF} = \frac{x}{AF} \to \frac{BL}{CL} = \frac{BQ \cdot AF}{QF \cdot AC} = \frac{BQ}{QF} \cdot \frac{3}{7}$

5) т.к. $BC = BL + CL \Rightarrow$

$\frac{BL}{BC} = \frac{AL}{16\, QL} = \frac{BF \cdot 7}{16 \cdot BQ \cdot 4}$ (подставляя из п. 4).

6) т.к. $BF = BQ + QF \Rightarrow$

$\frac{\cancel{7}\cancel{B}QF}{3BQ + 7QF} = \frac{\cancel{7}BF}{16 \cdot 4 \cdot BQ} \Rightarrow$

$\cancel{16 \cdot 4 \cdot 3 BQ^2 = (7BQ + 7QF)(3BQ + 7QF) \Rightarrow}$

$\cancel{16 \cdot 4 \cdot 3 BQ^2 = 21 BQ^2 + 49 BQ \cdot QF + 21 BQ \cdot QF + 49 QF^2 \Rightarrow}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$171BQ^2-70BQ\cdot QF+49QF^2=0 \quad |:QF^2$

$171\left(\frac{BQ}{QF}\right)^2-70\frac{BQ}{QF}+49=0$

$\frac{BQ}{QF}=t \Rightarrow$

$171t^2-70t+49=0$

$16\cdot 4BQ\cdot QF=(BQ+QF)\cdot(3BQ+7QF)$

$64BQ\cdot QF=3BQ^2+7BQ\cdot QF+3BQ\cdot QF+7QF^2 \Rightarrow$

$3BQ^2-54QF\cdot BQ+7QF^2=0 \quad |:QF^2$

$3\frac{(BQ)^2}{(QF)^2}-54\frac{BQ}{QF}+7=0$

$t=\frac{BQ}{QF} \Rightarrow$

$3t^2-54t+7=0 \Rightarrow$

$D=718 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{27+\sqrt{718}}{3} \\ t=\frac{27-\sqrt{718}}{3} \end{array}\right.$

№ 7.

$[1;35]; [36;70], [71;105], [106;140], [141;175]$.

1) Чтобы каждые 2 выбранных числа не давали разность $\vdots$ 35, нужно, чтобы они имели разные остатки при делении, например, на 5. Причем, мы можем сделать разные остатки для разных групп (т.к. из одной группы точно не будут давать такую разность $35-1=34$)

2) рассмотрим самую маленькую сумму чисел (пусть все равно выполняется ли условие на $\vdots 35$):
это сумма 5 арифм. прогрессий:

$$\frac{2\cdot 4}{2}\cdot 5+\frac{2\cdot 36+4}{2}\cdot 5+\frac{2\cdot 71+4}{2}\cdot 5+\frac{2\cdot 106+4}{2}\cdot 5+$$

$$+\frac{2\cdot 141+4}{2}\cdot 5$$

3) т.к. $S_n=\frac{2a_1+(n-1)p}{2}\cdot n$,

где $a_i=p+a_{i-1}$ => при „сдвигании" чисел (чтобы достичь $\not\vdots$ 35 изменяется либо a_1, либо p (относительно самой $\min S$) => при изменении и a_1 и p – значение будет больше, чем при только a_1 или только p.

4) тогда посмотрим, что больше

а) $p=1$ => разница только за счёт сдвига a_1 =>
R – разница относ. S; $R=0+25+50+75+100=250$
это так: т.к. 1, 2, 3, 4, 5 уже заняты =>

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-039

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

следующие подходящие: при $a_{12} = 41$ (на 5 б. чем 36) аналогично для след.[·] сдвиг на 10, потом на 15 ...

5) если же мы будем брать с конца, то сдвиг будет тот же

6) если взять min числа, которые нам подходят по очереди из каждого:

1, 37, 73, 109, 145, 6, 42 ... =>

$p = 5$, сдвиг - min. для a_1:

сдвиг отн. S: $R = 40 + 45 + 50 + 55 + 60 = 250$ =>

$S_1 = S_2$

7) найдем эту min $S_1 = S_2$: (см п. 2)

$S = 5 \cdot 365 = 1825 \Rightarrow S_1 = S + 250 = 1825 + 250 = 2075$.

Ответ: 2075.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-039

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{1}{4}$

$4\cos 2x = 1 \Rightarrow$

$\cos 2x = \frac{1}{4} \Rightarrow$

$x = \frac{\arccos\frac{1}{4}}{2}$

πk $\quad \frac{\pi}{2} k$

$0 + \pi k$

№2

$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

$\sin 5x \cdot \sin 9x \Rightarrow \cos 5x \cdot \sin 9x + \sin 5x \cdot \cos 9x$

$\sin^2 7x = 2\sin 7x \cdot \cos 7x$

$\cos^2 x = 2\cos x \cdot (-\sin x)$

$g'(x) = \cos 5x \cdot \sin 9x + \sin 5x \cdot \cos 9x - 2\sin 7x \cdot \cos 7x + 2\cos x \cdot \sin x = 0$

$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)}{2}$

$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$

30 и 60

$-3.$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \sin\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{-\frac{1}{2} + 1}{2} = \frac{1}{4}$

$\frac{\sin(4x) + \sin(14x)}{2} + \frac{\sin(-4x) + \sin(14x)}{2} - \sin(4x) + \sin(2x) = 0$

$\cancel{\frac{\sin(4x)}{2}} + \cancel{\frac{\sin(14x)}{2}} + \cancel{\frac{\sin(-4x)}{2}} + \cancel{\frac{\sin(14x)}{2}} - \cancel{\sin(14x)} + \sin(2x) = 0$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \Rightarrow$

$\sin 2x = 0$

$2\sin x \cos x = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \pi k \\ x \in \frac{\pi}{2} + \pi k \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

если $\sin x = 0 \Rightarrow 0 - 0 - 1 - 3 = -4$

$\frac{3\pi}{2} \Rightarrow$

если $\cos x = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$\frac{5}{2} + \frac{9}{2} = \frac{14}{2} = 7$

$1 \cdot 1 - \cancel{1} - 0 - 3 = -3$ $\quad \frac{9}{2} - \frac{5}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$\Rightarrow -2\sin 4x$

☑ черновик ☐ чистовик

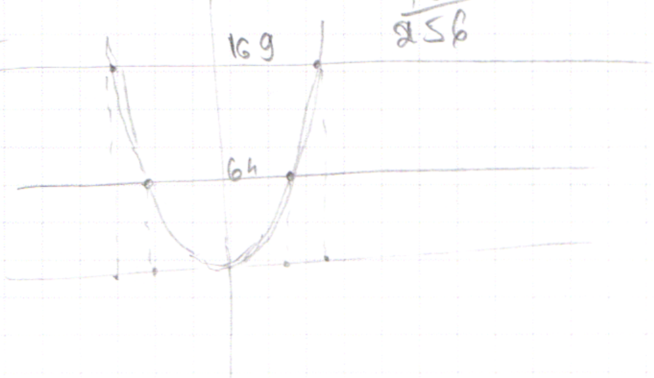
(Поставьте галочку в нужном поле)

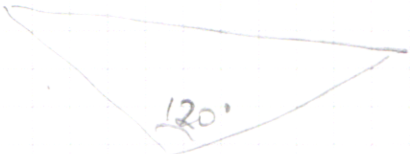
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

1) $y_1 = 169 = x^2 \Rightarrow$
$\left[\begin{array}{l} x_1 = 13 \\ x_2 = -13 \end{array}\right. \Rightarrow l_1 = 26$

2) $y_2 = 64 = x^2 \Rightarrow$
$\left[\begin{array}{l} x_3 = 8 \\ x_4 = -8 \end{array}\right. \Rightarrow l_2 = 16.$





3) т.к. $16 < 26 \Rightarrow$ против 16 не может быть 120 $\Rightarrow$
2 варианта: $\angle 120$ — 26 и $\angle 120$ — a

а) $\angle 120$ и 26 $\quad \cos 120° = -\frac{1}{2}$

$676 = a^2 + 256 - 2a \cdot 16 \cdot \cos 120°$

$676 = a^2 + 256 + 16a$

$a^2 + 16a - 420 = 0 \quad D = 64 + 420 = 484 = 22^2$

$\left[\begin{array}{l} a = -8 + 22 = 14 \\ a = -8 - 22 - \varnothing = -30 \end{array}\right.$

б) $\angle 120$ и a

$a^2 = 676 + 256 - 2 \cdot 26 \cdot$

$a^2 = 932 + 26 \cdot 16 = 932 + 416 = 1348$

$a = 2\sqrt{337}$.

$\frac{7BF}{16 \cdot 4BQ} = \frac{7QF}{7QF + 3BQ}$

$BF = BQ + QL \Rightarrow$

$(7QF + 3BQ)(7BQ + 7QL) = 7QF \cdot 16 \cdot 4BQ$

$\frac{BL}{BC} = \frac{7BF}{16 \cdot 4 \cdot BQ}$

$14/2 = 7 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow$

$y = 49$

$CL = \frac{BQ}{QF} \cdot \frac{3}{7} \cdot BL$

$\frac{BL}{BL + \frac{BQ}{QF} \cdot \frac{3}{7} BL} = \frac{1}{1 + \frac{3BQ}{7QF}} = \frac{7QF}{7QF + 3BQ} = \frac{BL}{BC}$

$\frac{BQ}{QF}$

$30^2 = 900$

$40^2 = 1600$

$2 \cdot 2 = 4$, $3 \cdot 3 = 9$, $4 \cdot 4 = 16$, $5 \cdot 5 = 25$, $6 \cdot 6 = 36$, $7 \cdot 7 = 49$, $8 \cdot 8 = 64$, $9 \cdot 9 = 81$

$26 \cdot 26 = 676$; $16 \cdot 16 = 256$; $676 : 4 = 169$; $27 \cdot 27 = 729$; $729 - 21$; 718; $676 + 256 = 932$; $932 + 416 = 1348$; $26 \cdot 16 = 416$; $1348 : 4 = 337$; $35 \cdot 35 = 1225$; $36 \cdot 36$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-039

ШИФР

(заполняется секретарём)

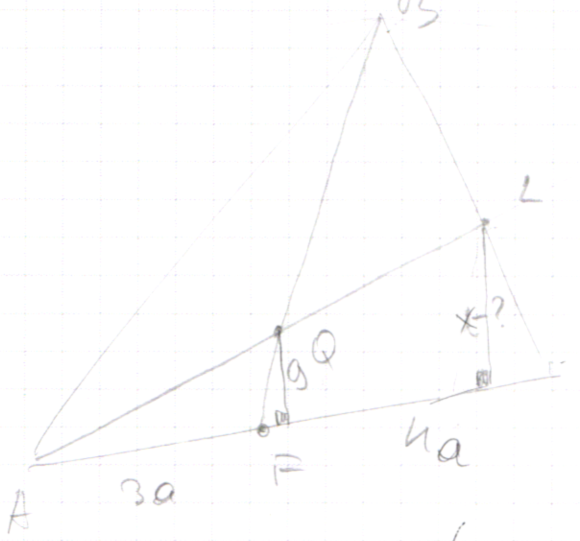
4900 $\quad$ 49 ×

140 ×35

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$49\cdot(100-171\cdot4$

$40+24=64$, $64\times3=192$, $192-21=171$



$$\frac{S_{BQL}}{S_{ABC}}=\frac{1}{16}\cdot$$

$x-?$

$$\frac{AQ}{AL}$$

$$\frac{S_{ABF}}{S_{CBF}}=\frac{3}{4}\Rightarrow S_{CBF}=\frac{4}{7}S_{ABC}$$

$$\frac{S_{BQL}}{S_{CBF}}=\frac{BL\cdot BQ}{BF\cdot BC}$$

$$\frac{7S_{BQL}}{4S_{ABC}}=\frac{BL\cdot BQ}{BF\cdot BC}\Rightarrow$$

$$\frac{S_{BQL}}{S_{ABC}}=\frac{4BL\cdot BQ}{7BF\cdot BC}$$

$$\frac{BL}{BC}=\frac{AL}{16\cdot QL};$$

$$\frac{S_{BQL}}{S_{ABL}}=\frac{QL}{AL}\qquad\frac{S_{ABL}}{S_{ABC}}=\frac{BL}{BC}\Rightarrow$$

$$\frac{S_{BQL}\cdot AL}{QL\cdot S_{ABC}}=\frac{BL}{BC}\Rightarrow\frac{S_{BQL}}{S_{ABC}}=\frac{BL\cdot QL}{AL\cdot BC}=\frac{1}{16}$$

$$\frac{BL}{CL}=\frac{x}{AC},\qquad\frac{BQ}{QF}=\frac{x}{AF}\Rightarrow$$

$$\frac{BL}{CL}=\frac{BQ\cdot AF}{QF\cdot AC}\Rightarrow\frac{BL}{CL}=\frac{BQ\cdot3}{QF\cdot7}\ ✓$$

$$\frac{1}{16}=\frac{4}{7}\cdot\frac{BL}{BC}\cdot\frac{BQ}{BF}\Rightarrow\frac{BL}{BC}=\frac{BF\cdot7}{16BQ\cdot4}\Rightarrow$$

$$CL=BL\cdot\frac{7QF}{3BQ}\Rightarrow\frac{BL}{BL+CL}=$$

$$=\frac{BL}{\cancel{BL}\left(1+\frac{7}{3}\frac{QF}{BQ}\right)}=\frac{3BQ}{3BQ+7QF}=\frac{BL}{BC}=\frac{BF\cdot7}{16\cdot BQ\cdot4}$$

$64\times3=192-21$

$BF=BQ+QF$

$$\frac{3BQ}{3BQ+7QF}=\frac{7BF}{16\cdot4\cdot BQ}$$

$$16\cdot4\cdot3BQ^2=(7BQ+7QF)\cdot(3BQ+7QF)$$

$$16\cdot4\cdot3BQ^2=21BQ^2+49BQ\cdot QF+21BQ\cdot QF+49QF^2$$

175 | 35
175 | 5

$x - y \,\vdots\, 35$

min — ?

1, 37, 73, 109, 145 → нельзя брать 2, 3, 4, 5

1 + 6 + 11 + 16 + 21 + 37 + 42 + 47 + 52 + 57 + 109 + 114 + 119 + 124 + 129 +
+ 145 + 150 + 155 + 160 + 165,

106 + 107 + 108 + 109 + 110 + 76 + 77 + 78 + 79 + 80

min → подбир, что ~~0~~ →

min среди всех →

1) на 20 сдвиг → разн. — 15, 16, 17, 18, 19.

2) 5, 10, 15, 20.

$\frac{2a_1 + (n-1)p}{2} \cdot n$ $\qquad \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ $\qquad a_n = a_1 + (n-1)p$

$\frac{2 + 4 \cdot 1}{2} \cdot 5$

$\frac{2+4}{2} \cdot 5 + \frac{2 \cdot 36 + 4}{2} \cdot 5 + \frac{2 \cdot 71 + 4}{2} \cdot 5 +$
$+ \frac{2 \cdot 106 + 4}{2} \cdot 5 + \frac{2 \cdot 141 + 4}{2} \cdot 5$

36, 37, 38, 39, 40

~~$\frac{5}{2}(2+4+2$~~

$\frac{5}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\,(1 + \underbrace{2 + 36}_{364} + \underbrace{2 + 71}_{326} + \underbrace{2 + 106}_{253} + \underbrace{2 +}_{145}$
$+ \underbrace{141 + 2)}_{143} = 5 \cdot (365$

$3 \cdot 5 = 15$

$\frac{2 + 4 \cdot 5}{2} \cdot 5 = 55$

$\frac{2(x+1) + 4 \cdot 5}{2} \cdot 5$ — разница на 40

55 · 50

2·5·5 → на сдвиг 1·5 = 5 на 45

( ) + 2·4·5 = 40

на 50

на 55 → 250

на 60

10 = const

0, 25, 50, 75, 100

250

0,

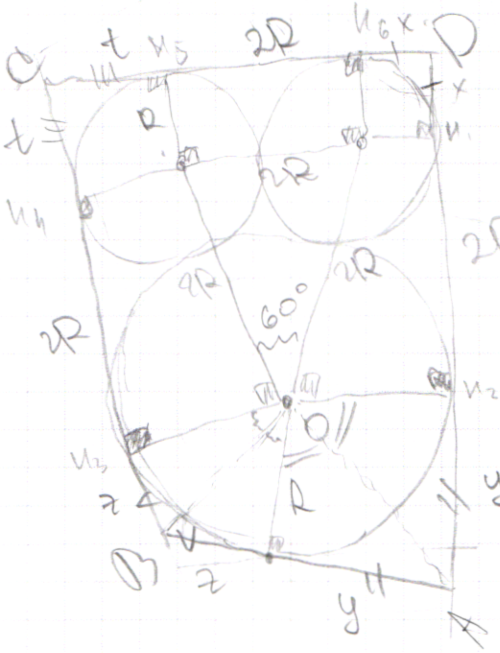
250…

365
× 5
1825

2075

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$2\sqrt{R}z \Rightarrow$ и.и. $R = t \Rightarrow$
$2R$



$AD + BC - AB - CD = 10$

$AD = 2R + x + y$

$BC = 2R + z + t$

$AB = y + z \Rightarrow$

$CD = t + x + 2R$

$\cancel{2R} + \cancel{x} + \cancel{y} + 2R + \cancel{z} + \cancel{t} - \cancel{y} - \cancel{z} -$

$- \cancel{t} - \cancel{x} - \cancel{2R} = 10 \Rightarrow$

$2R = 10 \Rightarrow R = \underline{\underline{5}}$

$\angle AOB = \dfrac{360° - 180° - 60°}{2} = \dfrac{180° - 60°}{2} = \dfrac{120°}{2} = \underline{\underline{60°}}$

$AO \cdot BO = 42$

$AO^2 = y^2 + R^2$

$BO^2 = z^2 + R^2 \quad \Rightarrow$

$(y+z)^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cdot \frac{1}{2} =$

$= y^2 + R^2 + z^2 + R^2 - AO \cdot BO$

$\cancel{y^2} + \cancel{z^2} + 2yz = \cancel{y^2} + 2R^2 + \cancel{z^2} - AO \cdot BO \Rightarrow$

$2yz = 2R^2 - AO \cdot BO$

$AO^2 \cdot BO^2 = (y^2 + R^2)(z^2 + R^2) =$

$= y^2z^2 + y^2R^2 + z^2R^2 + R^4 =$

$= 2y^2z^2 + 2y^2R^2 + 2z^2R^2 + 2R^4 =$

$= (y^2 + z^2 + R^2)^2 - y^4 - z^4 + R^4 =$

$= (y^2 + z^2 + R^2)^2 + (R^2 - y^2 - z^2) \cdot$

$\cdot (R^2 + y^2 + z^2) =$

$= (R^2 + y^2 + z^2)(R^2 + \cancel{y^2} + \cancel{z^2} +$

$+ R^2 - \cancel{y^2} - \cancel{z^2}) = 2R^2 \cdot$

$\cdot (R^2 + y^2 + z^2) =$

$= 2R^2 \cdot (R^2 + (y+z)^2 - 2yz) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2R^2 \cdot (R^2 + (y+z)^2 - 2R^2 + AO \cdot BO) =$

$= 2R^2((y+z)^2 - R^2 + AO \cdot BO) =$

$= AO^2 \cdot BO^2.$

$50 \cdot (AB^2 - 25 + 42) = 42^2$

$\times \begin{array}{r} 1764 \\ 2 \\ \hline 35{,}28 \end{array}$

$\times \begin{array}{r} 42 \\ 42 \\ \hline 84 \\ 168 \\ \hline 1764 \end{array}$

$1764 \,|\, 2$
$-16 \quad 882$
16

$22 -$

$\begin{array}{r} 882 \\ 4 \\ \hline \end{array}$

$\dfrac{882}{25} =$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

6 „5"

как min 1 „0" и 1 „9"

только 2.

$$\underbrace{\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot}\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$(2^{12}-2)+(2^{11}-1)\cdot 12.$

$(4096-2)+(2047-1)\cdot 12=$

$=4094+2047\cdot 12=\underline{\underline{28660}}.$

$2047 \cdot 12$: 4094, 2047, 24564

$24564 + 4096 = 28660$

$1-2^0$
$2-2^1$
$4-2^2$
$8-2^3$
$16-2^4$
$32-2^5$
$64-2^6$
$128-2^7$
$256-2^8$
$512-2^9$
$1024-2^{10}$
$2048-2^{11}$
$4096-2^{12}$

№5.

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5)\geq 1$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{x+3}-x>1\\ x+5\geq\sqrt{x+3}-x\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{x+3}-x<1\\ x+5\leq\sqrt{x+3}-x\\ x+5>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$x+3\geq 0$

$x+3>x^2+1+2x$

$x+1$