МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1 ШИФР 5-025

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x + 4) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

5-025
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Чистовик.

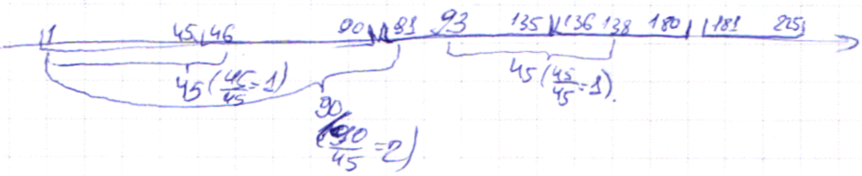
Задача № 7

Дано:
$N=6$;
$[1;45]\cup[46;90]$
$[91;135]\cup[136;180]$
$[181;225]$
$\frac{a_i-a_j}{45}$ – не целое

$\sum_{i=1}^{30} a_{i\,min}$ – ?

Решение (№7)

1) Для начала рассмотрим числа, разность которых делится на 45.



Если в каждом промежутке пронумеровать числа от 1 до 45, то можно сказать, разность двух чисел с одинаковыми номерами делится на 45 нацело.

В таком случае среди наших 30 чисел нет двух с одинаковыми номерами.

Чтобы сумма была минимальна, нам нужно ~~чисел~~ первые 30 номеров. Не имеет значения из какой группы брать какие числа, т.к. их можно представить как первое число группы −1 + их номер (например число 47: 2 число 2 группы: $\underbrace{(46-1)}_{\text{основа группы}}+\overset{\text{поряд. номер}}{2}=47$) Из каждой группы в любом случае будет взято по 6 чисел, а добавленный номер от группы не зависит.

Найдем сумму основ групп, а затем прибавим к ней сумму порядковых номеров.

$6\cdot0+6\cdot45+6\cdot90+6\cdot135+6\cdot180+\cancel{6\cdot225}=6\cdot45(0+1+2+3+4)=270\cdot10=$
$=2700$ – сумма основ всех наших чисел ~~в группе~~.

$1+2+3+4+\ldots+29+30=31\cdot15=465$ – сумма всех порядковых номеров.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Чистовик

$2700 + 465 = 3165$ – минимально возможная сумма, удовлетворяющая всем условиям.

Ответ: 3165.

Задача № 3

Дано:
17 знаков
„0", „7", „8"
ровно семь „8"
и они идут подряд.

N – ?

Решение (№ 3)

1) Рассмотрим крайний случай:

$\underbrace{\overset{8}{\_\_\_\_}}_{7\text{ знаков}}\underbrace{\_\_\_\_\_\_}_{10\text{ знаков}}$

Найдем все варианты заполнения хвоста „7" и „0".

~~2¹⁰~~ $2^{10} = 1024$. Нужно отнять 2, т.к ~~всего~~ мы засчитали числа 88888880000000000 и 88888887777777777, а таких чисел быть не может, в них не все виды цифр. 1022 – для крайнего случая.

2). Рассмотрим более общий случай

от $\underset{1}{7}\underset{7}{\overset{8}{\_\_\_}}\underset{9}{\_\_\_\_}$ до $\underset{1}{\overset{7}{\_}}\underset{9}{\_\_\_\_}\underset{7}{\overset{8}{\_\_\_}}$

Первую позицию заимое „7", тк „0" не может начинать число. В каждом из таких 10 случаев нам нужно собрать комбинацию из 9 знаков („0" и „7"). $2^9 = 512$. Отнимем единицу, тк мы засчитали числа вида $\underset{1}{7}\underset{n}{\overset{7}{\_\_}}\underset{7}{\overset{8}{\_\_}}\underset{9-n}{\overset{7}{\_\_}}$ $(n \leq 9)$, а в таких числах нет „0". 511 комбинаций в одном случае:

$511 \cdot 10 = 5110$

3) Других случаев не существует. Следовательно, мы разобрали все варианты, их сумма и будет кол-вом всех возможных комбинаций удовлетворяющих условию.

$5110 + 1022 = 6132$

Ответ: 6132.

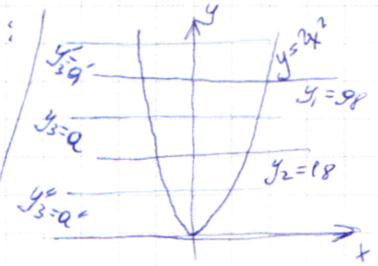
☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Чистовик.
Задача №1.

Решение (№1).

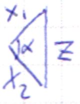
Дано:
$y = 2x^2$
$y_1 = 98$
$y_2 = 18$
$y_3 = a$
$\alpha = 120°$
$a - ?$



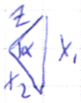
Возможно три варианта:

1) $y_1 > a > y_2$ $(y_3 = a)$
2) $y_1 > y_2 > a$ $(y_3'' = a'')$
3) $a > y_1 > y_2$ $(y_3' = a')$

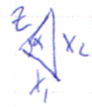
Все возможные варианты треугольников:

1. 

где z — неизвестная сторона (соответствует y_3), x_1 соответствует y_1, а x_2 соответствует y_2.

2. 

$\cos\alpha = \cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$

3. 

— ~~нет вариан~~

Чем больше y_i, тем больше и x_i ему соответствующий. x_i — равен ~~полов~~ удвоенной положительной x-координате параболы при соответствующем y_i, т.к. парабола симметрична относительно Oy, а отсекаемый отрезок есть расстояние между ветвями параболы на высоте y_i.

(1) Найдём x_1. $y_1 = 98 = 2x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{98}{2}} = \pm\sqrt{49} = \pm 7$

$x_1 = 2 \cdot 7 = 14$.

(2) Найдём x_2. $y_2 = 18 = 2x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

$x_2 = 2 \cdot 3 = 6$.

(3) Составим расчётные формулы для z (x_3) и параметра a

$y_3 = a = 2x^2$; $x = \pm\sqrt{\frac{a}{2}}$; $x_3(z) = 2\sqrt{\frac{a}{2}} = \sqrt{2a}$

$a = \frac{z^2}{2}$

Чистовик:

$\alpha = 120°$ – самой большой угол Δ, остальные два в сумме дают $60°$. тк β и $\gamma < 60°$ каждый.

Теперь мы можем заметить, что $\Delta 3.$ не существует, тк. напротив большего угла – большая сторона, а в нем это правило не выполняется. $(X_2 < X_1)$

$\Delta 1.$ соответствует третий случай, тк $z > x_1$; $z > x_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ $a > y_1$; $a > y_2$.

$\Delta 2.$ подходят случаи 1) и 2), тк важно только, чтобы $x_1 > z$.

Рассмотрим $\Delta 1.$ (третий случай для a). 

По т. косинусов:

$$z^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2\cos\alpha\, x_1 x_2 = 36 + 196 + 84 = 316$$

$z = \sqrt{316}$ (тк $z > 0$ (это расстояние).

$$a = \frac{z^2}{2} = \frac{316}{2} = 158.$$ (проверка: $158 > 98 > 18$).

Рассмотрим $\Delta 2.$ (первой и второй случай для a). 

По т. косинусов: $x_1^2 = z^2 + x_2^2 - \underbrace{2\cos\alpha}_{-1} x_2 z = z^2 + x_2^2 + x_2 z$

$$z^2 + x_2 z + (x_2^2 - x_1^2) = 0$$

$$z^2 + 6z + (36 - 196) = 0$$

$$z^2 + 6z - 160 = 0$$

$z = -16$ – не уд усл, тк z расстояние $z > 0$.
$z = 10$

$a = \frac{z^2}{2} = \frac{100}{2} = 50$ (проверка $98 > 50$)

Ответ: $a \in \{50; 158\}$.

Задача №5

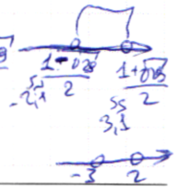
Дано:
$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$
$x - ?$

Решение (№5).

Найдем область определения и область допустимых значений $x \in (-4; -3) \cup (-3; 2) \cup (2; \frac{1+\sqrt{29}}{2})$.

$$\begin{cases} x+4 > 0 \\ x+7 \geq 0 \\ \sqrt{x+7} - x > 0 \\ \sqrt{x+7} - x \neq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x > -4 \\ x \geq -7 \\ \sqrt{x+7} > x \\ \sqrt{x+7} \neq x+1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > -4 \\ \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x+7 > x^2 \end{array} \right. \\ x+7 \neq x^2+1+2x \end{cases} \quad \begin{cases} x > -4 \\ \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x^2 - x - 7 < 0 \end{array} \right. \\ x^2 + x - 6 \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > -4 \\ x < \frac{1+\sqrt{29}}{2} \\ x \neq -3 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

$D = 1 + 28 = 29$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Чистовик:

Задача №5 (продолжение)

№5

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$

$\sqrt{x+7} < 1+x$ $\Rightarrow x+1>0;\ x>-1$

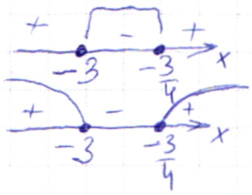
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<\sqrt{x+7}-x<1\\ x+4\leq\sqrt{x+7}-x\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{x+7}-x>1\\ x+4\geq\sqrt{x+7}-x\end{cases}\end{array}\right.$$

$\sqrt{x+7}>1+x$, $\sqrt{x+7}>0$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-4;-3)\cup(2;\frac{1+\sqrt{29}}{2})\\ 2x+4\leq\sqrt{x+7}\end{cases}\\ \begin{cases}\cancel{x\leq-1}\ x\in(-3;2)\\ 2x+4\geq\sqrt{x+7}\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-4;-3)\cup(2;\frac{1+\sqrt{29}}{2})\\ \left[\begin{array}{l}x\leq-2\\ 4x^2+16+16x\leq x+7\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(-4;2)\\ \begin{cases}x\geq-2\\ 4x^2+16+16x\geq x+7\end{cases}\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-4;-3)\cup(2;\frac{1+\sqrt{29}}{2})\\ \left[\begin{array}{l}x\leq-2\\ 4x^2+15x+9\leq0\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x\in[-2;2)\\ 4x^2+15x+9\geq0\end{cases}\end{array}\right.$$



$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-4;-3)\cup(2;\frac{1+\sqrt{29}}{2})\\ x\in(-\infty;-2]\cup[-3;-\frac{3}{4}]\end{cases}\\ \begin{cases}x\in[-2;2)\\ x\in(-\infty;-3]\cup[-\frac{3}{4};+\infty)\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\varnothing\\ [-\frac{3}{4};2)\end{array}\right.$$

Ответ: $x\in[-\frac{3}{4};2)$.

Задача №2

Дано:

$g(x)=\sin3x\cdot\sin7x-\sin^2 x+\cos^2 5x+4$

$g_{min}(x)$ - ?

$g_{max}(x)$ - ?

Решение (№2)

$-1\leq\sin\alpha_i\leq1$

$-1\leq\cos\alpha_i\leq1$

Предельно возможнее ОДЗ:

$g(x)=\sin\alpha\cdot\sin\beta-\sin^2\gamma+\cos^2\varphi+4$

$2\leq g(x)\leq6$

$-1-1+0+4\leq g(x)\leq1-0+1+4$

Ответ: $[2;6]$

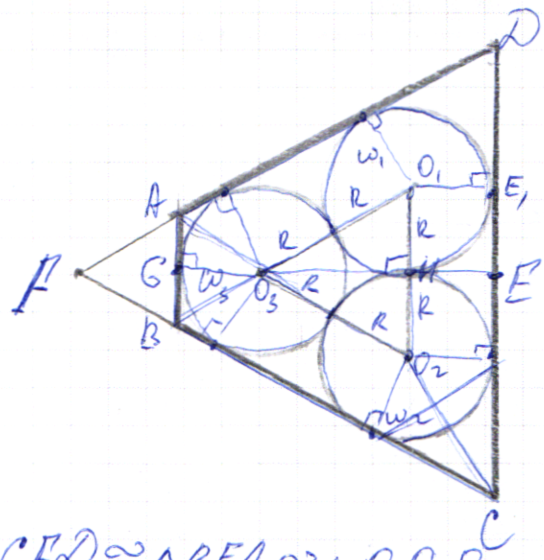
Чистовик:

Задача № 4

Дано: четырёхугол $ABCD$;
$\omega_1(O_1; R)$; $\omega_2(O_2; R)$; $\omega_3(O_3; R)$;
ω_1 касается AD, DC;
ω_2 касается DC; CB;
ω_3 касается CB; BA; AD.

Найти:
а) R – ? $(AD+BC-(AB+CD)=12)$
б) $\angle AO_3B$ – ? (где $\omega_3(O_3 R)$)
в) AB – ? $(AO_3 \cdot BO_3 = 58)$

Решение (№ 4)



$\triangle CFD \sim \triangle BFA \sim \triangle O_2O_3O_1$

$\triangle O_2O_3O_1$ – равносторонний $(O_3O_1 = O_2O_1 = O_2O_3 = 2R)$

$O_3H = R\sqrt{3}$

$HE = R$ $(HE \parallel O_1E_1 = R$; $O_1O_2 \parallel E_1E)$.

$GE = 2R + R\sqrt{3} = R(2+\sqrt{3})$

$FE = \frac{\sqrt{3}}{2} DC$

$\angle AO_3B = 60°$

$AB = R$

Ответ: $\angle AOB = 60°$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

5-025

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Черновик

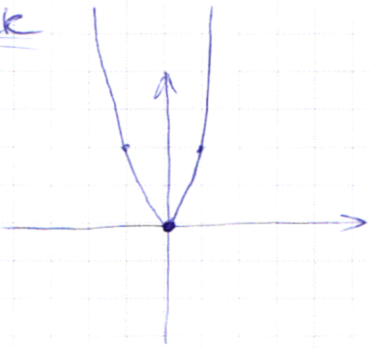
1. Дано:

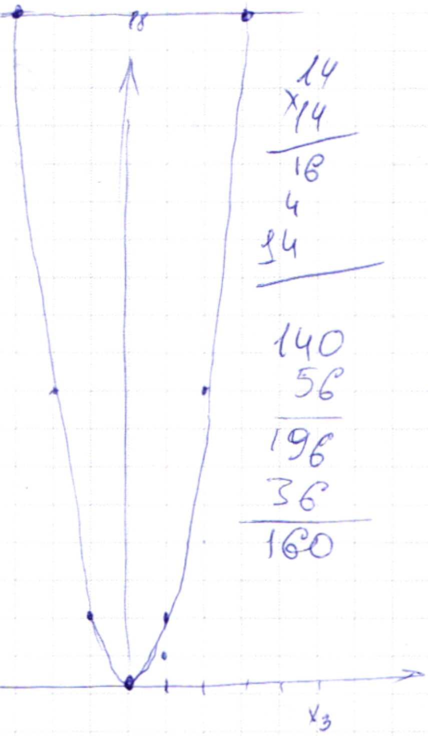
$y = 2x^2$

$y = 98$

$y = 18$

$y = a$





14×14: 16, 4, 14; 140, 56, 196; 36; 160

$196 + 36 = 232$

$\times 84$

316

$6 \times 14 = 84$

60

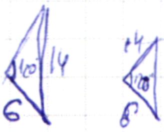
$98 = 2x_1^2$

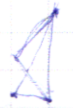
$x_1 = \pm\sqrt{49} = \pm 7$

$x_2 = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

$x_1 = 14$

$x_2 = 6$





1) $x_3 = 10$

16×16: 36, 6, 1, 256

17×17: 49, 4, 1, 289

18×18: 64, 8, 1, 324

6×16: 84

$\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$

$y = \dots$

$y = 2x^2 = 2\cdot 5^2 = 50$

$14^2 = 36 + z^2 - 2\cos\alpha \cdot 6 \cdot z$

$z^2 - 2(-\frac{1}{2})6\cdot z + (36 - 14^2) = 0$

$z^2 + 6z - 160 = 0$

$-6 \qquad -160$

2)

$z = 10; -16$

$z^2 = 36 + 196 - 2\cos\alpha \, 6 \cdot 14$

$z = \pm\sqrt{232 + 84}$

$= \pm\sqrt{316}$

$\frac{z}{\sin 120} = \frac{14}{\sin(60-\alpha)} = \frac{6}{\sin\alpha}$

$\frac{2z}{\sqrt{3}} = \frac{14}{\sin(60+\alpha)}$

6.

$\frac{S_1'}{S_0'} = \frac{5}{12}$

LK-?

QH = 6.

$450 + 15$

31×15

6×45

30

24

[1; 45], [46; 90] [91; 135] [136; 180] [180; 225]

6. $6 \cdot 45(1+2+3+4) = 6\cdot 45 \cdot 10 = 2700$

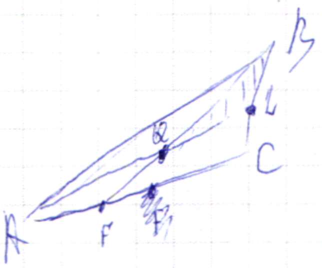
$\sum_{min}$ 30 $1+2+3+4+\dots 30$ 3165

$15 \cdot 31 =$ 465

15×31: 450, 15

465

1 2 34 5678910



$6\cdot 0 + 6 \cdot 45 + 6\cdot 90 + 6\cdot 135 + 6 \cdot 180$ $\quad 6(0 + 45 + 90 + 135 + 180)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

Черновик 7 ~ 1

2. $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

-1 тк 78 ~~77~~

3. 17 знаков

0, 7, 8

17

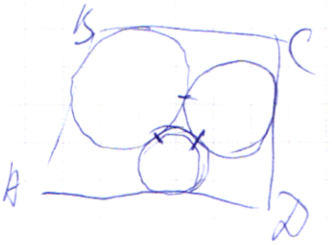
7 8

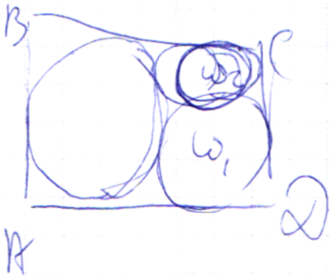
1 10 9 7

-2 / тк. ~~78~~00000 0

800 ~~7777~~

4. Дано: ABCD





9. ~~2·2·2·2~~

$2^9 = 512$

$\boxed{5120}$ + 8 | 7 | 10

$+10$ци

$\boxed{6144}$

17 | 1 | 8 | 7 32 1

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

1) $AD + BC - (AB + CD) = 12$ $R - ?$

2) $\angle AOB$; $\omega_3(O; R)$

3) $AO \cdot BO = 58$; $AB - ?$

~~X~~ | ? ±?

8 $g(x)$ —

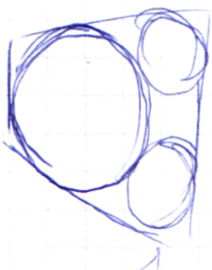
~~3~~ комбин.

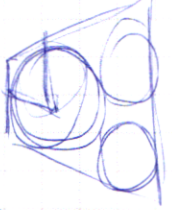
4 ω

~~5~~ вер

6 $\triangle$

~~7~~ комбин.





$2x + 4 \le \sqrt{x+7}$

$4x^2 + 16 + 16x \le x + 7$

$4x^2 + 15x + 9 \le 0$

-15 36

$-\frac{12}{4}$ $-\frac{3}{4}$

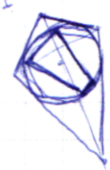
$[-3; -\frac{3}{4}]$

$\sqrt{-1+7} > 0$

$\sqrt{x+7} > 1 + x$

$0 > x + 2$

$x \le -1$



$[-\frac{3}{4}; +\infty)$

36

-15 $-\frac{12}{4}$ $-\frac{3}{4}$

$(-4; \frac{1+\sqrt{29}}{2})$

5. $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \ge 1$

$\sqrt{x+7}$ $x > -4$

$x \le 7$

$$\begin{cases} 0 < \sqrt{x+7} - x < 1 \\ x + 4 \le \sqrt{x+7} - x \end{cases}$$

$(-4; -3) \cup (2; \frac{1+\sqrt{29}}{2})$

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - x > 1 \\ x + 4 \ge \sqrt{x+7} - x \end{cases}$$

$(-3; 2)$.

$2x + 4 \ge \sqrt{x+7}$

$x + 2 \ge 0$

$x \ge -2$

$\boxed{[-\frac{3}{4}; 2)}$ ответ.

$\sqrt{x+7} - x > 0$

$\sqrt{x+7} > x$

$(-7; 0)$

$(-7; \frac{1+\sqrt{29}}{2})$

$x + 7 > x^2$

$x^2 - x - 7 < 0$

$D = 1 + 28 = 29$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{29}}{2} \approx 3{,}1$

$-2{,}1$ ≈ 3

$\frac{6}{2} \approx 3{,}1$. $-\frac{4}{2} \approx -2{,}1$

$\sqrt{x+7} - x < 1$

$\sqrt{x+7} < 1 + x$

$x \ge -1$

$(-3; 2)$

$\sqrt{x+7} - x < 1$

$\sqrt{x+7} < x + 1$

$x \ge -1$

$x + 7 < x^2 + 1 + 2x$

$x^2 + x - 6 > 0$

-3 -6 -3 2

$(2; +\infty)$ $(-\infty; -3) \cup$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

5-025

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

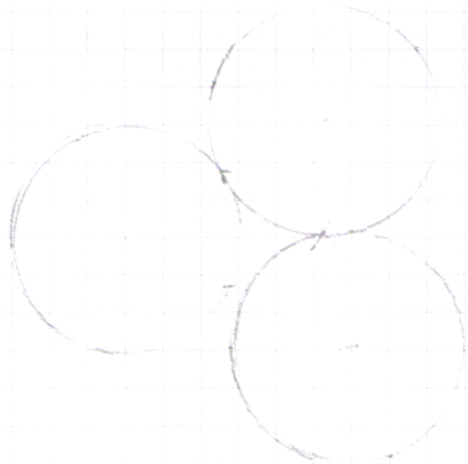
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

Черновик:

№1.



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)