МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1 ШИФР 14-003

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

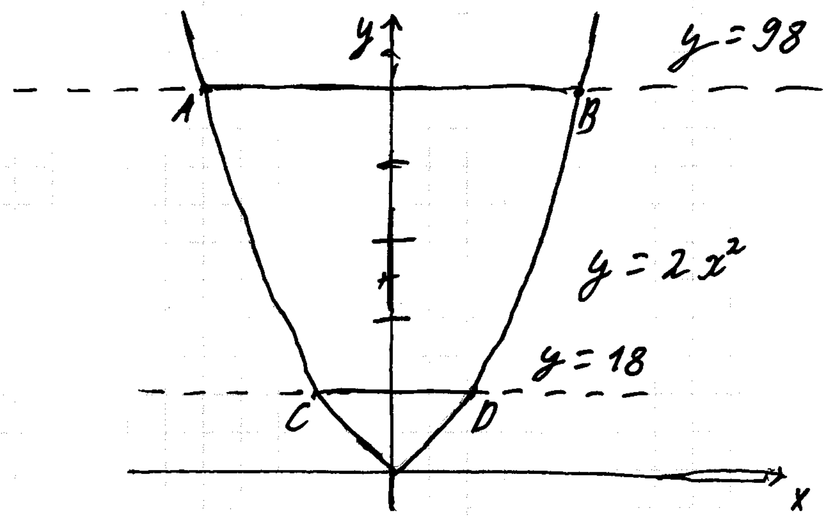
5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1



Найдём длины отрезков AB и CD

$98 = 2x^2$, $x = \pm 7$, $AB = 7 - (-7) = 14$

$18 = 2x^2$, $x = \pm 3$, $CD = 3 - (-3) = 6$

Итак, известны длины двух отрезков искомого треугольника, причём понятно, что сторона длины 6 не может лежать против угла 120°. Имеем две возможности:

По теореме косинусов:

$x^2 = 36 + 196 - 2 \cdot 6 \cdot 14 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$, $x = 316$

$196 = 36 + x^2 - 2 \cdot 6\ x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$, $x = 10$

Находим соотвествующее значение параметра:

$2 \cdot \sqrt{\frac{a}{2}} = \sqrt{316}$, $a = 158$

$2 \cdot \sqrt{\frac{a}{2}} = 10$, $a = 50$

Ответ: 50; 158

№3

Составим таблицу возможных видов 17-значного числа

·	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	8	8	8	8	8	8	8										
2	7	8	8	8	8	8	8	8									
3	7		8	8	8	8	8	8	8								
4	7			8	8	8	8	8	8	8							
5	7				8	8	8	8	8	8	8						
6	7					8	8	8	8	8	8	8					
7	7						8	8	8	8	8	8	8				
8	7							8	8	8	8	8	8	8			
9	7								8	8	8	8	8	8	8		
10	7									8	8	8	8	8	8	8	
11	7										8	8	8	8	8	8	8

Число не может начинаться с 0,
Поэтому после вида, указанного в первой строке, для всех остальных случаев число начинается на 7.

Для первого вида имеем 10 свободных позиций, причём одна обязательно занята цифрой 0 или цифрой 7, поэтому количество таких чисел будет $2 \cdot (2^8 - 1)$.

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Для остальных десяти видов 9 свободных позиций для 0 и 7, причём 0 ~~от~~ должна присутствовать, значит количество чисел каждого из этих видов равно 2^8.

Итого:

$2^9 - 2 + 10 \cdot 2^8 = 3070$

Ответ: 3070

№2

Даётся выражение:

$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

Преобразуем выражение:

$\sin 3x \cdot \sin 7x = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x) =$

$= \frac{1}{2}(2\cos^2 2x - 1 - 2\cos^2 5x + 1) = \cos^2 2x - \cos^2 5x$

Функция примет вид:

$g(x) = \cos^2 2x - \sin^2 x + 4 = \cos^2 2x \cdot \frac{1-\cos 2x}{2} + 4 =$

$= \cos^2 2x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{7}{2} = \left(\cos 2x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{55}{16}$

Значение наибольшей функции принимает, при $\cos 2x = 1$, то есть $g_{max} = 5$.

Значение наименьшей функции принимает, при $\cos 2x = -\frac{1}{4}$, то есть $g_{min} = 3{,}4375$

Ответ: 5; 3,4375

№5

Дается неравенство: $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$

Найдем ОДЗ:

$$\begin{cases} x+4>0 \\ \sqrt{x+7}-x>0 \\ \sqrt{x+7}-x \neq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x>-4 \\ -7 \leq x < \frac{1+\sqrt{29}}{2} \\ x \neq 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x>-4 \\ -4 < x < \frac{1+\sqrt{29}}{2} \\ x \neq 2 \end{cases}$$

На ОДЗ исходное неравенство равносильно следующему:

$(\sqrt{x+7}-x-1)\cdot(x+4-\sqrt{x+7}+x) \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+7 \geq 0 \\ x+1<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x+7 > x^2+2x+1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} -7 \leq x < -1 \\ -1 \leq x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow -7 \leq x < 2$$

$2x+4-\sqrt{x+7} \geq 0 \Leftrightarrow 2x+4 \geq \sqrt{x+7} \Leftrightarrow \begin{cases} x+7 \geq 0 \\ 4\cdot x^2+16x+16 \geq x+7 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -7 \\ x \leq -3,\ x \geq -\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{4}$

$\sqrt{x+7}-x-1<0 \Leftrightarrow x+1>\sqrt{x+7} \Leftrightarrow \begin{cases} x+7 \geq 0 \\ x^2+2x+1>x+7 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -7 \\ x<-3,\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow 2$

$2x+4-\sqrt{x+7}<0 \Leftrightarrow \sqrt{x+7}>2x+4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+7 \geq 0 \\ 2x+4<0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x+4 \geq 0 \\ x+7>4x^2+16x+16 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -7 \leq x < -2 \\ \begin{cases} x \geq -2 \\ -3 < x < -\frac{3}{4} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow -\frac{3}{4} \leq x < 2.$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

14-003

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~На ОДЗ исходное неравенство равносильно следующему~~

~~Окончатель~~

$$\begin{cases} \sqrt{x+7}-x-1<0 \\ x+4-\sqrt{x+7}+x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ -7\le x<-\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$$

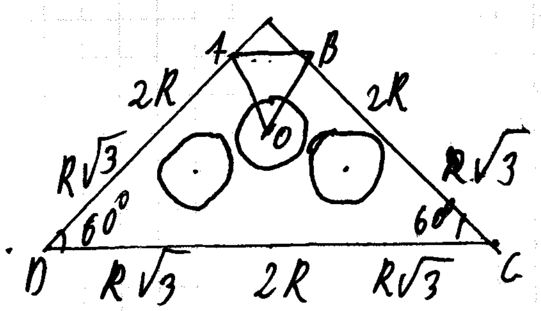
Окончательно, исходное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} -4<x<\frac{1+\sqrt{29}}{2} \\ x\ne 2 \\ -\frac{3}{4}\le x<2 \end{cases}$$

Заметим, что $\sqrt{29}>5$, значит $\frac{1+\sqrt{29}}{2}>3$, значит решением неравенства будет множество $-\frac{3}{4}\le x<2$

Ответ: $[-0{,}75;\ 2)$

№4



☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

1) $AD+BC-AB-CD=R\sqrt{3}+2R+2R+R\sqrt{3}-2R\sqrt{3}-2R=12$,
$R=6$.

2) Поскольку AO и BO - биссектрисы, а сумма углов A и B четырёхугольника равна $360^\circ-120^\circ=240^\circ$, то $\angle AOB=180^\circ-\frac{\angle A+\angle B}{2}=$
$=60^\circ$

3) Воспользуемся двумя формулами площади треугольника:
$AO\cdot BO\cdot\sin 60^\circ=AB\cdot h=AB\cdot R$,
$AB=\frac{AO\cdot BO\cdot\sin 60^\circ}{R}=\frac{58\frac{\sqrt{3}}{2}}{6}=\frac{29\sqrt{3}}{6}$

Ответ: 1) 6; 2) 60°; 3) $\frac{29\sqrt{3}}{6}$

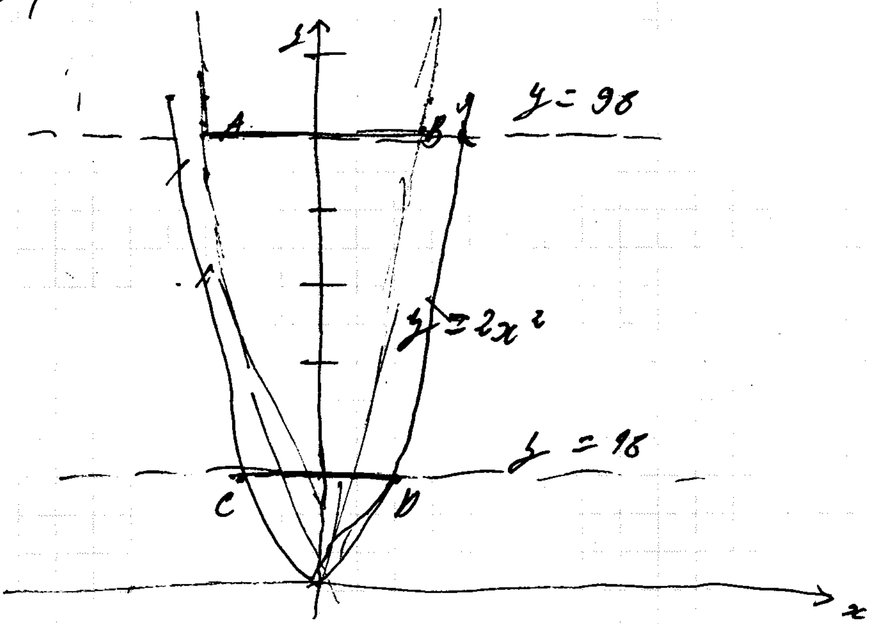
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 =$

$= \sin 21x - \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 = 0$

№1

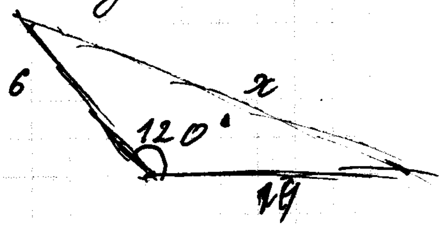


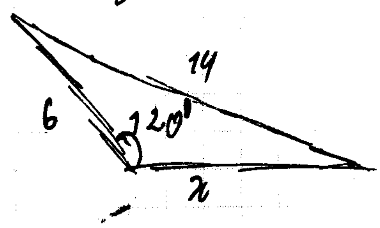
Найдем длины отрезков AB и CD

$98 = 2x^2$, $x = \pm 7$, $AB = 7 - (-7) = 14$

$18 = 2x^2$, $x = \pm 3$, $CD = 3 - (-3) = 6$

Итак, известны длины двух отрезков ~~не~~ искомого треугольника, причём понятно, что сторона длины 6 не может лежать против угла 120°. Имеем две возможности





1. По теореме косинусов:

$x^2 = 36 + 196 - 2 \cdot 6 \cdot 14 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$, $x^2 = 316$

2. $196 = 36 + x^2 - 2 \cdot 6 \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$, $x = 10$

Находим соответствующее значение параметра:

$2 \cdot \sqrt{\frac{a}{2}} = \sqrt{316}$, $a = 158$

$2 \cdot \sqrt{\frac{a}{2}} = 10$, $a = 50$

Ответ: 50; 158

№3 составим таблицу возможных видов данного 17-значного числа

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	8	8	8	8	8	8	8										
2	7	8	8	8	8	8	8	8									
3	7		8	8	8	8	8	8	8								
4	7			8	8	8	8	8	8	8							
5	7				8	8	8	8	8	8	8						
6	7					8	8	8	8	8	8	8					
7	7						8	8	8	8	8	8	8				
8	7							8	8	8	8	8	8	8			
9	7								8	8	8	8	8	8	8		
10	7									8	8	8	8	8	8	8	
11	7										8	8	8	8	8	8	8

Число не может начинаться цифрой 0, поэтому после вида, указанного в первой строке, для всех остальных случаев число начинается на цифру 7.

~~Для первого вида имеем 10 свободных позиций, причём одна обязательно занята цифрой 0, поэтому количество таких будет 2^9.~~
~~Для остальных десяти видов 9 свободных позиций для цифр 0 и 7, причём цифра~~

Для первого вида имеем 10 свободных позиций, причём одна обязательно занята цифрой 0 или цифрой 7, поэтому количество таких чисел будет $2(2^9-1)$.

Для остальных десяти видов 9 свободных

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

14-СС3

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

позиций для цифр 0 и 7, причём цифра 0 обязательно должна присутствовать, поэтому количество чисел каждого из этих видов равно 2^8.

Итого $2^9-2+10\cdot 2^8=3070$

Ответ: 3070

№2

Преобразуем выражение:

$\sin 3x\cdot\sin 7x=\frac{1}{2}(\cos 4x-\cos 10x)=\frac{1}{2}(2\cos^2 2x-1-$

$-2\cos^2 5x+1)=\cos^2 2x-\cos^2 5x$

Тогда функция примет вид:

$g(x)=\cos^2 2x-\sin^2 x+4=\cos^2 2x\ \frac{1-\cos 2x}{2}+4=$

$=\cos^2 2x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{7}{2}=(\cos 2x+\frac{1}{4})^2+\frac{55}{16}$

Наибольшее значение функции принимает при $\cos 2x=1$, то есть $g_{max}=5$

Наименьшее значение функция принимает при $\cos 2x=-\frac{1}{4}$, то есть $g_{min}=3{,}4375$

Ответ: 5; 3,4375

№5

Найдем ОДЗ:

$\begin{cases} x+4>0 \\ \sqrt{x+7}-x>0 \\ \sqrt{x+7}-x\neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x>-4 \\ -7\le x<\frac{1+\sqrt{29}}{2} \\ x\neq 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x>-4 \\ -4<x<\frac{1+\sqrt{29}}{2} \\ x\neq 2 \end{cases}$

На ОДЗ исходное неравенство равносильно следующему

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$(\sqrt{x+7}-x-1)(x+4-\sqrt{x+7}+x)\geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (1)\ \sqrt{x+7}-x-1>0 \\ x+4-\sqrt{x+7}+x\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x+7}-x-1<0 \\ x+4-\sqrt{x+7}+x<0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$\sqrt{x+7}-x-1>0 \Leftrightarrow \sqrt{x+7}>x+1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+7\geq 0 \\ x+1<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+1\geq 0 \\ x+7>x^2+2x+1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -7\leq x<-1 \\ -1\leq x\leq 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow -7\leq x<2$$

~~$\sqrt{x+7}-x-1\geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+7}\geq x+1$~~

$2x+4-\sqrt{x+7}\geq 0 \Leftrightarrow 2x+4\geq\sqrt{x+7} \Leftrightarrow \begin{cases} x+7\geq 0 \\ 4x^2+16x+16\geq x+7 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -7 \\ x\leq -3 \end{cases},\ \begin{cases} \cancel{x\geq -7} \\ x\geq -\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{4}$

$\sqrt{x+7}-x-1<0 \Leftrightarrow x+1>\sqrt{x+7} \Leftrightarrow \begin{cases} x+7\geq 0 \\ x^2+2x+1>x+7 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -7 \\ x<-3 \end{cases},\ \begin{cases} x>2 \end{cases} \Leftrightarrow 2$

$2x+4-\sqrt{x+7}<0 \Leftrightarrow \sqrt{x+7}>2x+4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+7\geq 0 \\ 2x+4<0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x+4\geq 0 \\ x+7>4x^2+16x+16 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -7\leq x<-2 \\ \begin{cases} x\geq -2 \\ -3<x<-\frac{3}{4} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -7\leq x<-2 \\ -2\leq x<-\frac{3}{4} \end{array}\right.$

$\begin{cases} -7\leq x<2 \\ x\geq -\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{3}{4}\leq x<2.$

$\begin{cases} \sqrt{x+7}-x-1<0 \\ x+4-\sqrt{x+7}+x<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>2 \\ -7\leq x<-\frac{3}{4} \end{cases}; \Rightarrow \varnothing$

Окончательно, исходное неравенство системы:

...

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)