

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1

ШИФР

9-28

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, отсекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120° ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.
3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
 - в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB .
5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.
7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5

$$\log_{\sqrt{x+7}-x} (x+4) \geq 1$$

$$\log_{\sqrt{x+7}-x} (x+4) \geq \log_{\sqrt{x+7}-x} (\sqrt{x+7}-x)$$

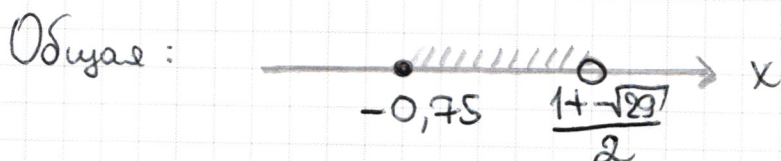
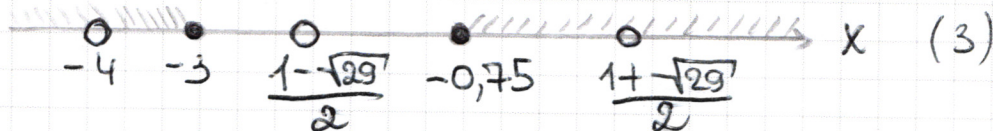
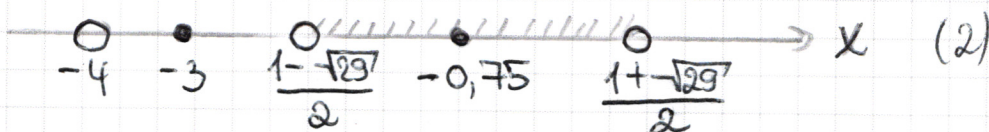
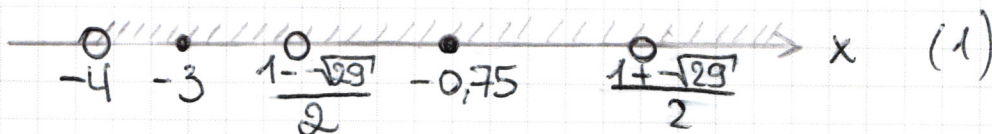
$$1 \begin{cases} x+4 > 0 \\ \sqrt{x+7}-x > 0 \\ x+4 \geq \sqrt{x+7}-x \end{cases}$$

$$2 \begin{cases} x > -4 \\ x^2 - x - 7 < 0 \\ 2x+4 \geq \sqrt{x+7} \end{cases}$$

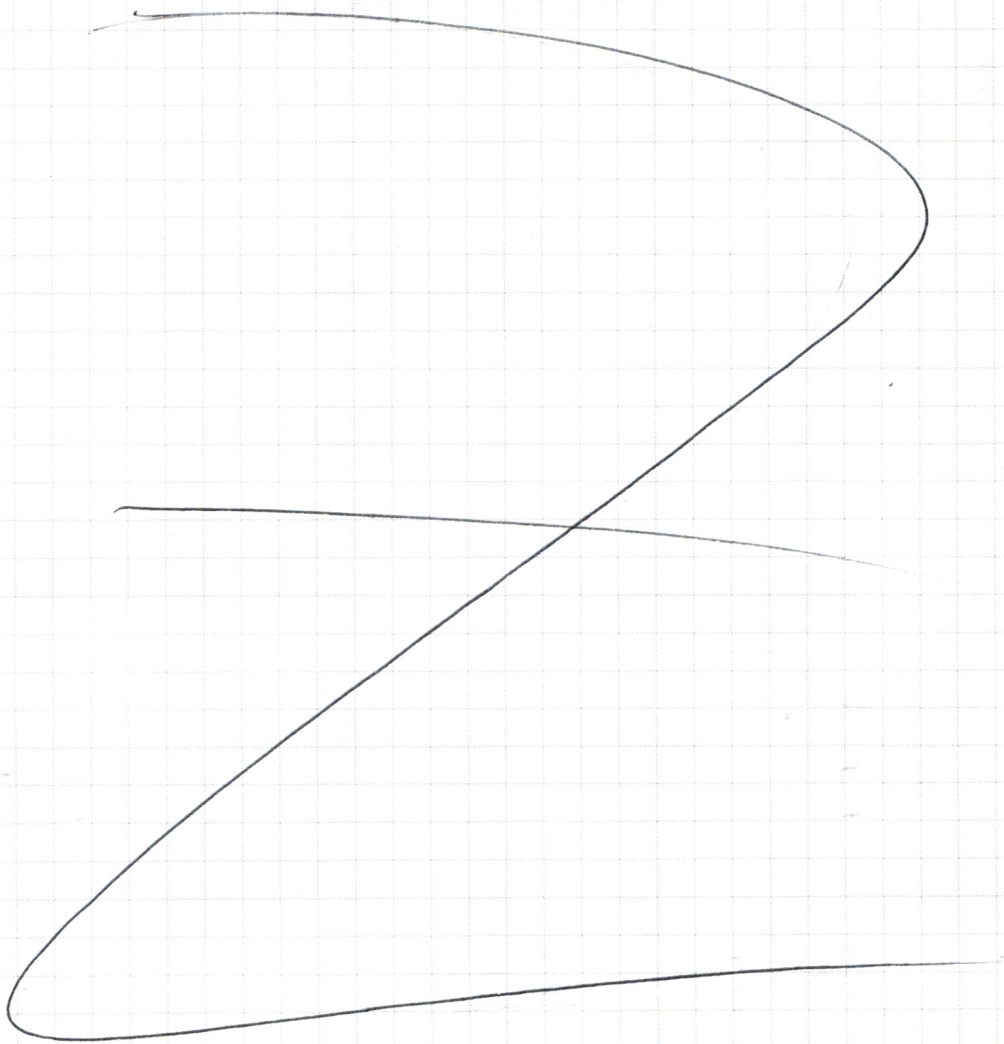
$$3 \begin{cases} x > -4 \\ \frac{1-\sqrt{29}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{29}}{2} \\ 4x^2 + 15x + 9 \geq 0 \end{cases}$$

$$4 \begin{cases} x > -4 & (1) \\ \frac{1-\sqrt{29}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{29}}{2} & (2) \\ x \in (-\infty; -3] \cup [-0,75; +\infty) & (3) \end{cases}$$

$$5 \begin{cases} x \in (-4; +\infty) & (1) \\ x \in \left(\frac{1-\sqrt{29}}{2}; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) & (2) \\ x \in (-\infty; -3] \cup [-0,75; +\infty) & (3) \end{cases}$$



Ответ: $x \in \left[-0,75; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right]$.

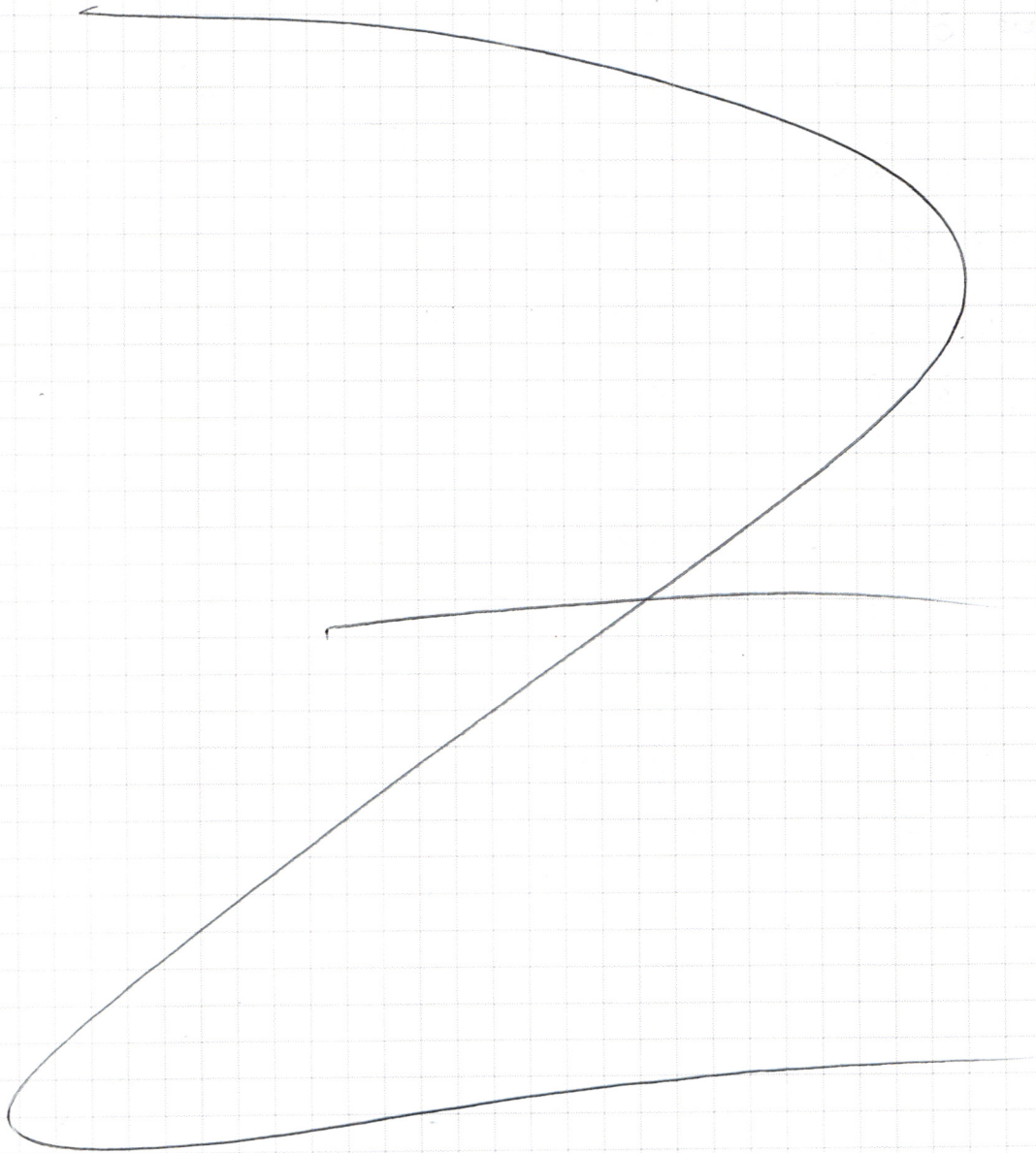


ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 3

- 1 8888888 xxxxxxx
- 2 x8888888 xxxxxxx
- 3 xx8888888 xxxxxxx
- 4 xxx8888888 xxxxxxx
- 5 xxxx8888888 xxxxxxx
- 6 xxxxx8888888 xxxxxxx
- 7 xxxxxx8888888 xxxxxxx
- 8 xxxxxx88888888 xxxxxxx
- 9 xxxxxx888888888 xxxxxxx
- 10 xxxxxx8888888888 xxxxxxx
- 11 xxxxxx88888888888

вариации 17-значного
числа, где x одно из
двух неизвестных (0/7)

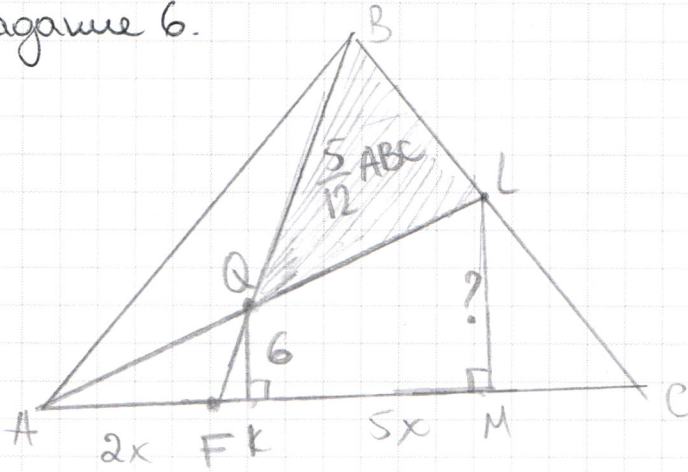


черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 2.1
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 6.



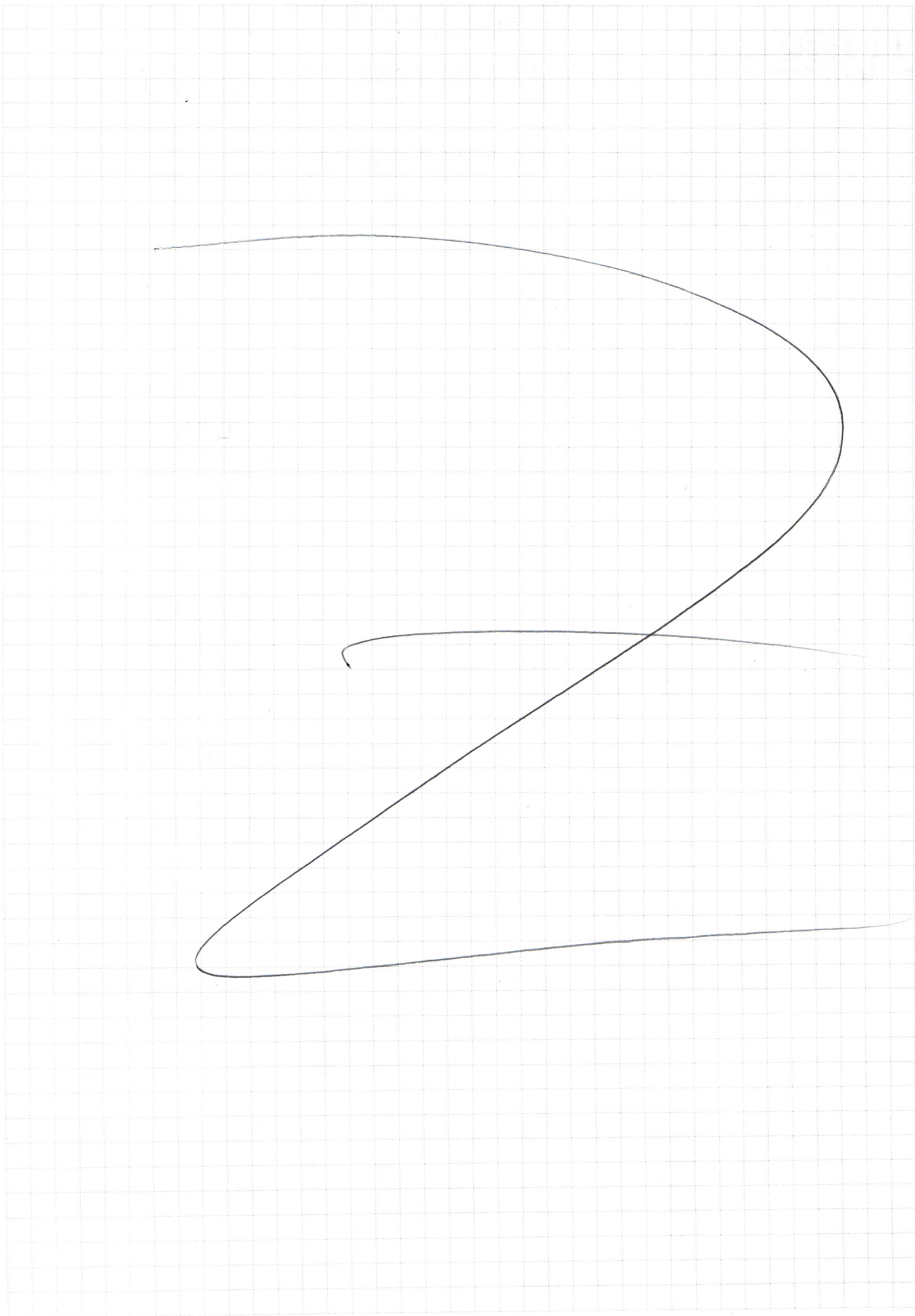
$$AF : FC = 2 : 5$$

Q - пересечение BF и AL

$$S_{BQL} : S_{ABC} = 5 : 12$$

$$QK = 6$$

Найти: LM



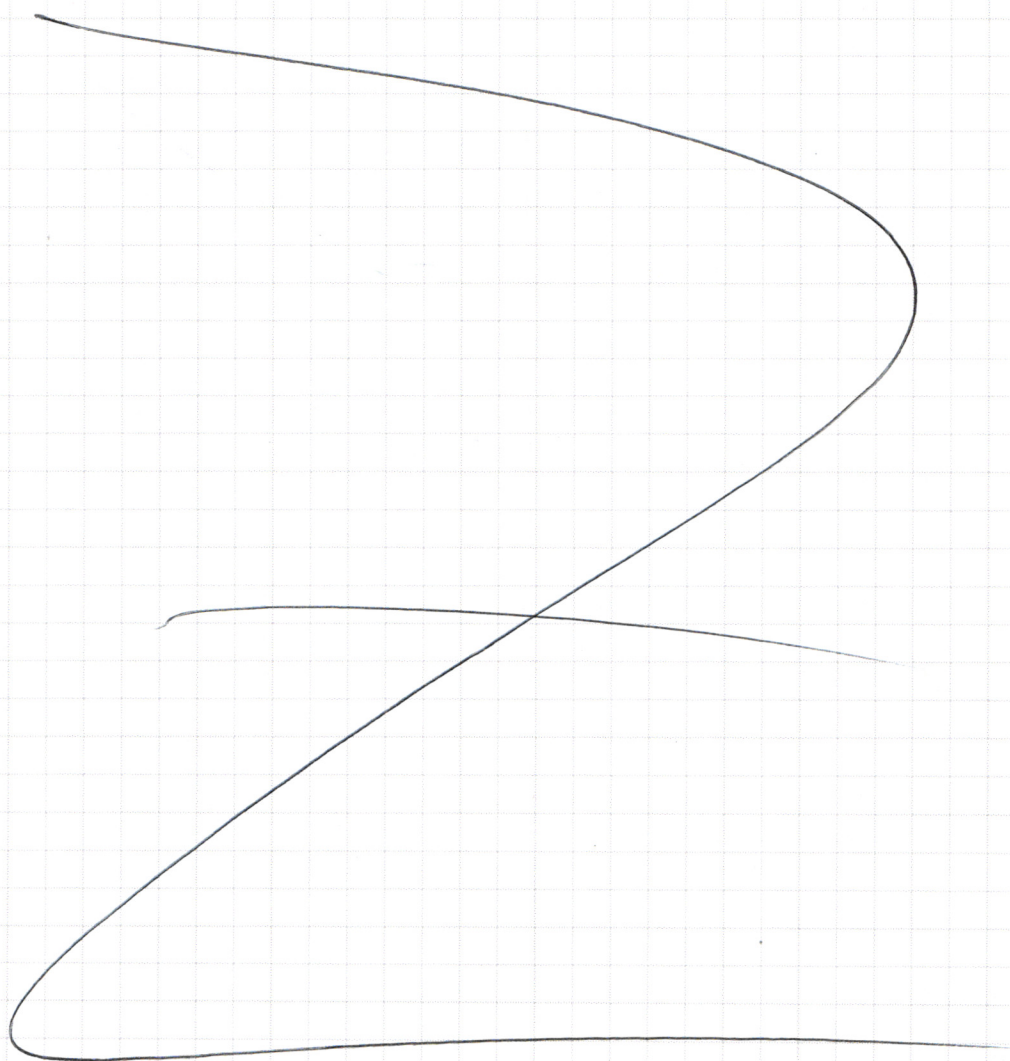
черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

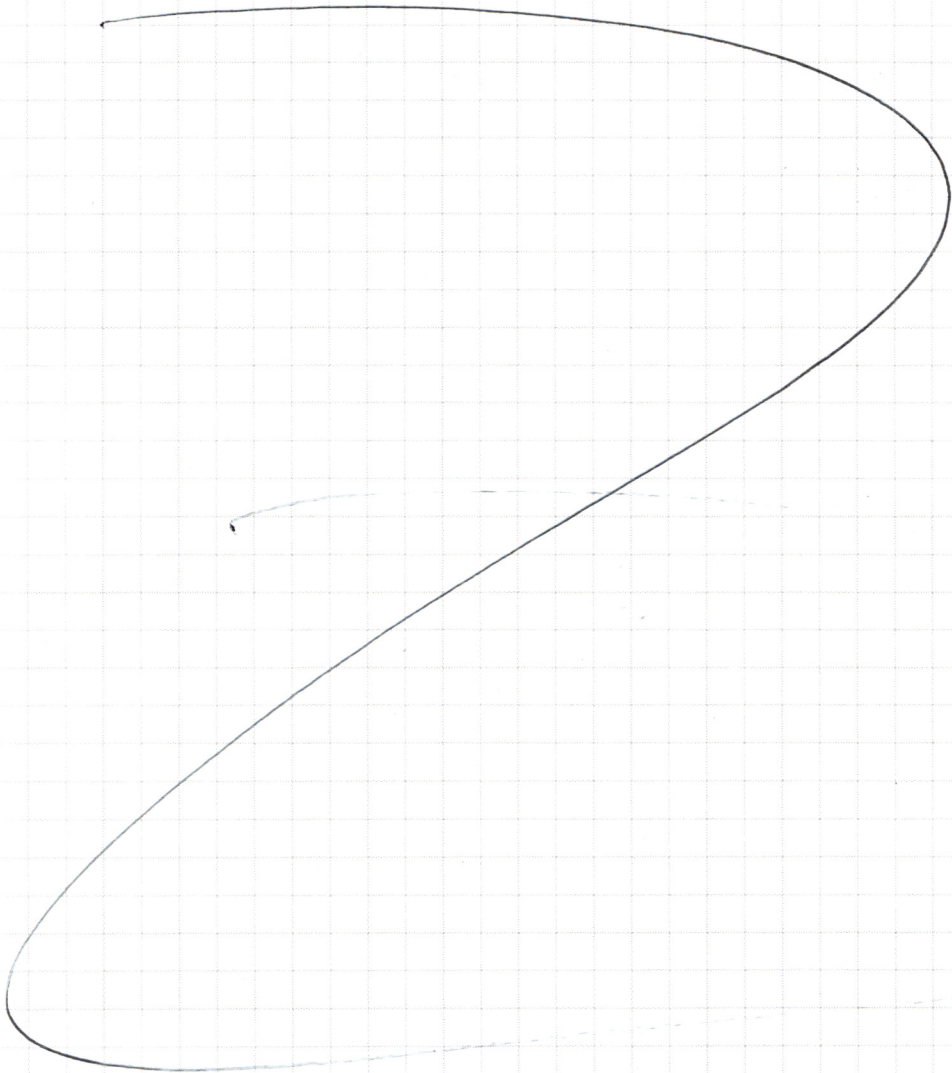
Страница № 3. 1
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 2

$$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$$





черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 4.1
(Нумеровать только чистовики)



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

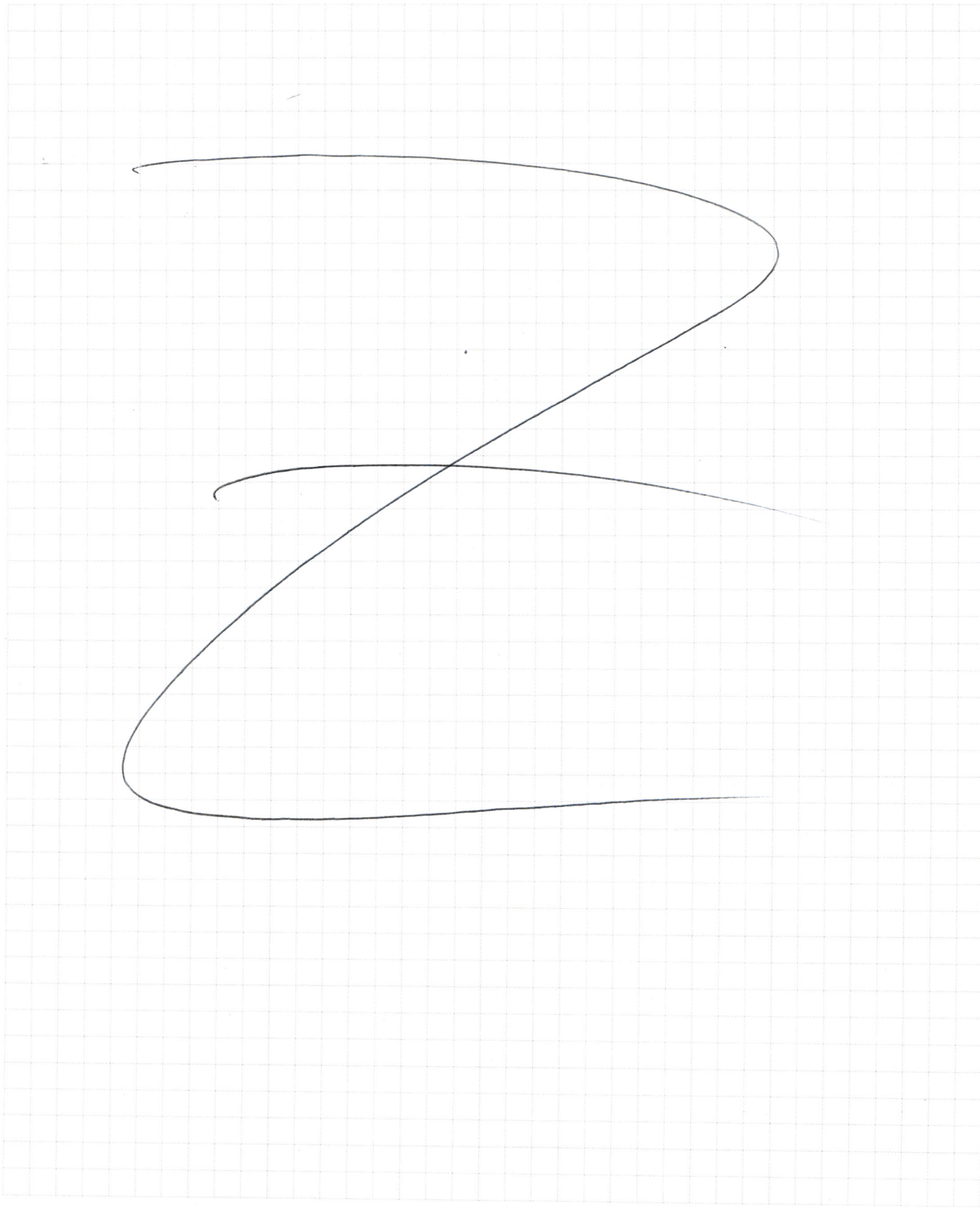
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-28

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

