МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2 ШИФР 14-016

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.

3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

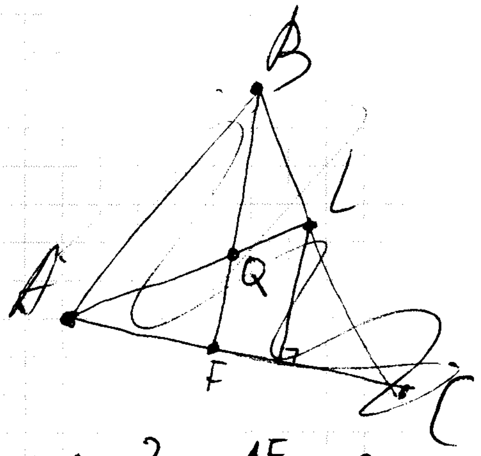
   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB.

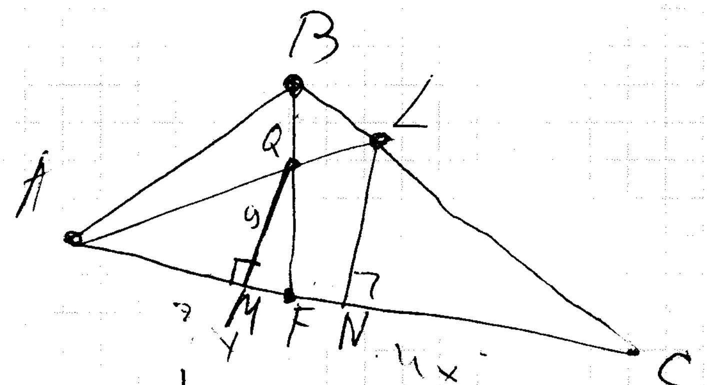
5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.

7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$LN - ?$ $\frac{AF}{FC} = \frac{3}{4}$ $\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{1}{16}$. $QM = 9$.

по т. Менелая. из ΔALC и сек BF

$$\frac{BC}{BL} \cdot \frac{LQ}{AQ} \cdot \frac{AF}{FC} = 1.$$

ΔBFC сек AL. $\frac{AC}{AF} \cdot \frac{FQ}{QB} \cdot \frac{BL}{LC} = 1.$

$$\boxed{\frac{BC}{BL} \cdot \frac{LQ}{AQ} = \frac{4}{3}}$$

$\frac{BC}{CL} \cdot \frac{LQ}{AQ} \cdot \cancel{\frac{AF}{FC}} = \frac{AC}{\cancel{FC}} \cdot \frac{FQ}{QB} \cdot \frac{BL}{\cancel{CL}}$

$\frac{BC}{CL} = \frac{4}{3} \frac{AQ}{LQ}$

$\frac{BC}{BL} \cdot \frac{AF}{AC} = \frac{FQ}{QB}$.

$\overline{a} = \overline{AB}$
$\overline{b} = \overline{AC}$

$\overline{AF} = \frac{3}{7} \overline{AC}$ $\overline{BC} = -\overline{b} + \overline{a}$

$\overline{FC} = \frac{4}{7} \overline{AC}$

$AM^2 + 81 = AQ^2$
$AN^2 + LN^2 = AL^2$

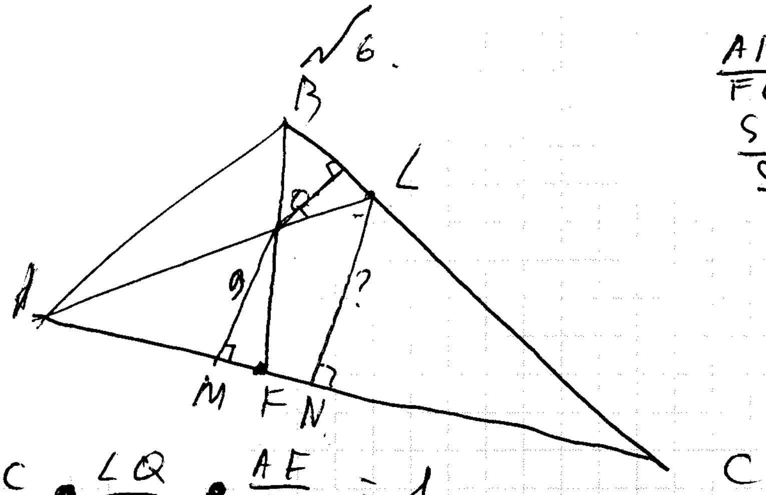
$QL = AL - AQ$
~~$QL = \sqrt{\ldots} - \sqrt{AM^2 + 81}$~~

$2r = 10$

$\boxed{r = 5}$

8.) $AO \cdot BO = 42 \quad AB - ? = \sqrt{42}$

№6.



$\frac{AF}{FC} = \frac{3}{4} \quad \angle N - ?$

$\frac{S_{BQL}}{S_{ABC}} = \frac{1}{16}$

$QM = 9$

$AF = \frac{3}{4} FC$

$AC = \frac{7}{4} FC$

$\frac{BC}{CL} \cdot \frac{LQ}{AQ} \cdot \frac{AF}{FC} = 1$

$\frac{AC}{CF} \cdot \frac{FQ}{QB} \cdot \frac{BL}{LC} = 1$

$\boxed{\frac{BC}{CL} \cdot \frac{LQ}{AQ} = \frac{4}{3}}$

$S_T = \frac{abc}{4R} = \cancel{\frac{abc}{\frac{2a}{\sin\alpha}}} = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$

$\frac{7}{4} \cdot \frac{FQ}{QB} \cdot \frac{BL}{LC} = 1 \quad 2R = \frac{a}{\sin\alpha}$

$\boxed{\frac{FQ}{QB} \cdot \frac{BL}{LC} = \frac{4}{7}}$

$FQ \cdot BL = \frac{4}{7} QB \cdot LC$

$BL = \frac{4}{7} QB \cdot \frac{LC}{FQ}$

$\frac{BC}{BC - BL} \cdot \frac{LQ}{AQ} = \frac{4}{3}$

$\frac{BC}{BC - \frac{4}{7} QB \cdot \frac{LC}{FQ}} \cdot \frac{LQ}{AQ} = \frac{4}{3}$

№3.

9 5 5 5 5 5 5 0

5 5 5 5 5 5 0 0

2^{12}

$10+9+8+7+6+5+4+3+2+1 \quad \frac{11}{2} \cdot 10 = 55$

9 5 5 5 5 5 3 3 2^{11}

$2^{12} + 11 \cdot 2^{11} = 2^{11} \cdot 13$

Т.к число 18-~~3~~значное ~~то~~ оно и цифр „5" ровно шесть и они идут подрят, то ~~число~~ ~~но~~ либо первые

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\varphi(t) = \frac{(2t-\frac{1}{2})^2 - \frac{73}{4}}{4} \quad \text{при } |t| \le 1$$

$$\varphi(t) = \frac{4t^2 - 2t - 18}{4} = t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{18}{4}$$

$$\varphi'(t) = 2t - \frac{1}{2}$$

$\varphi'(t)$

$\frac{1}{4}$

$-$ $+$

$\varphi(t)$

5 5 5 5 5 5 5

5 5 5 5 5 5

2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 ^{12}

5 5 5 5 5 5

$12 \cdot 2^{11} = 24 \cdot 2^{11} = 3 \cdot 2^{14}$

№5. $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \ge 1$

$$\begin{cases} x > -5 \\ \sqrt{x+3} - x > 0 \\ \sqrt{x+3} - x \ne 1 \end{cases}$$

$\sqrt{x+3} > x$

$\sqrt{x+3} \ne x+1$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0 \\ x \ge -3 \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 0 \\ x+3 > x^2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$x^2 - x - 3 < 0$

$D = 1 + 12 = 13$; $x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$

$$\begin{cases} x+3 \ne x^2 + 2x + 1 \\ x \ge -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + x - 2 \ne 0 \\ x \ge -1 \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} x \ne 1 \\ x \ne -2 \end{cases} \\ x \ge -1 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} x \in [-3; 0) \\ x \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \end{array}\right. \quad \begin{cases} x \in \left[-3; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \\ x \ne 1 \end{cases} \quad (*)$$

$$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) - \log_{\sqrt{x+3}-x}(\sqrt{x+3} - x) \ge 0$$

$$\frac{x + 5 - \sqrt{x+3} + x}{\sqrt{x+3} - x - 1} \ge 0$$

$$\frac{2x-\sqrt{x+3}+5}{\sqrt{x+3}-x-1} \geq 0 \qquad \sqrt{x+3}=t \quad t \geq 0 \; (*)$$

$$x+3=t^2$$

$$x=t^2-3$$

$$\frac{2(t^2-3)-t+5}{t-t^2+3-1} \geq 0.$$

$$\frac{2t^2-t-1}{t^2-t-2} \leq 0$$

$$\frac{(t-1)(2t+1)}{(t+1)(t-2)} \leq 0$$

$1024 \cdot 165$: 5120, 6144, 1024, 168960

$-1 \quad -\frac{1}{2} \quad 1 \quad 2 \quad t.$

$+ \quad - \quad + \quad - \quad +$

$$t \in \left(-1; -\tfrac{1}{2}\right] \cup [1; 2)$$

~~$2\sqrt{x+3} \leq 6x$ при~~ с учетом $(*)$

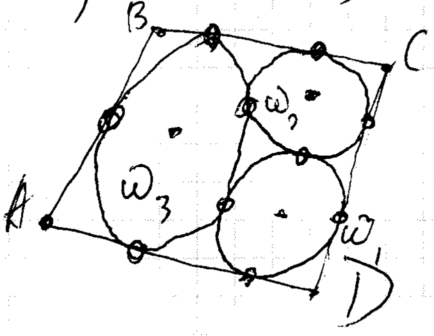
$$1 \leq t < 2$$

$$1 \leq \sqrt{x+3} < 2.$$

$$1 \leq x+3 < 4$$

$$\boxed{-2 \leq x < 1}$$

С учетом $(*)$ $\quad x \in [-2; 1)$



а) $AD+BC-AB-CD=10$

$0{,}5 \; 1$

$10 \cdot 2^{10}$

$120 \cdot 2^{10} =$

$14 \cdot 2^4 \vee 10 \cdot 2^{10}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

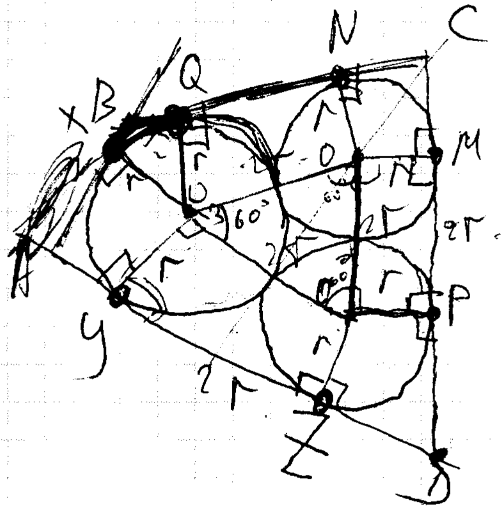
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

11-С1С

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$O_2M \parallel O_1P$ т.к. $O_2M \perp CD$, $O_1P \perp CD$.

O_2MPO_1 прямоуг.

$O_2O_1 = MP = 2r$

$O_1Z \parallel O_3Y$ т.к. $O_1Z \perp AD$, $O_3Y \perp AD$

O_1O_3YZ прямоуг.

Аналогично. $O_1O_3 = YZ = 2r$.

QNO_2O_3 прямоуг $O_2O_3 = QN = 2r$.

$$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 = \frac{2\sin 5x \sin 9x - 2\sin^2 7x - 2\cos^2 x - 6}{2} =$$

$$= \frac{\cos 4x - \cos 14x - 1 + \cos 14x - 1 - \cos 2x - 6}{2} =$$

$$= \frac{\cos 4x - \cos 2x - 8}{2} = \frac{2\cos^2 2x - \cos 2x - 9}{2} =$$

$$= \frac{32\cos^2 2x - 16\cos 2x - 64}{32} = \frac{64\cos^2 2x - 32\cos 2x - 128}{64} =$$

$$= (4\cos 2x - 1)^2 \quad \frac{16\cos^2 2x - 8\cos 2x - 72}{16} =$$

$$= \frac{(4\cos 2x - 1)^2 - 73}{16}.$$

$(\ldots)^2 \geq 0.$

$g_{мин.}$ при $\cos 2x = \frac{1}{4}$, $g_{мин} = -\frac{73}{16}$.

$$\begin{array}{r} 73 \\ -25 \\ \hline 48 \end{array}$$

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$-1 \le \cos 2x \le 1$

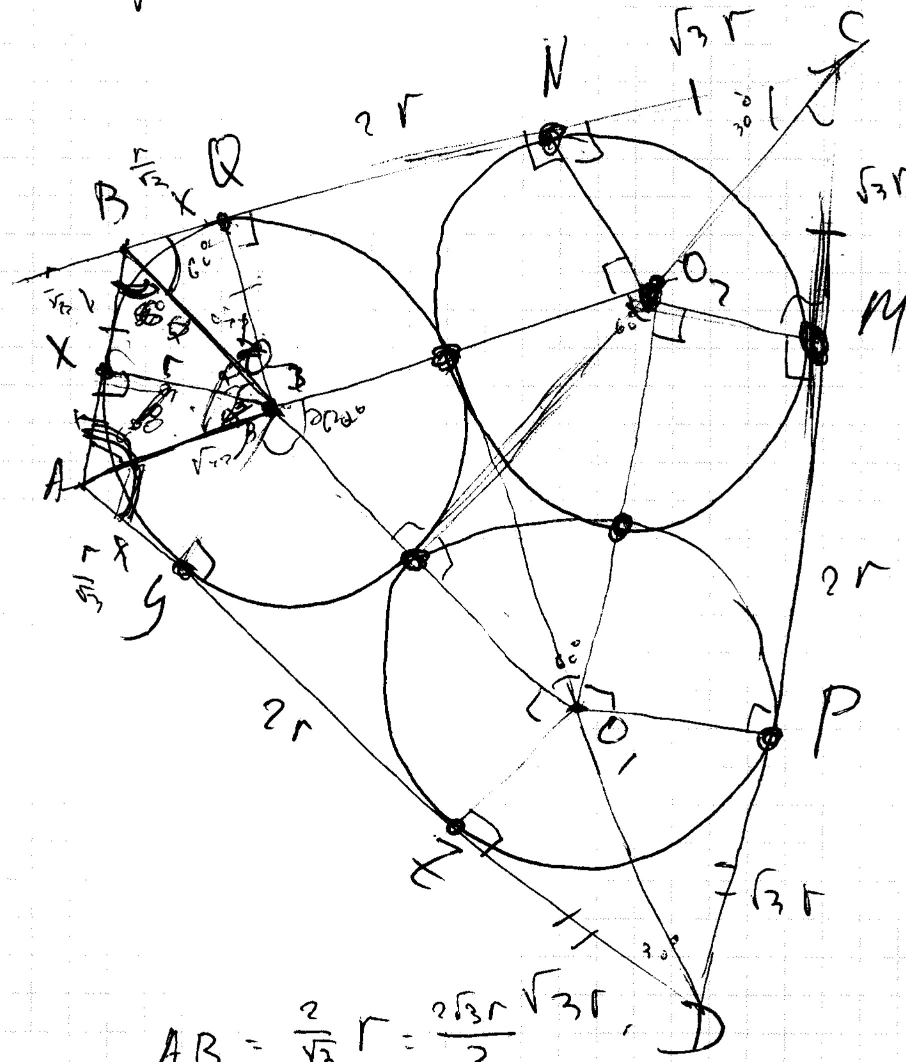
$-4 \le 4\cos 2x \le 4$

$-5 \le 4\cos 2x - 1 \le 3$

$0 \le (4\cos 2x - 1)^2 \le 25$

при $\cos 2x = -1$ y наиб достигается

и равно $\frac{25-73}{16} = \frac{-48}{16} = -3$



$\angle B = 60^\circ$.

$O_3X = \frac{1}{2}\sqrt{4OB^2 - 4x^2} = r$

$4OB^2 - 4x^2 = 4r^2$

$OB^2 - x^2 = r^2$

$OB^2 = r^2 + x^2$

$r = \sqrt{3}x$

$x = \frac{r}{\sqrt{3}}$

$\frac{r}{NC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$NC = \sqrt{3}r$

$AB = \frac{2}{\sqrt{3}}r = \frac{2\sqrt{3}r}{3}$

$BC = 2r + \frac{\sqrt{3}r}{3} + \sqrt{3}r = 2r + \frac{4\sqrt{3}r}{3}$

$CD = 2\sqrt{3}r + 2r$

$AD = \frac{\sqrt{3}r}{3} + 2r + \sqrt{3}r = 2r + \frac{4\sqrt{3}r}{3}$

4) $AD + BC - (AB) - CD = 10$

$4r + \frac{8\sqrt{3}r}{3} - \left(\frac{2\sqrt{3}r}{3} + 2\sqrt{3}r + 2r\right) = 10.$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

14-С1С

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $y = x^2$ $y = 169$.

$x^2 = 169$

$x = \pm 13 \Rightarrow$ отрезок длиной 26.

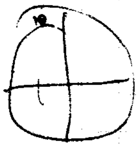
$y = 64$.

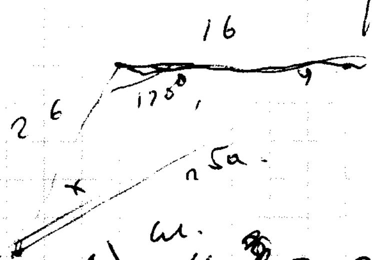
$x^2 = 64$

$x = \pm 8 \Rightarrow$ отр. длиной 16.

$y = a$ $a = x^2$

$x = \pm\sqrt{a}$ при $a \geq 0$. отр длиной $(2\sqrt{a})$





$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha$.

$\frac{\cancel{2\sqrt{a}}}{\sin 120}$

1) $4a = 26^2 + 16^2 - 2\cdot 26\cdot 16\cos 120° =$

$4a = 26^2 + 16^2 + 2\cdot 26\cdot 16\cdot\frac{1}{2}$

$4a = 26^2 + 26\cdot 16 + 16^2$

$a = 13^2 + 26\cdot 4 + 4^3 =$

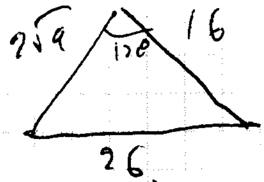
$= 13(13+8) + 64 =$

$= 21\cdot 13 + 64 =$

$= \cancel{a = \sqrt{337}}$ $a = 337$

$21 \cdot 13$: 63, 21, 273; $273 + 64 = 337$; $337 - 169 - 64 = 105$

2)



$26^2 = 4a + 16^2 - 2\cdot 2\sqrt{a}\cdot 16\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) =$

$= 4a + 16^2 + 2\sqrt{a}\cdot 16 =$

$13^2 = a + 64 + 8\sqrt{a}$.

$\sqrt{a} = t$ $t \geq 0$.

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$t^2+8t-105=0$

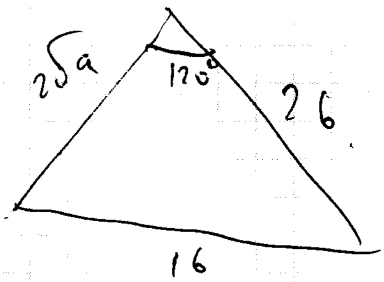
$k=4$

$\frac{D}{4}=16+105=121$

$t=-4+11=7$ уд$(+)$ $\Rightarrow$ $\sqrt{a}=7$ $\boxed{a=49}$

$t=-4-11=-15$ неуд$(+)$

3).



$16^2=4a+26^2-2\cdot 2\sqrt{a}\cdot 26\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=$

[illegible] $=4a+26^2+2\sqrt{a}\cdot 26$

$64=a+13^2+13\sqrt{a}$

$a+13\sqrt{a}+105=0$

$\sqrt{a}=t \quad t\geq 0$

$t^2+13t+105=0$

$D=169-420<0$

$t\in\varnothing$

Ответ: $a=49;\ 337$.

№2. $g(x)=\sin 5x\cdot\sin 9x-\sin^2 7x-\cos^2 x-3$

$g(x)=\frac{1}{2}\left(\cos(5x-9x)-\cos(5x+9x)\right)-\sin^2 7x-\cos^2 x-3=$

$=\frac{1}{2}\left(\cos 4x-\cos 14x\right)-\frac{1-\cos 14x}{2}-$

$-\frac{1+\cos 2x}{2}-3=\frac{1}{2}\left(\cos 4x-\cancel{\cos 14x}-1+\cancel{\cos 14x}-\right.$

$\left.-1-\cos 2x-6\right)=\frac{1}{2}\left(2\cos^2 2x-1-1-1-\cos 2x-6\right)=$

$=\frac{1}{2}\left(2\cos^2 2x-\cos 2x-9\right)=$

$=\frac{4\cos^2 2x-2\cos 2x-18}{4}=\frac{\left(2\cos 2x-\frac{1}{2}\right)^2-18\frac{1}{4}}{4}$

$4\cos^2 2x-2\cos 2x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-18$

$-1\leq\cos 2x\leq 1$

$\cancel{g_{наиб}(x)=\frac{(2-1)^2-19}{4}=\frac{-18}{4}=\boxed{-\frac{9}{2}}}$

$\left(2\cos 2x-\frac{1}{2}\right)^2\geq 0 \Rightarrow$ $g_{наим}$ при $\cos 2x=\frac{1}{4}$

$\boxed{\cancel{g_{наим}=-\frac{59}{4}}}$ $g_{наим}=-\frac{73}{16}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$y=x^2$ Найдем абсциссы точек пересечения $y=x^2$ и $y=169$.

$x^2=169$ $x=\pm 13$ => получится отрезок длиной $13+13=26$.

Найдем абсциссы точек пересечения $y=x^2$ и $y=64$.

$x^2=64$ $x=\pm 8$ => получится отрезок длиной $8+8=16$

Найдем абсциссы точек пересечения $y=x^2$ и $y=a$

При $a<0$ нет точек пересечения.

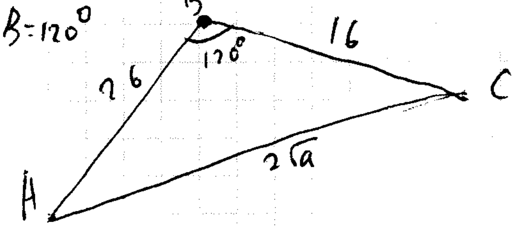
при $a=0$ 1 точки пересечения

при $a>0$ 2 точки пересечения. $x^2=a$ $x=\pm\sqrt{a}$

Получился отрезок длиной $\sqrt{a}+\sqrt{a}=2\sqrt{a}$

Пусть $AB=26$ $BC=16$ $AC=2\sqrt{a}$

1) $\angle B=120^0$



По т. косинусов

$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B$

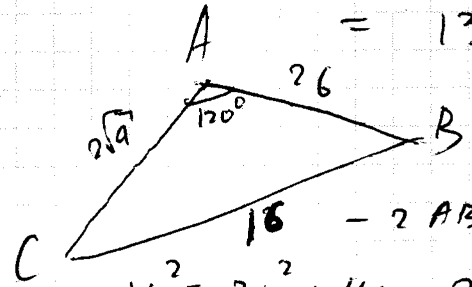
$4a=26^2+16^2-2\cdot 26\cdot 16\cdot\cos 120^0$

$4a=26^2+16^2+26\cdot 16$

$a=13^2+64+4\cdot 26=$

$=13(13+8)+64=337$

2) $\angle A=120^0$.



$BC^2=AB^2+AC^2-$

$-2AB\cdot AC\cos 120^0$

$16^2=26^2+4a-2\cdot 26\cdot 2\sqrt{a}\left(-\frac{1}{2}\right)$

$16^2=26^2+4a+2\cdot 26\sqrt{a}$

$64=13^2+a+13\sqrt{a}$

$a+13\sqrt{a}+105=0$

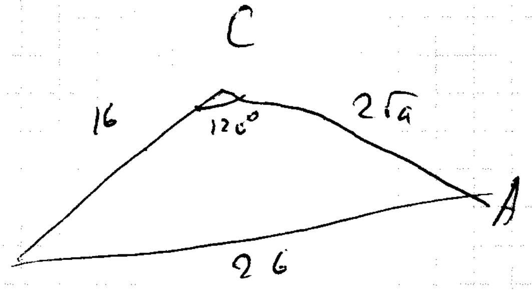
$\sqrt{a}=t \qquad t\geq 0$

$t^2+13t+105=0$

$D=169-420<0$

$t\in\varnothing \Rightarrow a\in\varnothing$

3) $\angle C=120^\circ$



$AB^2=BC^2+AC^2-2BC\cdot AC\cdot\cos 120^\circ$

$26^2=16^2+4a+16\cdot 2\sqrt{a}$

$13^2=64+a+8\sqrt{a}$

$a+8\sqrt{a}-105=0$

$\sqrt{a}=b \qquad b\geq 0\ (*)$

$b^2+8b-105=0$

$\frac{D}{4}=16+105=121$

$b_1=-4+11=7$ уд $(*)$

$b_2=-4-11=-15$ неудовлетворяет $(*)$

$\sqrt{a}=7$

$a=49$

Ответ: 49; 337.

№2. $g(x)=\sin 5x\cdot\sin 9x-\sin^2 7x-\cos^2 x-3$

$g(x)=\dfrac{2\sin 5x\sin 9x-(1-\cos 14x)-(1+\cos 2x)-6}{2}$

$g(x)=\dfrac{\cos 4x-\cos 14x-1+\cos 14x-1-\cos 2x-6}{2}$

$g(x)=\dfrac{\cos 4x-\cos 2x-8}{2} \qquad g(x)=\dfrac{2\cos^2 2x-\cos 2x-9}{2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$g(x) = \frac{16\cos^2 2x - 8\cos 2x - 72}{16}$$

$$g(x) = \frac{(4\cos 2x - 1)^2 - 73}{16}$$

$$-1 \le \cos 2x \le 1$$
$$-4 \le 4\cos 2x \le 4$$
$$-5 \le 4\cos 2x - 1 \le 3$$
$$0 \le (4\cos 2x - 1)^2 \le 25$$

$$-73 \le (4\cos 2x - 1)^2 - 73 \le -48$$

$$-\frac{73}{16} \le \frac{(4\cos 2x - 1)^2 - 73}{16} \le -3$$

$$-\frac{73}{16} \le g(x) \le -3$$

$$g_{наим} = -\frac{73}{16}$$

$$g_{наиб} = -3$$

№3.

Т.к число 18-значное и содержит ровно шесть идущих подряд цифр пять, то либо ~~число начинается~~ первая цифра числа „9", либо число начитается на шесть идущих подряд цифр „5".

1.) Если число начинается на шесть идущих подряд цифр „5" то ~~для того~~ нужно чтобы хотя бы одна цифра 0 или 5 были.

Возможны 66 вариантов расстановки 0 и 9 среди 12 ~~позиции~~ разрядов числа.

$66 \cdot 2^{10}$ вариантов.

2.) Если число начинается с 9 то.
Возможны 11 вариантов расстановки „555555"
и 10 вариантов расстановки „0" для каждого из вариантов.

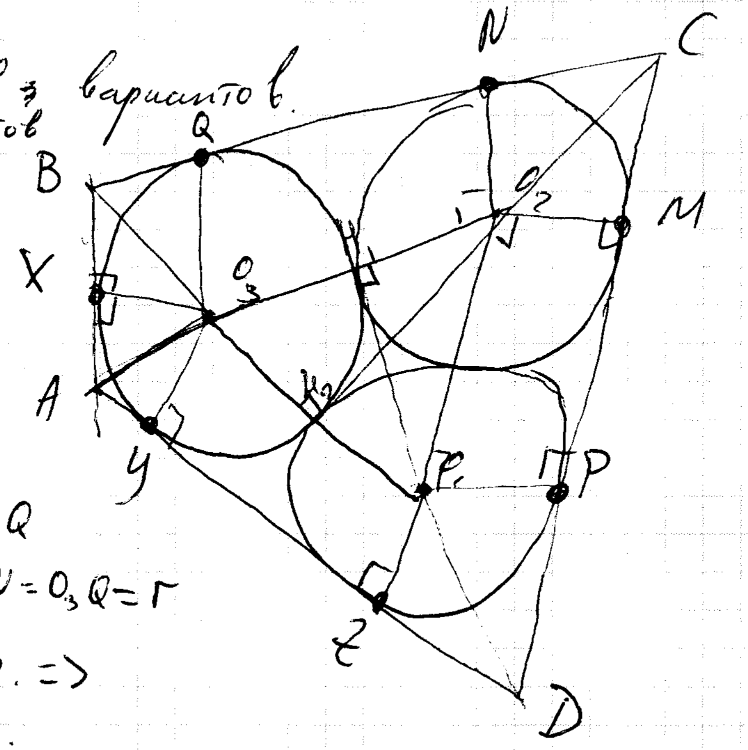
$110 \cdot 2^{10}$ вариантов.

Всего.

$66 \cdot 2^{10} + 110 \cdot 2^{10} =$ вариантов.

Ответ: $176 \cdot 2^{10}$ вариантов

№4.



$$\left.\begin{array}{l} O_2N \perp BC \\ O_3Q \perp BC \end{array}\right\} \begin{array}{l} O_2N \parallel O_3Q \\ \text{т.к. } O_2N = O_3Q = r \end{array}$$

O_3QNO_2 - прямоуг. $\Rightarrow$

$\Rightarrow O_2O_3 = 2r = QN$.

Аналогично O_2MPO_1 - прямоугольник и O_1ZYO_3 - прямоуг

$O_3O_1 = 2r = YZ \qquad O_1O_2 = 2r = MP$

$O_1O_2 = O_2O_3 = O_1O_3 = 2r \Rightarrow \Delta O_1O_2O_3$ р/с

$\angle O_2O_3O_1 = 60^\circ$

$BX = BQ$ т.к. отр. касат.

$AX = AY$ т.к. отр. касат.

BO_3 - биссектриса $\Rightarrow \angle XBO_3 = \angle QBO_3$

$\Delta BXO_3 = \Delta BQO_3$ (по I пр).

$\Delta AXO_3 = \Delta AYO_3$ аналогично.

ΔABO_3 р/б $\Rightarrow BO = AO$.

$BX = AX = BQ = AY$

~~Rq~~. $\angle O_2O_3O_1 = 60^\circ \Rightarrow \angle AO_3B = 60^\circ$.

ΔABO_3 р/с. $\angle XBO_3 = 60^\circ$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$BX = \frac{r}{tg 60^\circ} = \frac{r}{\sqrt{3}}$.

$AB = \frac{2r}{\sqrt{3}}$ $\quad \angle O_3BQ = \angle XBO_3 = 60^\circ \Rightarrow$

$BQ = \frac{r}{\sqrt{3}} = AY$. $\quad \Rightarrow$ из $\triangle BH_2C$ $\angle BCH_2 = 30^\circ$.

$NC = \sqrt{3}r = CM$. (отр. кас).

Аналогично из $\triangle AH_1D$ $\angle ADH_1 = 30^\circ$.

$ZD = PD = \sqrt{3}r$.

а) $AD + BC - AB - CD = 10$.

$AB = \frac{2\sqrt{3}r}{3}$

$BC = 2r + \frac{4\sqrt{3}r}{3}$

$CD = 2\sqrt{3}r + 2r$

$AD = 2r + \frac{4\sqrt{3}r}{3}$

$4r + \frac{8\sqrt{3}r}{3} - \left(\frac{2\sqrt{3}r}{3} + 2\sqrt{3}r + 2r\right) = 10$.

$r = 5$

б) $\angle AO_3B = 60^\circ$

в) $AO \cdot BO = 42$ $\triangle AO_3B$ р/с $\Rightarrow AB = \sqrt{42}$.

№5. $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$

$$\begin{cases} x > -5 \\ \sqrt{x+3} > x \ (2) \\ \sqrt{x+3} - x \neq 1 \ (3). \end{cases}$$

(2) $\sqrt{x+3} > x$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0 \\ x \geq -3 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0 \\ x+3 > x^2 \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x \in [-3; 0). \\ x \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \end{array}\right. \quad x \in \left[-3; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$$

(3). $\sqrt{x+3} = x+1$

$\begin{cases} x+3 = x^2+2x+1 \\ x \geq -1 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+x-2=0 \\ x \geq -1 \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array} \right. \\ x \geq -1 \end{cases}$ $x=1$

О.Д.З исходного неравенства.

$\begin{cases} x > -5 \\ x \in \left[-3; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \\ x \neq 1 \end{cases}$ $(*)$ $x \in [-3; 1) \cup \left(1; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) - \log_{\sqrt{x+3}-x}(\sqrt{x+3}-x) \geq 0.$

$\frac{x+5-\sqrt{x+3}+x}{\sqrt{x+3}-x-1} \geq 0$ $t=\sqrt{x+3}$ $t \geq 0$ $(**)$

$t^2-3=x.$

$\frac{2t^2-t-1}{t^2-t-2} \leq 0$

$\frac{(t-1)(2t+1)}{(t+1)(t-2)} \leq 0$

t: $+$ -1 $-$ $-\frac{1}{2}$ $+$ 1 $-$ 2 $+$

$t \in \left(-1; -\frac{1}{2}\right] \cup [1; 2)$

С учетом $(**)$ $t \in [1; 2)$.

$1 \leq \sqrt{x+3} < 2$

$1 \leq x+3 < 4.$

$-2 \leq x < 1.$

С учетом $(*)$ $-2 \leq x < 1$

Ответ: $-2 \leq x < 1$

$\square$ черновик $\boxtimes$ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)