

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1

ШИФР

11-014

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120° ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.
3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
 - в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB .
5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.
7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) $\log_{\sqrt{x+7}-x} (x+4) \geq 1.$

$x > -4.$

1) $0 < \sqrt{x+7}-x$ и $\sqrt{x+7}-x \leq 1$

$\sqrt{x+7}-x > 0$

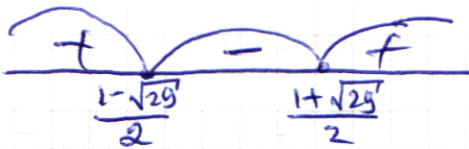
$x+7 < x^2$

$x^2 - x - 7 < 0$

$D = 1 + 4 \cdot 7 = 29$

$x_1 = \frac{1 - \sqrt{29}}{2}; x_2 = \frac{1 + \sqrt{29}}{2};$

$(x - \frac{1 - \sqrt{29}}{2})(x - \frac{1 + \sqrt{29}}{2}) < 0$



$\sqrt{x+7} < x+1$

$x+7 < x^2 + 2x + 1$

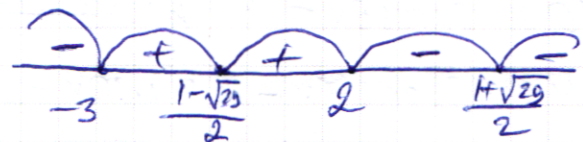
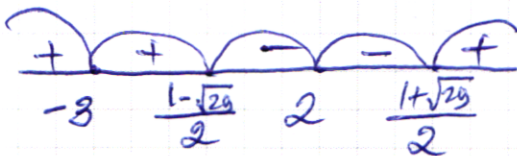
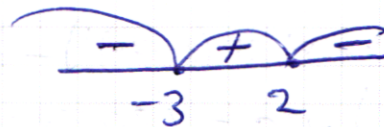
$x^2 + x - 6 > 0$

$D = 1 + 24 = 25$

$x_1 = \frac{-1-5}{2} = -3; x_2 = \frac{-1+5}{2} = 2$

$(x+3)(x-2) > 0$

$-(x+3)(x-2) < 0$



$x \in (2; \frac{1 + \sqrt{29}}{2})$

$(x+4) \leq \sqrt{x+7}-x.$

$2x+4 \leq \sqrt{x+7}$

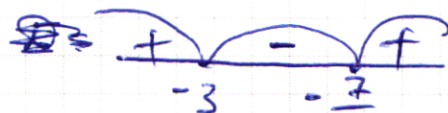
$4x^2 + 16x + 16 \leq x+7$

$4x^2 + 15x + 9 \leq 0$

$D = 15^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 81 = 9^2$

$x_1 = \frac{-15-9}{8} = -3; x_2 = \frac{-15+9}{8} = -\frac{3}{4}$

$(x+3)(x + \frac{3}{4}) \leq 0$



оба, $x \in \emptyset$

2) $\sqrt{x+7}-x > 1.$

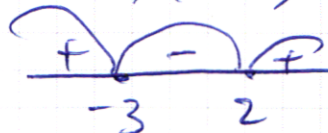
$\sqrt{x+7} > x+1$

$x^2 + x - 6 < 0$

$D = 25$

$x_1 = -3; x_2 = 2.$

$(x+3)(x-2) < 0$



$x \in (-3; 2).$

$$x+4 \geq \sqrt{x+7} - x$$

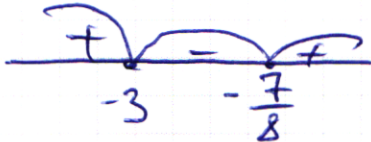
$$2x+4 \geq \sqrt{x+7}$$

$$4x^2+15x+9 \geq 0$$

$$D=81$$

$$x_1=-3 \quad x_2=-\frac{7}{8}$$

$$(x+3)(x-\frac{7}{8}) \geq 0$$



$$x \in (-\infty; -3) \cup (-\frac{7}{8}; +\infty)$$

$$\text{Ответ: } x \in (-\frac{7}{8}; 2)$$

$$\textcircled{2} \quad g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 \quad \text{min-?} \quad \text{max-?}$$

$$g'(x) = (\sin 3x \cdot \sin 7x)' - (\sin^2 x)' + (\cos^2 5x)' + 4' =$$

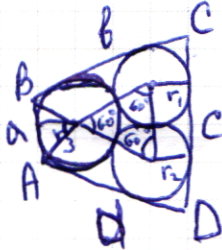
$$= ((\sin 3x)' \cdot \sin 7x + \sin 3x \cdot (\sin 7x)') - ((\sin x)' \cdot \sin x + \sin x \cdot (\sin x)') + ((\cos 5x)' \cdot \cos 5x + \cos 5x \cdot (\cos 5x)') + 0 = (3 \cos 3x \cdot \sin 7x + 7 \sin 3x \cos 7x) - 2 \sin x \cos x - 10 \sin 5x \cos 5x = 3 \sin 10x + 7 \sin 3x \cos 7x - 2 \sin x \cos x - 5 \sin 10x = 4 \sin 3x \cos 7x - 2 \sin 10x - 2 \sin x \cos x$$

$$\boxed{g'(x) = 0}$$

$$4 \sin 3x \cos 7x - 2 \sin 10x - 2 \sin x \cos x = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

④



$$W = W_1 = W_2 = W_3$$

а) $r = ?$, если $AD + BC - AB - CD = 12$
 $W = W_1 = W_2 = W_3$ $d + b - a - c = 12$

отсюда видно, что $c = 4W$,

$$a = 2W, \quad b = d = 4W$$

$$4W + 4W - 2W - 4W = 12$$

$$2W = 12$$

$$W = 6$$

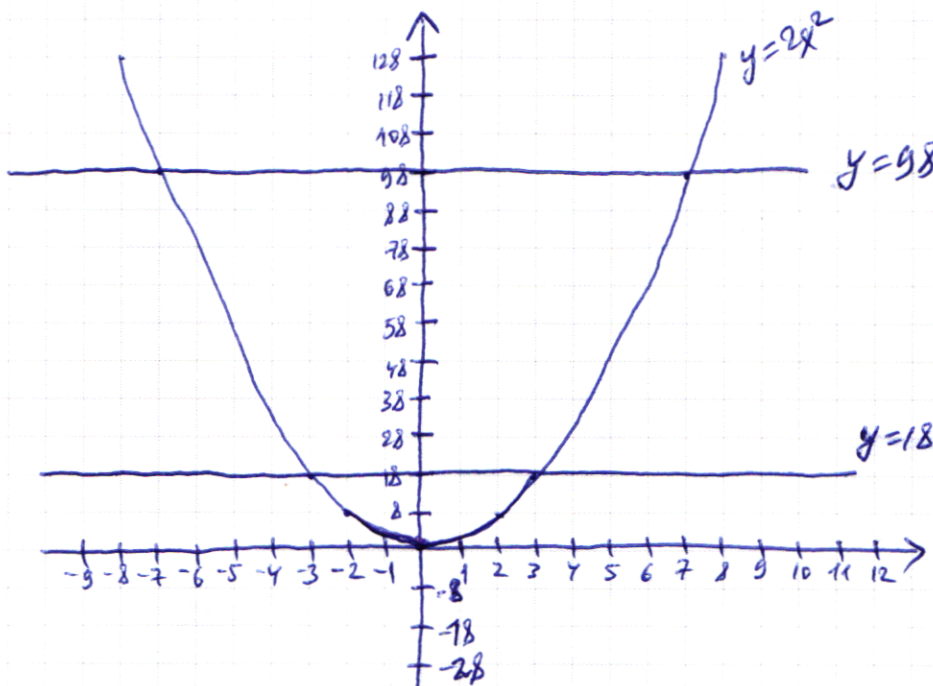
б) $\angle AOB = ?$, где O - центр окружности W_3

$$\angle = 60^\circ$$

$$\angle AOB = 60^\circ$$

Т.к. радиусы окружностей равны и если соединить их центры то получится равносторонний треугольник у которого углы равны 60° и по рисунку видно, что $\angle AOB = 60^\circ$.

① $y = 2x^2$, $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$





черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Решить $\sqrt{x+7} - x(x+4) \geq 1$.

ОДЗ:

$x > -4$

$x \geq -7$

$$\begin{array}{r} \times 16 \\ 9 \\ \hline 144 \end{array}$$

$\sqrt{29} \approx 5,4$

$-15-9 = -24/8 = -3$

$-15+9 = -7$

1) $0 < \sqrt{x+7} - x \geq 1$

$\sqrt{x+7} - x > 0$

$\sqrt{x+7} > x$

$x+7 > x^2$

$x^2 - x - 7 < 0$

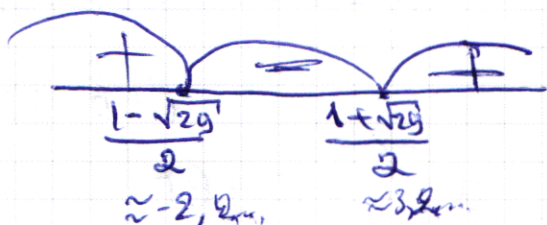
$D = 1 + 4 \cdot 7 = 1 + 28 = 29$

$x_1 = \frac{1 - \sqrt{29}}{2}$

$x_2 = \frac{1 + \sqrt{29}}{2}$

$(x - \frac{1 - \sqrt{29}}{2})(x - \frac{1 + \sqrt{29}}{2}) < 0$

$(x - \frac{1 - \sqrt{29}}{2})(x - \frac{1 + \sqrt{29}}{2}) < 0$



$\sqrt{x+7} - x \geq 1$

$\sqrt{x+7} \geq (x+1)$

$x+7 \geq x^2 + 2x + 1$

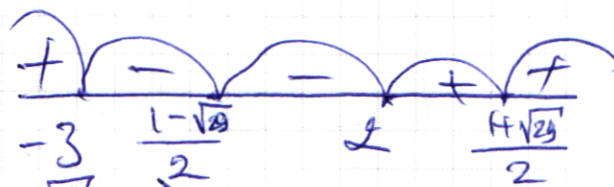
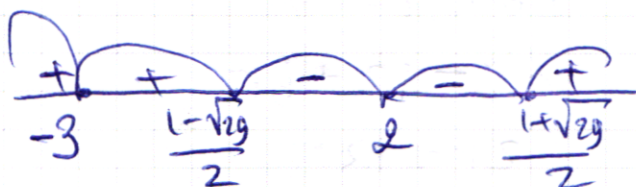
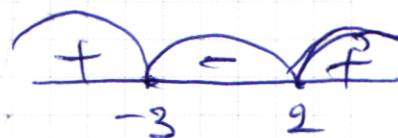
$x^2 + x - 6 \leq 0$

$D = 1 + 24 = 25$

$x_1 = \frac{-1 - 5}{2} = -3$

$x_2 = \frac{-1 + 5}{2} = 2$

$(x - 2)(x + 3) \leq 0$



$x \in (\frac{1 - \sqrt{29}}{2}, 2)$

$$x+4 \leq \sqrt{x+7} - x$$

$$2x+4 \leq \sqrt{x+7}$$

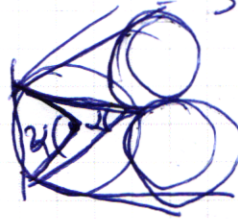
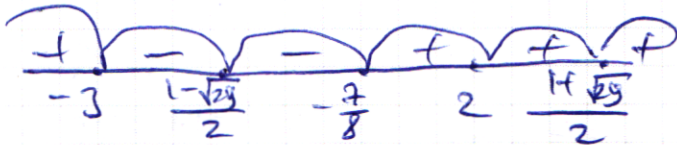
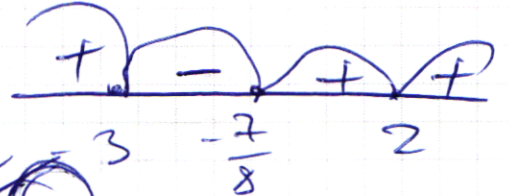
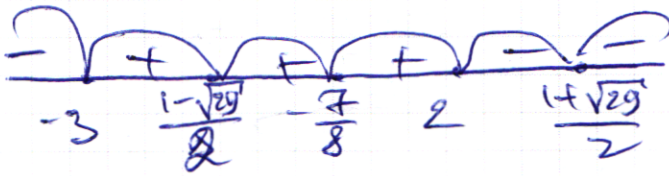
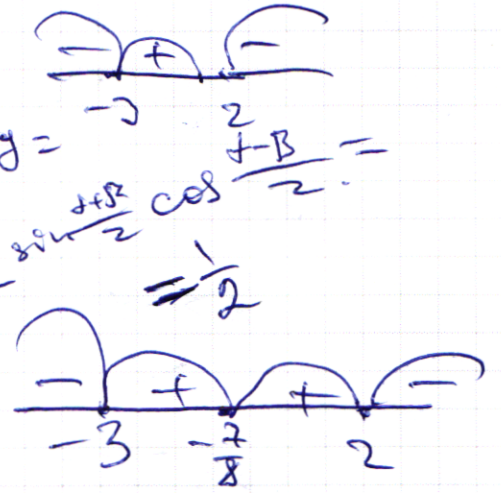
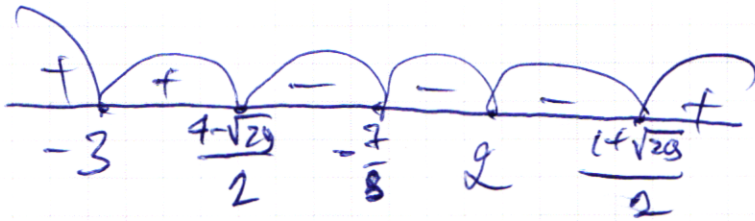
$$4(x^2+4x+4) \leq x+7$$

$$4x^2+16x+16 \leq x+7$$

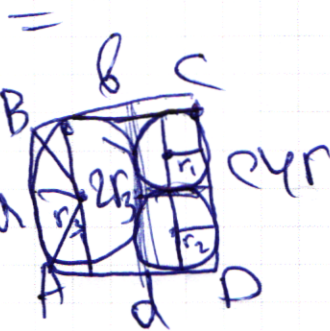
$$4x^2+15x+$$

$$\log_{17} 9 \geq 1, \\ 3, 67.$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2}$$



$$\cos(4x+x) = (\cos 4x \cos x + \sin 4x \sin x)^2 =$$



$$r_1 = r_2 = r_3$$

$$c = 4r$$

$$a = 2r.$$

$$AD + BC - AB - CD = 12$$

$$d + b + a - c = 12$$

$$d + b = 12 + a + c$$

$$d + b = 12 + 2r + 4r = 6r + 12$$

$$AO \cdot BO = 58$$

$$\frac{AO}{BO} = \frac{58}{BO}$$

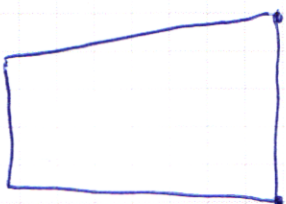
$$d + b = 12 + 6r.$$

$$2b = 12 + 6r.$$

$$8r = 12 + 6r.$$

$$2r = 12$$

$$r = 6.$$



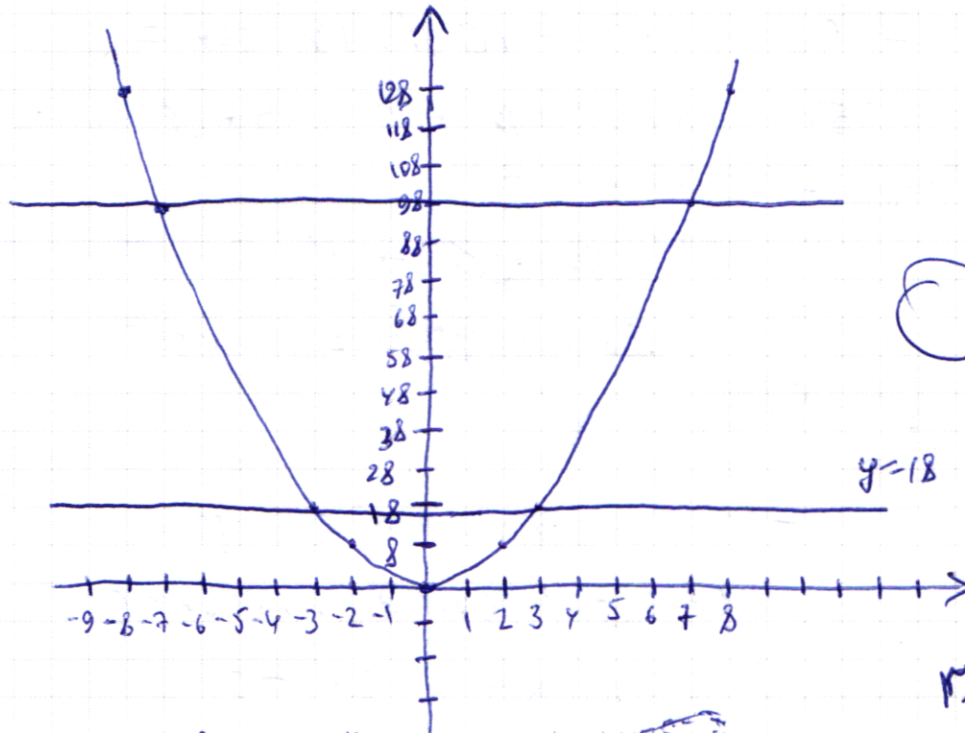
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1

$y = 2x^2, y = 98, y = 18, y = a.$

120°

8 18 28
38 48 58 68
78 88 98.
a



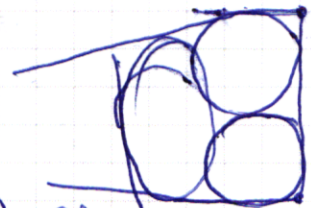
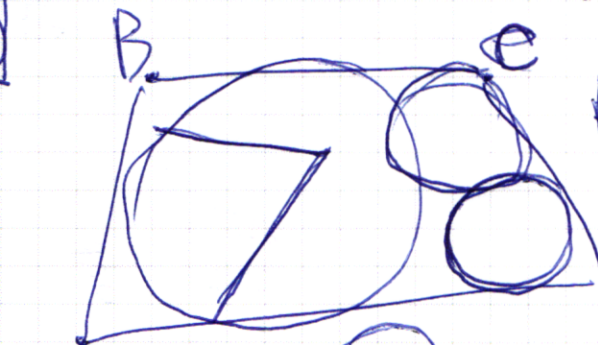
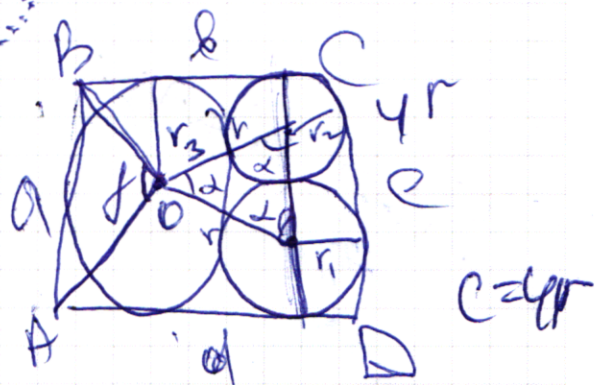
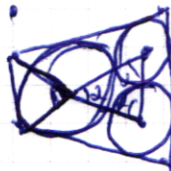
$$\begin{array}{r} 98/2 \\ 8 \overline{) 98} \\ \underline{18} \\ 80 \\ \underline{80} \\ 0 \end{array}$$

$$s^2 = 64$$

$$64 \cdot 2 = 128$$

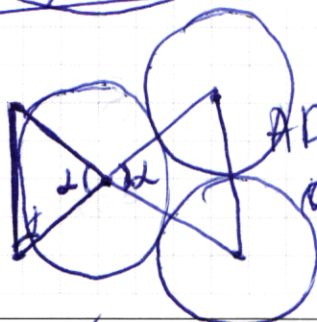


$r_1 = r_2 = r_3$



“0”

A



$AD + BC - AB - CD = 12$
 $a + b - a - c = 12$

$$(\cos x \cdot \cos x)' = \cos x' \cos x + \cos x \cos x' =$$

$$f(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4.$$

$$= -\sin x \cos x - \sin x \cos x = -2 \sin x \cos x.$$

$$f'(x) = (\sin 3x \cdot \sin 7x)' - (\sin^2 x)' + (\cos^2(5x))' + 4' =$$

$$= (\sin 3x)' \cdot \sin 7x + \sin 3x \cdot (\sin 7x)' - ((\sin x)' \cdot \sin x + (\sin x)' \cdot \sin x) + 2(\cos 5x)' \cdot \cos 5x + 0 =$$

$$= \cos 3x \cdot 3 \cdot \sin 7x + 7 \cos 7x \cdot \sin 3x - (\cos x \cdot \sin x + \cos x \cdot \sin x) + 2 \cdot (-\cos 5x \cdot \sin 5x \cdot 5) =$$

$$= 3 \sin 7x \cos 3x + 7 \cos 7x \sin 3x - 2 \sin x \cos x - 10 \sin 5x \cos 5x =$$

$$= 3 \sin 10x - 2 \sin x \cos x - 10 \sin 5x \cos 5x =$$

$$= 6 \sin 5x \cos 5x - 2 \sin x \cos x - 10 \sin 5x \cos 5x =$$

$$= -4 \sin 5x \cos 5x - 2 \sin x \cos x = 0.$$

~~$$-4 \sin 5x \cos 5x = 2 \sin x \cos x.$$~~

~~$$-2 \sin 5x \cos 5x = \sin x \cos x.$$~~

$$f'(x) = 0.$$

$$-4 \sin 5x \cos 5x - 2 \sin x \cos x = 0 \quad | \cdot (-1).$$

$$4 \sin 5x \cos 5x + 2 \sin x \cos x = 0.$$

$$2 \sin 10x + \sin 2x = 0.$$

$$\sin 10x + \sin 10x + \sin 2x = 0.$$

~~1/2~~

$$\log \sqrt{x+7} - x \quad (x+4) \geq 1$$

$$AF + FC = AC.$$

$$AF = \frac{2}{5} FC$$

$$\frac{AF}{FC} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{2}{5} FC + FC = AC$$

$$AC = \frac{7}{5} FC$$

$$\frac{S_{BAK}}{S_{BAC}} = \frac{5}{12}$$

