МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2 ШИФР 15-041

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.

3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x + 5) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.

7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-041

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Посчитаем длину отрезка, высекаемого на прямой $y=169$.

$x^2=169$

$\left[\begin{array}{l} x=13 \\ x=-13 \end{array}\right.$

Поэтому длина такого отрезка 26.

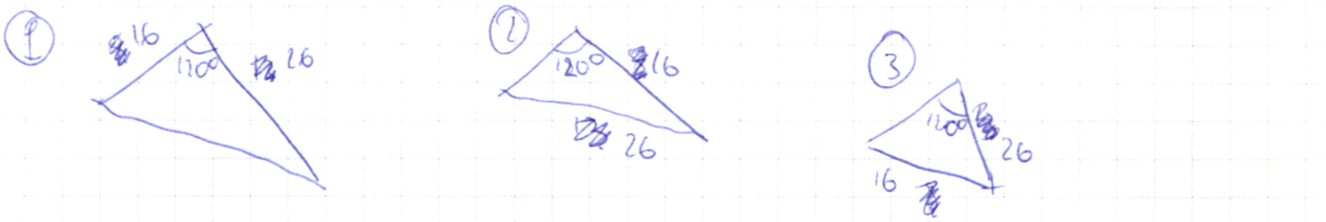
Аналогично посчитаем длину отрезка, высекаемого на прямой $y=64$.

$x^2=64$

$\left[\begin{array}{l} x=-8 \\ x=8 \end{array}\right.$

Поэтому длина отрезка 16.

Есть 3 случая, как могут лежать известные стороны относительно угла 120^0:



Заметим, что случай 3 невозможен, так как против большего угла треугольника лежит большая сторона. Действительно, если против угла 120^0 лежит сторона длины 16, то против стороны длины 26 должен лежать больший угол, что невозможно, т.к. сумма углов треугольника 180^0.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Тогда отдельно рассмотрим 1 и 2 случаи:

1 случай) выпишем теорему косинусов

$$\cancel{x^2 = 8^2+13^2-2\cdot 8\cdot 13\cdot\cos 120^\circ}$$

$$\cancel{x^2 = 64+169-8\cdot 26\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)}$$

$$\cancel{x^2 = 233+4\cdot 26}$$

$$\cancel{x^2 = 233+104}$$

$$\cancel{x^2 = 337}$$

$$x^2 = 16^2+26^2-2\cdot 16\cdot 26\cdot\cos 120^\circ$$

$$x^2 = 256+676+16\cdot 26$$

$$x^2 = 932+416$$

$$x^2 = 1348$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\sqrt{1348}=2\sqrt{337} \\ x=-\sqrt{1348} \text{ — не подх., т.к. } x>0 \end{array}\right.$$

$y=x^2$ – чётная ф-ция => отрезок делится пополам осью ординат.

Тогда точки пересечения $x=\sqrt{337}$, $x=-\sqrt{337}$.

Тогда $y=\left(\sqrt{337}\right)^2$

$y=337$.

2 случай) выпишем теорему косинусов

$\cancel{x^2}$

$$26^2 = x^2+16^2-2\cdot 16\cdot x\cdot\cos 120^\circ$$

$$676 = x^2+256+16x$$

$$x^2+16x-420=0$$

$$D=16^2+4\cdot 420=256+1680=1936=4\cdot 484=16\cdot 121=(44)^2$$

$\cancel{x=-16-2}$

$$\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-16-44}{2} \text{ — не подх., т.к. } x>0 \\ x=\dfrac{16+44}{2}=8+22=30 \end{array}\right.$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-041

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y=x^2$ - чётная ф-ция => отрезок делится пополам осью ординат
Тогда точки пересечения $-15, 15$.

Тогда $y=30^2$

$y=900$

Таким образом, подходят прямые $y=900$ и $y=337$.

Ответ: $\left[\begin{array}{l} a=900 \\ a=337 \end{array}\right.$

№2.

$g(x)=\sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

$g'(x)=(\sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3)' = (\sin 5x \cdot \sin 9x)' - (\sin^2 7x)' - (\cos^2 x)' =$

$= (\sin 5x)' \sin 9x + \sin 5x (\sin 9x)' - 2\sin 7x \cdot (\sin 7x)' - 2\cos x (\cos x)' =$

$= \cos 5x \cdot \sin 9x \cdot (5x)' + \sin 5x \cdot \cos 9x \cdot (9x)' - 2\sin 7x \cdot \cos 7x \cdot (7x)' + 2\cos x \sin x =$

$= 5\cos 5x \sin 9x + 9\sin 5x \cos 9x - 14\sin 7x \cos 7x + 2\cos x \sin x =$

$= 5 \cdot \frac{\sin 14x + \sin 4x}{2} + 9 \cdot \frac{\sin 14x + \sin(-4x)}{2} - 7 \cdot \sin 14x + \sin 2x =$

$= \frac{5}{2}\sin 14x + \frac{5}{2}\sin 4x + \frac{9}{2}\sin 14x + \frac{9}{2}\sin 4x - 7 \cdot \sin 14x + \sin 2x =$

$= 7\sin 14x + 7\sin 4x - 7\sin 14x + \sin 2x = 14\sin 2x \cos 2x + \sin 2x = \sin 2x(14\cos 2x + 1)$

$\sin 2x(14\cos 2x + 1) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ \cos 2x = -\frac{1}{14} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 2x = \pi k_1, k_1 \in \mathbb{Z} \\ 2x = \pm\arccos(-\frac{1}{14}) + 2\pi k_2, k_2 \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi k_1}{2}, k_1 \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pm\arccos(-\frac{1}{14})}{2} + \pi k_2, k_2 \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$\sin 2x(14\cos 2x+1)>0$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin 2x>0\\ \cos 2x>-\frac{1}{14}\end{cases}\\ \begin{cases}\sin 2x<0\\ \cos 2x<-\frac{1}{14}\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x\in(2\pi k_3;\ \pi+2\pi k_3),\ k_3\in\mathbb{Z}\\ 2x\in(-\arccos(-\frac{1}{14})+2\pi k_4;\ \arccos(-\frac{1}{14})+2\pi k_4)\end{cases}\\ \begin{cases}2x\in(-\pi+2\pi k_5;\ 2\pi k_5),\ k_5\in\mathbb{Z}\\ 2x\in(\arccos(-\frac{1}{14})+2\pi k_6;\ 2\pi-\arccos(-\frac{1}{14})+2\pi k_6),\ k_6\in\mathbb{Z}\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}2x\in(2\pi k_7;\ \arccos(-\frac{1}{14})+2\pi k_7),\ k_7\in\mathbb{Z}\\ 2x\in(\pi+2\pi k_8;\ 2\pi-\arccos(-\frac{1}{14})+2\pi k_8),\ k_8\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

$$x\in\left(\pi k_7;\ \frac{\arccos(-\frac{1}{14})}{2}+\pi k_7\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+\pi k_8;\ \pi-\frac{\arccos(-\frac{1}{14})}{2}+\pi k_8\right),\ k_7,k_8\in\mathbb{Z}$$

Тогда максимальные значения ф-ция принимает в $x=\frac{\arccos(-\frac{1}{14})}{2}+\pi k_7$ и $x=\pi-\frac{\arccos(-\frac{1}{14})}{2}+\pi k_8$; а минимальные – в $x=\pi k_7$.

Заметим, что $\sin\pi k=0$, $k\in\mathbb{Z}$; $\cos^2\pi k=1$, $k\in\mathbb{Z}$.

Тогда в πk_7 ф-ция принимает одинаковые значения для любого k_7, равные $0\cdot 0-0^2-1-3=-4$.

Тогда -4 – наименьшее значение функции $y(x)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-041

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

Заметим, что на 1 месте 18-значного числа не может стоять "0". Если там стоит "5", то по условию остальные "5" стоят за ней. Такой случай 1. На каждом из оставшихся 12 мест могут стоять "0" или "9". То есть всего случаев с "5" на 1 месте 2^{12}

Если на 1 месте стоит 9:

Сначала найдём кол-во способов поставить группу из "5". Эта группа может начинаться с позиций 2, 3, ..., 13 то есть таких случаев 12. Также ещё нужно расставить оставшиеся "0" и "9". То есть всего случаев с "5" на 1 месте $12 \cdot 2^{12}$

Тогда всего случаев $2^{12} + 12 \cdot 2^{12} = 13 \cdot 2^{12} =$
$= 13 \cdot 4096 = 53248$

№7.

Заметим, что если разность никаких двух чисел не делится на 35, то у всех чисел разный остаток от деления на 35.

Также заметим, что во втором промежутке все числа больше 35. Поэтому какие бы 5 чисел не взял Пиноккио, он каждый раз возьмёт $35 + x$, $x \in [1; 35]$. Поскольку это даст к сумме хотя бы по 35 от каждого числа, то прибавим к общей сумме $35 \cdot 5$ а из каждого числа этого отрезка вычтем 35. Для третьего отрезка то же самое делаем с 70, а для последнего — со 105. Тогда сумма будет $35 \cdot 5 + 70 \cdot 5 + 105 \cdot 5 + y$, где y — сумма выбранных чисел из новых отрезков. Заметим, что остатки от

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

деления чисел на 35 не поменялись, так как вычитали числа, кратные 35. Поэтому у отрезков [1;35], [1;35], [1;35], [1;35] нужно выбрать по 5 различных чисел, так, что все они будут различные, т.е. выбрать различные числа (20 штук) из отрезка [1;35]. Поскольку мы хотим минимизировать сумму, выберем первые 20 чисел. Их сумма $\frac{1+20}{2}\cdot 20=(1+20)\cdot 10=210$.

Таким образом, минимальная общая сумма

$35\cdot5+70\cdot5+105\cdot5+210=175+350+525+210=385+875=1260.$

Ответ: 1260.

№4.

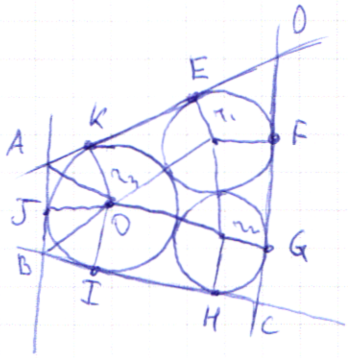
а) Пусть точка касания ω_1 и AD – E,

ω_1 и CD – F; ω_2 и CD – G;

ω_2 и BC – H; ω_3 и BC – I;

ω_3 и AB – J; ω_3 и AD – K

Тогда $AD+BC-AB-CD=10$ (по усл.)



$AD=AK+KE+ED$

$BC=BI+IH+HC$

$AB=AJ+JB$

$CD=DF+FG+GC$

$AK+KE+ED+BI+IH+HC-AJ-JB-DF-FG-GC=10$

$\Downarrow ED=DF$

$AK+KE+BI+IH+HC-AJ-JB-FG-GC=10$

$\Downarrow GC=CH$

$AK+KE+BI+IH-AJ-JB-FG=10$

$\Downarrow IB=BJ$

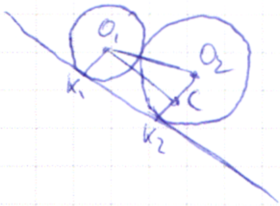
$AK+KE+IH-AJ-FG=10$

$\Downarrow AJ=AK$

$KE+IH-FG=10.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Докажем лемму. Пусть касаются две окружности с радиусами r_1 и r_2. ~~Найдём~~ Докажем, что длина ~~длину~~ отрезка их общей внешней касательной, ограниченного точками касания, равна $2\sqrt{r_1 r_2}$



Без ограничения общности пусть $r_2 > r_1$. Пусть центр окружности с радиусом r_1 O_1, а окружности с радиусом r_2 — O_2. Пусть точки касания соответственно K_1 и K_2. По свойству касательной $O_1K_1 \perp K_1K_2$; $O_2K_2 \perp K_1K_2$. Проведём через O_1 прямую, параллельную K_1K_2. Пусть эта прямая пересечёт O_2K_2 в точке C. $O_1CK_2K_1$ — прямоугольник $\Rightarrow O_1C = K_1K_2$. $O_1O_2 = r_1 + r_2$; $O_2C = r_2 - r_1$. Тогда по теореме Пифагора $O_1C = \sqrt{(r_1+r_2)^2 - (r_2-r_1)^2} = \sqrt{r_2^2 - r_2^2 + r_1^2 - r_1^2 + 2r_1r_2 + 2r_1r_2} = \sqrt{4r_1r_2} = 2\sqrt{r_1r_2}$. Лемма доказана.

Тогда пусть радиус ω_1 равен r_1, радиус ω_2 равен r_2, радиус ω_3 равен r_3.

Тогда $2\sqrt{r_1r_3} + 2\sqrt{r_2r_3} - 2\sqrt{r_1r_2} = 10$

По условию $r_1 = r_2 = r_3 = r \Rightarrow 2\sqrt{r^2} + 2\sqrt{r^2} - 2\sqrt{r^2} = 10$

$2\sqrt{r^2} = 10$

$2r = 10$

$r = 5$.

б) Обозначим $\angle AOB$ за α и сделаем этот пункт.

По теореме Пифагора из ΔAKO $AO = \sqrt{5^2 + AK^2}$

Аналогично из ΔBIO $BO = \sqrt{5^2 + BI^2}$.

Пусть $AK = a$, $BI = b$. Тогда $AB = a + b$.

$AO = \sqrt{25 + a^2}$, $BO = \sqrt{25 + b^2}$.

Применим теорему косинусов в ΔAOB.

$(a+b)^2 = 25 + a^2 + 25 + b^2 - 2\sqrt{(25+a^2)(25+b^2)} \cos\alpha$

$a^2 + 2ab + b^2 = 50 + a^2 + b^2 - 2\sqrt{625 + 25b^2 + 25a^2 + a^2b^2} \cos\alpha$

$2ab = 50 - 2\sqrt{625 + 25a^2 + 25b^2 + 100ab - 100ab + a^2b^2} \cos\alpha$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-041

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5)=1$

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5)=\log_{\sqrt{x+3}-x}(\sqrt{x+3}-x)$

$\begin{cases}\sqrt{x+3}-x>0\\ \sqrt{x+3}-x\neq 1\\ x+5=\sqrt{x+3}-x\end{cases}$

$\begin{cases}\sqrt{x+3}>x\\ \sqrt{x+3}\neq 1+x\\ 2x+5=\sqrt{x+3}.\end{cases}$

$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+3>x^2\\ x+3\geq 0\\ x\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}x+3\geq 0\\ x<0\end{cases}\end{array}\right.\\ 2x+5>0\\ x+3\neq(1+x)^2\\ (2x+5)^2=x+3\end{cases}$ $\rightarrow$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2};\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\\ x\geq -3\\ x\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}x\geq -3\\ x<0\end{cases}\end{array}\right.\\ x>-\frac{5}{2}\\ x\neq -2\\ x\neq 1\\ \left[\begin{array}{l}x=-\frac{14}{4}\\ x=-2\end{array}\right.\end{cases}$ $\rightarrow$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\in\left[0;\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\\ x\in[-3;0)\end{array}\right.\\ x\neq -2\\ x\neq 1\\ x>-\frac{5}{2}\\ x=-1{,}75\\ x=-2\end{cases}$

не подх.

не подх.

~~Ответ:~~

~~$x=-2{,}75$~~

Ответ: нет решений

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq \log_{\sqrt{x+3}-x} \sqrt{x+3}-x$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x+3}-x > 1 \\ x+5 \geq \sqrt{x+3}-x \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x+3}-x > 0 \\ \sqrt{x+3}-x < 1 \\ x+5 \leq \sqrt{x+3}-x \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x+3} > 1+x \\ \sqrt{x+3} \leq 2x+5 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x+3} > x \\ \sqrt{x+3} < 1+x \\ \sqrt{x+3} \geq 2x+5 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq -3 \\ x \geq -1 \\ x+3 > x^2+2x+1 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq -3 \\ x < -1 \\ \cancel{xxx} \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq -1 \\ x \in (-2;1) \end{cases} \\ x \in [-3;-1) \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x \in [-1;1) \\ x \in [-3;-1) \end{array}\right.$$

$x \in [-3;1)$

$4x^2+20x+25 \geq x+3$

$4x^2+19x+22 \geq 0$

$$\left[\begin{array}{l} x \leq -\frac{11}{4} \\ x \geq -2 \end{array}\right.$$

$x \in (-\infty; -\frac{11}{4}] \cup [-2;+\infty)$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -\frac{11}{4}] \cup [-2;+\infty) \\ x \geq -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$x \in [-2;+\infty)$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in [-3;1) \\ x \in \cancel{(-\infty;-\frac{11}{4})} [-2;+\infty) \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x+3} > x \\ \sqrt{x+3} < 1+x \\ \sqrt{x+3} \geq 2x+5 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq -3 \\ x \geq 0 \\ x+3 \geq x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq -3 \\ x < 0 \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0 \\ x \in (-\infty; \frac{1-\sqrt{13}}{2}] \cup [\frac{1+\sqrt{13}}{2};+\infty) \end{cases} \\ x \in [-3;0) \end{array}\right.$$

$x \in [-3;0) \cup [\frac{1+\sqrt{13}}{2};+\infty)$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x \in (-\infty;-2) \cup (1;+\infty) \end{cases}$$

$x \in (1;+\infty)$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq -3 \\ x \geq -\frac{5}{2} \\ x \in [-\frac{11}{4};-2] \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq -3 \\ x < -\frac{5}{2} \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x \in [-\frac{5}{2};-2] \\ x \in [-3;-\frac{5}{2}) \end{array}\right.$$

$x \in [-3;-2]$

$$\left[\begin{array}{l} x \in [-2;1) \\ \begin{cases} x \in [-3;0) \cup [\frac{1+\sqrt{13}}{2};+\infty) \\ x \in (1;+\infty) \\ x \in [-3;-2] \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in [-2;1)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №10
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-041

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

$26 \times 4 = 104$

$16 \times 16 = 256$

$26 \times 26 = 676$

$676 + 256 = 932$

$26 \times 16 = 416$

$932 + 416 = 1348$

$1348 : 4 = 337$

$676 - 256 = 420$

$44 \times 44 = 1936$

$420 \times 4 = 1680$, $1680 + 256 = 1936$

$1936 : 4 = 484$, $484 : 4 = 121$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

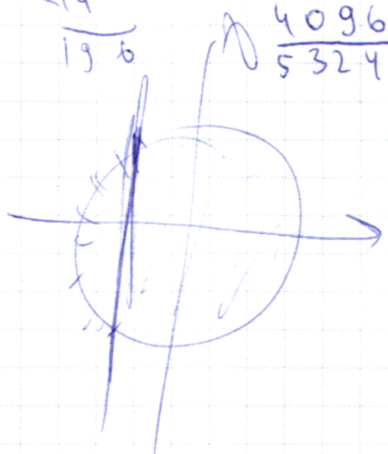
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

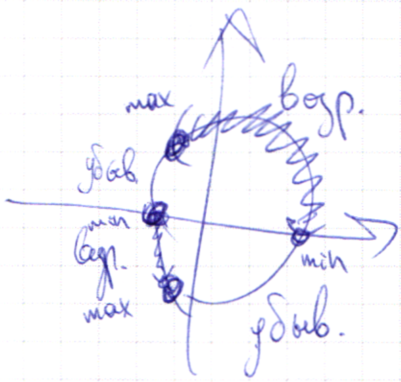
$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$

$14 \times 14 = 196$

$4096 \times 13 = 53248$





1

2^{10} 1024

2^{11} 2048

2^{12} 4096

2^{13} 8192

$\frac{4096}{2}$

2^{13}

13 14 15 16 17 18

☑ черновик ☐ чистовик

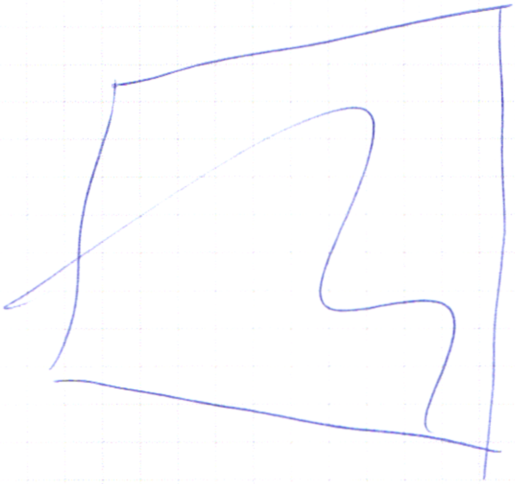
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$35 \times 5 = 175$

$875 + 385 = 1260$



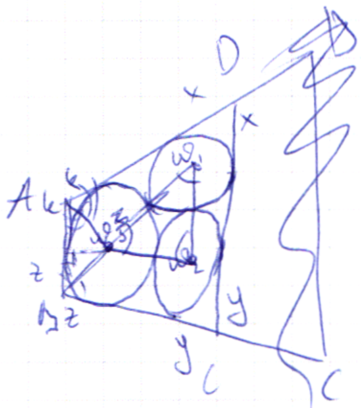
$$2\sqrt{r_1 r_3}+2\sqrt{r_2 r_3}-2\sqrt{r_1 r_2}=10$$

$$\sqrt{r_1 r_3}+\sqrt{r_2 r_3}-\sqrt{r_1 r_2}=5$$

$$\sqrt{r_1}\left(\sqrt{r_3}-\sqrt{r_2}\right)+\sqrt{r_2 r_3}=5$$

$$\sqrt{r_1}=\frac{5-\sqrt{r_2 r_3}}{\sqrt{r_3}-\sqrt{r_2}}$$

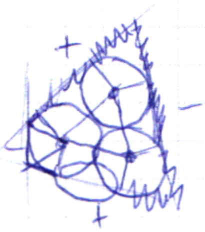
$$r_1\left(\sqrt{r_3}-\sqrt{r_2}\right)^2+2\sqrt{r_1 r_2 r_3}+r_1 r_3=25$$

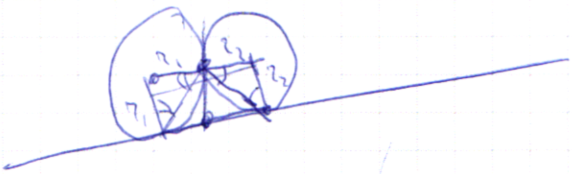


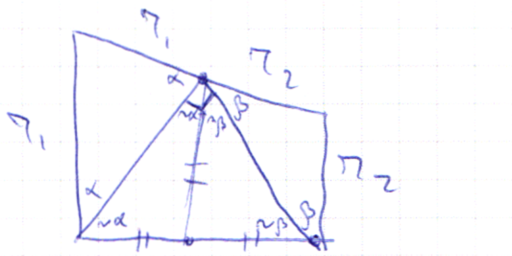
$$\sqrt{(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2}=$$

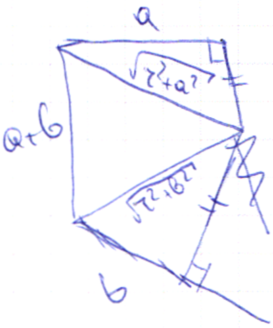
$$=\cancel{r_1^2}+2r_1r_2+\cancel{r_2^2}-(\cancel{r_1^2}-2r_1r_2^2+\cancel{r_2^2})$$

$$2\sqrt{r_1 r_2}$$









$$180-\alpha-\beta=180-(90-\alpha)-(90-\beta)=$$

$$=\alpha+\beta$$

$$\cancel{a^2}+2ab+\cancel{b^2}=2r^2+\cancel{a^2}+\cancel{b^2}-2\cdot\sqrt{(r^2+a^2)(r^2+b^2)}\cdot\cos\alpha$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$$\log_{\sqrt{-\frac{5}{4}+3}+\frac{5}{4}}\left(-\frac{5}{4}+5\right)=\log_{\sqrt{\frac{17}{4}}-\frac{5}{4}}\left(\frac{25}{4}\right)=\log_{\frac{\sqrt{17}}{2}-\frac{5}{4}}\frac{25}{4}$$

$$\sqrt{\frac{7}{4}}+\frac{5}{4}\quad\frac{15}{4}$$

$$\left(2\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)+5\right)^2=-\frac{5}{4}+3$$

$$\left(-\frac{10}{4}+5\right)^2=-\frac{5}{4}+3$$

$$\left(\frac{10}{4}\right)^2=\frac{12-5}{4}$$

$$\log_{\sqrt{-\frac{11}{4}+3}+\frac{11}{4}}\left(-\frac{11}{4}+5\right)=\frac{1}{2}+\frac{11}{4}\quad\frac{9}{4}=$$

$$\left(2\cdot\left(-\frac{11}{4}\right)+5\right)^2=3-\frac{11}{4}$$

$$\left(5-\frac{22}{4}\right)^2=\frac{1}{4}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

$$\log_{f(x)}h(x)\geq\log_{g(x)}h(x)$$

$$\log_{f(x)}h(x)\geq\log_{f(x)}g(x)$$

$$\begin{cases}f(x)>1\\h(x)\geq g(x)\end{cases}$$

$$0<f(x)<1$$

$$g(x)\leq g(x)$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-041

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2ab = 200 - 2\cdot\sqrt{(100+a^2)(100+b^2)}\cdot\cos\alpha$$

$$\cancel{2}ab = 100 - \cancel{2}\cdot\sqrt{(10000+100b^2+100a^2+a^2b^2)}\cdot\cos\alpha$$

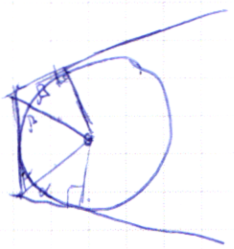
$$(10000+100b^2+100a^2+a^2b^2)\cos^2\alpha = 10000 - 200ab + a^2b^2$$

$180(n-2)$

3

$180\cdot 3 = 540$

3



$x^2 - x - 3 = 0$

$D = 1^2 + 12 = 13$

$$\begin{array}{r} 19 \\ \times\ 19 \\ \hline 171 \\ +\ 19\ \ \\ \hline 361 \end{array}$$

$\cancel{2}\beta + 90 + 90 - \cancel{\beta} + 90 \cancel{x} + 2\alpha + x + 90$

$270 + \beta + \alpha + x = 540$

$\cancel{\beta + \alpha + x^2} =$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times\ 11 \\ \hline 25 \\ +\ 25\ \ \\ \hline 275 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 88 \\ \times\ 4 \\ \hline 352 \end{array}$$

$\sqrt{a^2-5^2}\quad\sqrt{b^2-5^2}$

$x^2 - x - 3 < 0$

$D = 1^2 + 12 = 13$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{1-\sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$$

$\cancel{x} + 3 = 1 + 2x + x^2$

$x^2 + x - 2$

$D = 1^2 + 8 = 9$

$x = \frac{-1-3}{2} = -2$

$x = \frac{-1+3}{2} = 1$

$4x^2 + 20x + 25 = x + 3$

$4x^2 + 19x + 22 = 0$

$D = 19^2 - 4\cdot 4\cdot 22 =$

$= 361 - 4\cdot 88 =$

$= 361 - 352 = 9$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{-19-3}{8} = -\frac{22}{8} = -\frac{11}{4} \\ x = \frac{-19+3}{8} = -\frac{16}{8} = -2 \end{array}\right.$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)