МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1 ШИФР 15-062

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geqslant 1$.

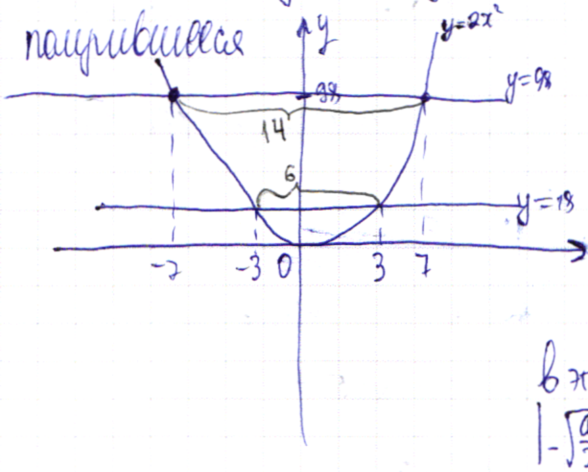
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

①

1) Парабола $y=2x^2$ пересекает $y=98$ ⇒ $2x^2=98$ $x=\pm 7$, аналогично $y=2x^2 \cap y=18$ ⇒ $2x^2=18$; $x=\pm 3$. Изобразим схематично получившееся



2) Отрезки, высекаемые параболой равны $|-7|+|7|=14$ и $|-3|+|3|=6$

3) $y=2x^2 \cap y=a$ в $x=\pm\sqrt{\frac{a}{2}}$ ⇒ в этом случае парабола высечет отрезок равный $\left|-\sqrt{\frac{a}{2}}\right|+\left|\sqrt{\frac{a}{2}}\right|=\sqrt{\frac{a}{2}}\cdot 2=\sqrt{2a}$

4) Угол в треугольнике, образованном данными отрезками, должен по условию равняться 120° ⇒ воспользуемся Th. cos три раза (в Δ три угла)

$$\left[\begin{array}{l} (1)\ (\sqrt{2a})^2=14^2+6^2-2\cdot 14\cdot 6\cdot\cos 120^\circ \\ (2)\ 14^2=(\sqrt{2a})^2+6^2-2\cdot 6\cdot\sqrt{2a}\cdot\cos 120^\circ \\ (3)\ 6^2=(\sqrt{2a})^2+14^2-2\cdot\sqrt{2a}\cdot 14\cdot\cos 120^\circ \end{array}\right.$$

$$\cos 120^\circ=\cos(180^\circ-60^\circ)=\cos(60^\circ-180^\circ)=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l} 2a=196+36-2\cdot 14\cdot 6\left(-\frac{1}{2}\right) \\ 196=2a+36-2\cdot 6\cdot\sqrt{2a}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \\ 36=2a+14^2-2\sqrt{2a}\cdot 14\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \end{array}\right. \Bigg| \div 2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=98+18+7\cdot 6\ (1) \Rightarrow \boxed{a=158} \\ 98=a+18+3\sqrt{2a}\ (2) \\ 18=a+98+7\sqrt{2a}\ (3) \end{array}\right.$$

(2) и (3) - квадратное уравнение отн $\sqrt{a}$:

$$\left[\begin{array}{l} (2):\ a+\sqrt{a}\cdot 3\sqrt{2}-80=0 \Rightarrow D=18+4\cdot 80=18+320=338 \Rightarrow \sqrt{a}=\frac{-3\sqrt{2}\pm 13\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \\ (3):\ a+\sqrt{a}\cdot 7\sqrt{2}+80=0 \Rightarrow D=49\cdot 2-4\cdot 80<0 \Rightarrow \text{нет действ. корней} \end{array}\right.$$

см. оборотную сторону

$$\sqrt{a} = \left[\begin{array}{l} \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \\ -\frac{10\sqrt{2}}{2} \text{ — не уд } (\sqrt{a} > 0) \end{array} \right. \Rightarrow \sqrt{a} = 5\sqrt{2}$$

$$\boxed{a = 50}$$

$\boxed{\text{Ответ: } a = 158 \text{ и } a = 50}$.

(2)

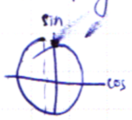
$$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 = \frac{1}{2}(1 - 2\sin^2 2x - \cos 10x) - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 = \cos^2 2x + \cos 2x - 5{,}5$$

Для нахождения наибольшего и наименьшего значения воспользуемся производной функции $g(x)$

$$g'(x) = (\cos 3x \cdot 3 \cdot \sin 7x + 7\cos 7x \cdot \sin 3x) - 2\sin x \cdot \cos x + 2\cos 5x \cdot (-\sin 5x) \cdot 5 =$$
$$= (3\cos 3x \cdot \sin 7x + 7\cos 7x \cdot \sin 3x) - 2\sin x \cdot \cos x - 2\cos 5x \cdot \sin 5x \cdot 5 =$$
$$= 3(\cos 3x \cdot \sin 7x + \cos 7x \cdot \sin 3x) + 4\cos 7x \cdot \sin 3x - \sin 2x - 5\sin 10x =$$
$$= 3\sin 10x + 2\sin 10x - 2\sin 4x - \sin 2x - 5\sin 10x = -2\sin 4x - \sin 2x = -2 \cdot 2\sin 2x \cdot \cos 2x - \sin 2x =$$
$$= -\sin 2x(4\cos 2x + 1)$$

Чтобы найти max и min, необходимо найти критические точки, в которых производная равна нулю $\Rightarrow -\sin 2x(4\cos 2x + 1) = 0$

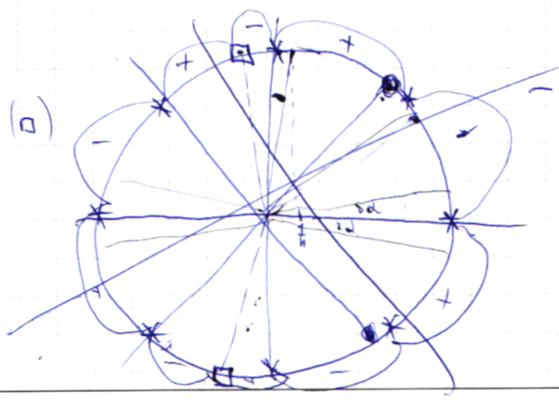
$$\left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ \cos 2x = -\frac{1}{4} \end{array} \right.$$



$$\left[\begin{array}{l} 2x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 2x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi m = \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{4}\right) + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} n \quad (*) \\ x = \pm\frac{\pi - \arccos\frac{1}{4}}{2} + \frac{2\pi m}{2} \quad (\square) \end{array} \right.$$

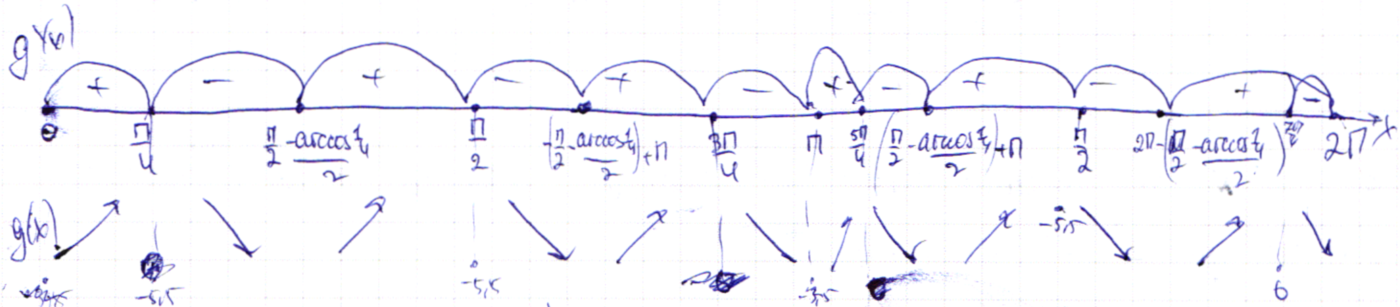
$$x = \pm\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\arccos\frac{1}{4}}{2}\right) + \pi m$$



— на рисунке расставили $\pm$ (знаки производной) в зависимости от X.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

вынесем те x на горизонтальную ось, где $g'(x)=0$



значение $g(x)$ в точках 1) $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$ равны и равны ~~нулю~~ $g(\frac{\pi}{4})=g(\frac{3\pi}{4})=-5,5$

2) $g(\frac{5\pi}{4})=g(\frac{7\pi}{4})=-5,5$

3) $g\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{1}{4}}{2}\right)=g\left(2\pi-\frac{\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{1}{4}}{2}\right)$

4) $g\left(-\frac{\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{1}{4}}{2}+\pi\right)=g\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{1}{4}}{2}+\pi\right)$

$g(0)=\cos^2 0+\cos 0-5,5=-3,5=g(2\pi)$

$g(\frac{\pi}{2})=\cos^2\pi+\cos\pi-5,5=-5,5$

$g(\pi)=1$

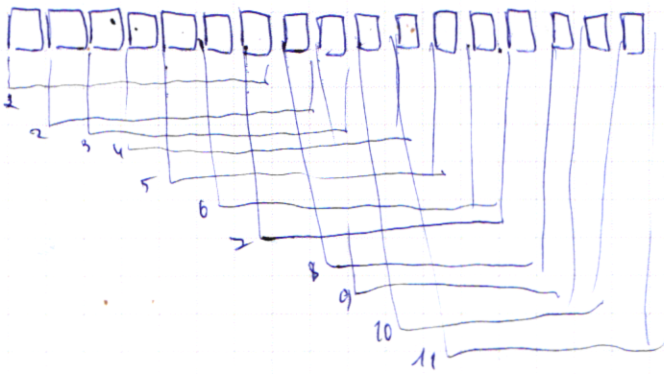
Из-за поведения функции на оси ox можно судить о том, что min ф-ции будет в $x=\pm\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{1}{4}}{2}\right)+\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$, а максимум в т. $x=2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

Ответ: $\min=\cos^2 2x+\cos 2x-5,5$, где $x=\pm\frac{\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{1}{4}}{2}+\pi m$

$\max=-3,5$.

8

восемь должно встречаться подряд ровно 7 раз =>



таких семерок мы можем выбрать 11 раз. Тогда после выбора этого „картежа" из восьмерок нам остается выбрать еще 10 цифр.

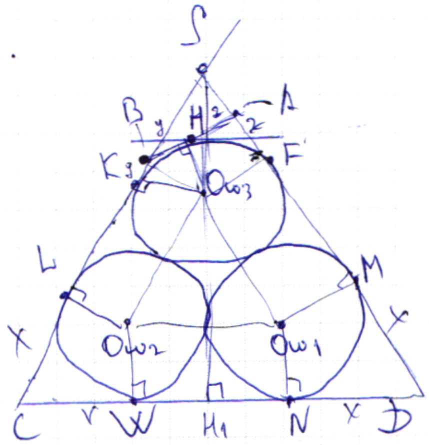
1. Если мы восьмерками заполнили первые 7 позиций, то ~~на~~ выбрать остальные мы можем $2^{10}=1024$ способами.

2. Если это остальные случаи выбора семи подряд идущих восьмерок кол-во способов будет 2^9, т.к. на 1 позицию нельзя ставить „0".

Всего способов $2^{10}+2^9\cdot 10=1024+512\cdot 10=1024+5120=6144$

$\boxed{\text{Ответ: 6144.}}$

4



Три ~~шара~~ окружности попарно касаются => каждая ~~шар~~ окружность ~~имеет~~ касается своих соседей, причем все окружности равны => $O_{\omega_3}O_{\omega_2}O_{\omega_1}$ – правильный Δ со сторонами 2R

и ~~остальное ...~~

O_{ω_3} лежит на ⊥ к CD. (т.к. $O_{\omega_2}O_{\omega_1} \parallel CD$, $O_{\omega_3}H_1 \perp O_{\omega_2}O_{\omega_1}$ т.к. мед в р/с Δ)

Касательную к двум окр можно построить единственным образом => сис-ма симметрична отн SH_1 => $\underbrace{CL=CW}_{\text{по св-ву кас}}=\underbrace{ND=DM}_{\text{по св-ву кас}}=x$; $KB=BH=y$ и $HF=AF=z$.
см стр. 5

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-062

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

④ продолжение

$WN = MF = KL = 2R$

$AD + BC - AB - CD = 12$

$z + 2R + x + x + 2R + y - (y+z) - (x + 2R + x) = 12$

$\cancel{z} + 2R + \cancel{2x} + \cancel{2R} + \cancel{y} - \cancel{y} - \cancel{z} - \cancel{2x} - 2R = 12$

$2R = 12 \Rightarrow \boxed{R = 6.}$

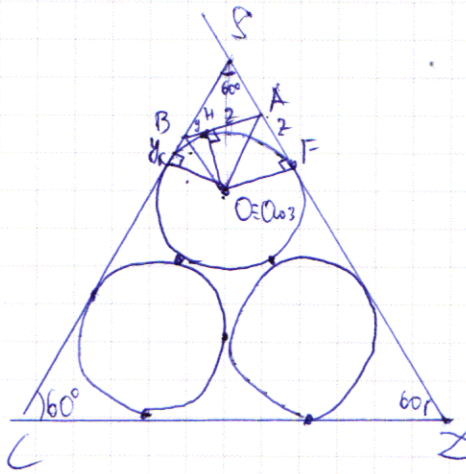
б) $KB = BH = y$ по св-ву кас-х

$KA = AF = z$

$\triangle KBO$ - п/у ($R \perp$ кас-ая) $\Rightarrow OB^2 = y^2 + R^2$

аналогично OA^2 (в $\triangle OAF$) $= R^2 + z^2$

$AB = y + z$



$\triangle OAB$ по Th. cos:

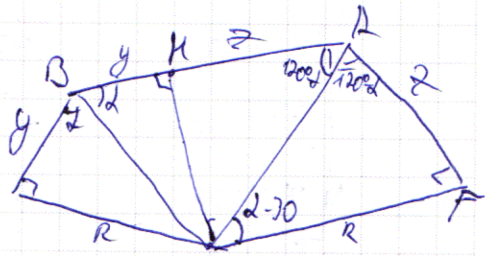
$AB^2 = OB^2 + OA^2 - 2 \cdot OB \cdot OA \cos AOB$ (1)

$y^2 + z^2 + 2yz = y^2 + R^2 + R^2 + z^2 - 2 \cdot \sqrt{y^2+R^2}\sqrt{z^2+R^2} \cdot \cos AOB$

$yz = R^2 - \sqrt{y^2+R^2}\sqrt{z^2+R^2} \cos AOB$

$\triangle BOA = \frac{1}{2} AB \cdot OH = \frac{1}{2} OB \cdot OA \cdot \sin AOB$; $AB \cdot R = OB \cdot OA \cdot \sin AOB$ (2)

в) $AB \cdot R = \underbrace{OB \cdot OA}_{58} \cdot \sin AOB$; $AB = \frac{58 \cdot \sin AOB}{6}$



$\triangle CSD$ - р/с $\Rightarrow \angle B + \angle A = 360° - 60° - 60° = 240°$.

Пусть $\angle KBO = \angle OBH = \alpha$, тогда $\angle HAO = \angle FAO = \frac{240 - 2\alpha}{2} = 120 - \alpha$, $\angle AOF = \angle AOH = \alpha - 30°$, т.к. $KOHB$ и $HOFA$ - дельтоид $\Rightarrow$ OA и BO бис $\angle B$ и O и $\angle O$ и $\angle A$ соответственно;

$\triangle KBO$: $tg\alpha = \frac{R}{y} \Rightarrow y = \frac{R\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\triangle OAF$: $tg(\alpha - 30°) = \frac{z}{R} \Rightarrow z = \left(\frac{\sin(\alpha-30°)}{\cos(\alpha-30°)}\right) R$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

Из (1) и (2) имеем систему

$$\begin{cases} AB^2 = OB^2 + OA^2 - 2OB\cdot OA\cdot \cos AOB \\ AB\cdot R = OB\cdot OA\cdot \sin AOB \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = R\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad (3) \\ z = R\dfrac{\sin(\alpha-30^\circ)}{\cos(\alpha-30^\circ)} \quad (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} yz = R^2 - \sqrt{y^2+R^2}\sqrt{z^2+R^2}\cos AOB \quad (1) \\ (z+y)\cdot R = \sqrt{y^2+R^2}\cdot\sqrt{z^2+R^2}\sin AOB \quad (2) \end{cases}$$

Подставим (3) и (4) во (2) и сократим на $R \neq 0$

$$\frac{\cos\alpha\cdot\cos(\alpha-30^\circ)+\sin\alpha\cdot\sin(\alpha-30^\circ)}{\sin\alpha\cdot\cos(\alpha-30^\circ)} = \frac{\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sqrt{\cos^2(\alpha-30^\circ)+\sin^2(\alpha-30^\circ)}}{\cos(\alpha-30^\circ)}\cdot\sin AOB$$

$$\cos(\alpha-30^\circ-\alpha) = \sin AOB \Rightarrow \boxed{\angle AOB = 30^\circ}$$

в) $AB = \frac{58}{6}\cdot\sin 30^\circ = \frac{58}{6}\cdot\frac{1}{2} = \frac{58}{6\cdot 2} = \frac{29}{6} = 4\frac{5}{6}$

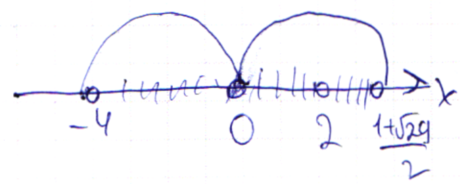
Ответ: а) $R=6$
б) $\angle AOB = 30^\circ$
в) $AB = 4\frac{5}{6}$.

(5)

$$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$$

ОДЗ: $\begin{cases} x+7\geq 0 \\ \sqrt{x+7}-x>0 \\ \sqrt{x+7}-x\neq 1 \\ x+4>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -7 \\ \sqrt{x+7}>x \\ \sqrt{x+7}\neq x+1 \\ x>-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-4 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<0 \\ x+7\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x\geq 0 \\ x+7>x^2 \end{cases} \end{array}\right. \\ x\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-4 \\ \begin{cases} x<0 \\ x>-4 \end{cases} \\ x\neq 2 \end{cases}$

$\frac{1-\sqrt{29}}{2}$ 0 $\frac{1+\sqrt{29}}{2}$ x



см стр №7

☐ черновик ☑ чистовик Страница №6
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

⑤ продолжение

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \ge \log_{\sqrt{x+7}-x}(\sqrt{x+7}-x)$. Метод рационализации:

$(\sqrt{x+7}-x-1)(x+4-(\sqrt{x+7}-x)) \ge 0$

$\underbrace{(\sqrt{x+7}-x-1)}_{(1)}\cdot\underbrace{(2x+4-\sqrt{x+7})}_{(2)} \ge 0$

Найдем нули (1) и (2)

(1): $\sqrt{x+7}-x-1=0$

$\sqrt{x+7}=x+1 \Rightarrow$

$\begin{cases} x+1\ge 0 \\ \cancel{x+7\ge 0} \\ x+7=x^2+2x+1 \end{cases}$

$x^2+x-6=0$

$x=-3$ - не уд

$x=2$ - уд

(2) $\cancel{2x+4-\sqrt{x+2}=0}$

$\cancel{\sqrt{x+2}=(2x+4)}$

$\cancel{x\ge -2}$

$\cancel{x+2=4x^2+16-16x}$

$\cancel{4x^2-17x+14=0}$

$\cancel{D=289-1614 = 289-224=65}$

$\cancel{x=\frac{17\pm\sqrt{65}}{8}}$

$2x+4=\sqrt{x+7}$

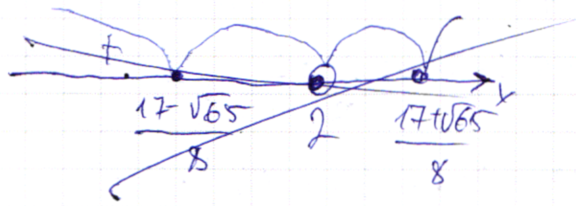
$x\ge -2$

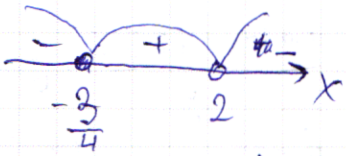
$4x^2+16+16x=x+7$

$4x^2+15x+9=0$

$D=225-16\cdot 9=225-144=81=9^2$

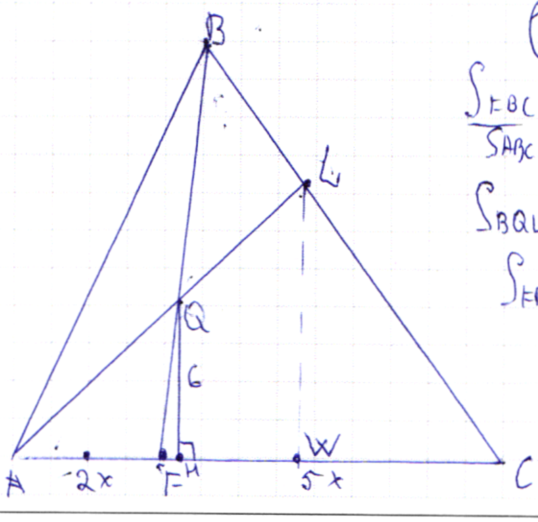
$x=\frac{-15\pm 9}{8}=\left[\begin{array}{l}-3 \text{ - не уд} \\ -\frac{3}{4} \text{ - уд}\end{array}\right.$





$\left[-\frac{3}{4}; 2\right)$

$\boxed{\text{Ответ: } \left[-\frac{3}{4}; 2\right)}$.



⑥

$\frac{S_{FBC}}{S_{ABC}}=\frac{5}{7}$ (высота общая) $\Rightarrow S_{FBC}=\frac{5}{7}S_{ABC}$

$S_{BQL}=\frac{5}{12}S_{ABC}$ по условию. $S_{ALC}=\frac{CL}{CB}S_{ABC}$.

$S_{FBC}=S_{BQL}+S_{FQLC}$, $\frac{5}{7}S_{ABC}=\frac{5}{12}S_{ABC}+S_{FQLC} \Rightarrow$

$S_{FQLC}=\frac{25}{84}S_{ABC}$; $S_{AQF}=S_{ALC}-S_{FQLC}=$

$\frac{S_{AQF}}{S_{ALC}}=\frac{\frac{1}{2}AQ\cdot AF}{\frac{1}{2}AL\cdot AC}=\frac{\frac{1}{2}AF\cdot QH}{\frac{1}{2}AC\cdot LW}=\frac{2}{7}\cdot\frac{6}{LW}$; $LW=16$

$\boxed{\text{Ответ: } 16}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-062

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7

разность двух выбранных чисел не делится на 5 ⇒ нет чисел с равными остатками при делении на 45 $\left(\begin{matrix} a \equiv_{45} x \\ b \equiv_{45} x \end{matrix} \Rightarrow (a-b) \equiv_{45} 0\right)$

(45 = 5·9 ⇒ сумма цифр ~~9~~ и число не оканч-ся на 5 и 0.)

то есть у чисел должны быть разные остатки.

Наши промежутки выглядят так $[1;45]$, $[45+1;45\cdot2]$, $[45\cdot2+1;45\cdot3]$, $[45\cdot3+1;45\cdot4]$.

Начинаем брать у самого последнего промежутка, тк Σ д.б. наименьшей, мы уменьшаем максимум.

$$(45\cdot3+1+45\cdot3+2+\ldots+45\cdot3+6)+(45\cdot2+7+45\cdot2+8+\ldots+45\cdot2+12)+(45\cdot1+13+\ldots+45\cdot1+18)+$$
$$+19+\ldots+25) = \frac{45\cdot3+1+45\cdot3+6}{2}\cdot6+\frac{45\cdot2+7+45\cdot2+12}{2}\cdot6+\frac{45+13+45+18}{2}\cdot6+$$
$$+\frac{19+25}{2}\cdot6 = \left(\frac{90\cdot6+7}{\cancel{2}}+45\cdot4+19+(45\cdot2+31)+44\right)\cdot3 =$$
$$=(540+7+180+19+90+31+44)3=(810+101)3=911\cdot3=2733$$

Ответ: 2733

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

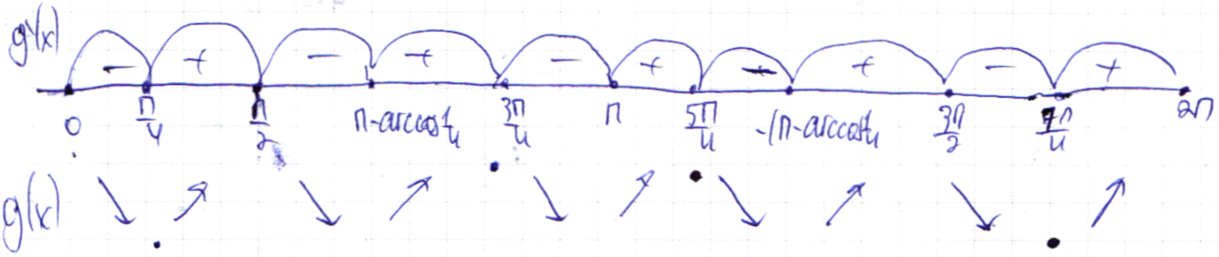
15-062

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Вынесем эти точки на горизонтальную ось для удобства



Значение функции в точках 1) $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$ равны и равно нулю $g(\frac{\pi}{4}) = g(\frac{3\pi}{4}) = 0$

2) $\frac{5\pi}{4}$ и $\frac{7\pi}{4}$ аналогично равно нулю

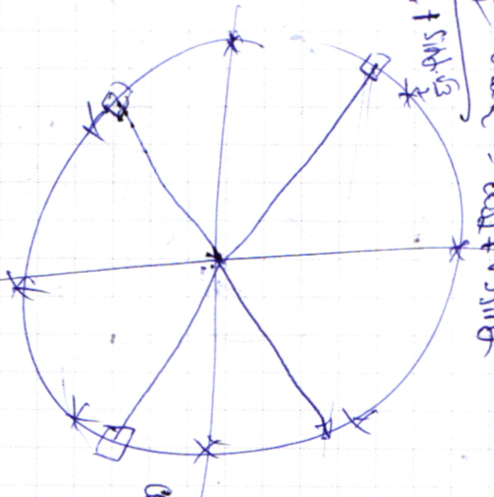
3) $\pi - \arccos\frac{1}{4}$ и $-(\pi - \arccos\frac{1}{4})$

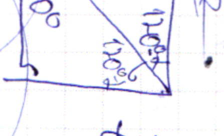
$g(0) = \cos^2 0 + \cos 0 - 5{,}5 = -3{,}5$

$g(\frac{\pi}{2}) = \cos^2\pi + \cos\pi - 5{,}5 = -5{,}5$

$AB^2 = OB^2 + OA^2 - 2OB \cdot OA \cdot \cos AOB$

$AB \cdot R = OB \cdot OA \cdot \sin AOB$





$(y+z)R = \sqrt{y^2+R^2}\sqrt{z^2+R^2} \cdot \sin AOB$

$yz = R^2 - (y+z)R \cdot \operatorname{ctg} AOB$

$360 - 120^\circ = 240^\circ$

$\frac{240 - 2\alpha}{2} = 120 - \alpha$

$\frac{360^\circ}{2} = 180^\circ - 60^\circ$

$90 - 120 + \alpha = \alpha - 30^\circ$

$y = \frac{R\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$z = \frac{R\sin(\alpha-30^\circ)}{\cos(\alpha-30^\circ)}$

$\operatorname{tg}(\alpha - 30^\circ) = \frac{z}{R}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{R}{y}$

$\frac{\sqrt{3}\sin\alpha - \cos\alpha}{\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha} = \frac{z}{R}$

$\frac{\sin\alpha\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos\alpha\frac{1}{2}}{\cos\alpha\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin\alpha\frac{1}{2}}$

$y^2 + z^2 + 2yz = R^2 + y^2 + R^2 + z^2 - 2R$

$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}(\alpha - 30^\circ) =$

$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}(\alpha - 30^\circ) = 1 - \frac{\cos AOB}{\sin\alpha \cdot \cos(\alpha-30^\circ)}$

$1 - \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha \cdot \cos(\alpha - 30^\circ)} \cdot \cos AOB$

$\frac{\cos(\alpha-30^\circ)\cos\alpha + \sin\alpha\sin(\alpha-30^\circ)}{\sin\alpha\cos(\alpha-30^\circ)} = \frac{\sin AOB}{\sin\alpha\cos(\alpha-30^\circ)}$

$\frac{\cos(\alpha - 30^\circ)}{R} \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \sin AOB$

$R^2 + z^2 = l_1^2$

$R^2 + y^2 = l_2^2$

$AB = y + z$

$(x-2)(x-3)$

$x^4 + 7x^3 + 2x^2 + x + 1$

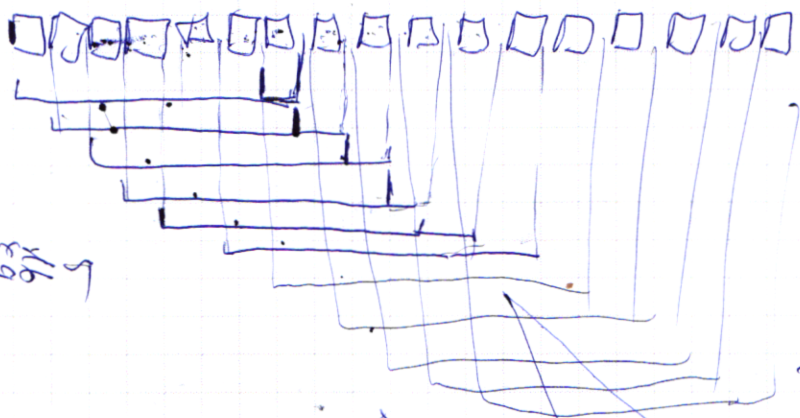
$0 = 9 - x + x^2$

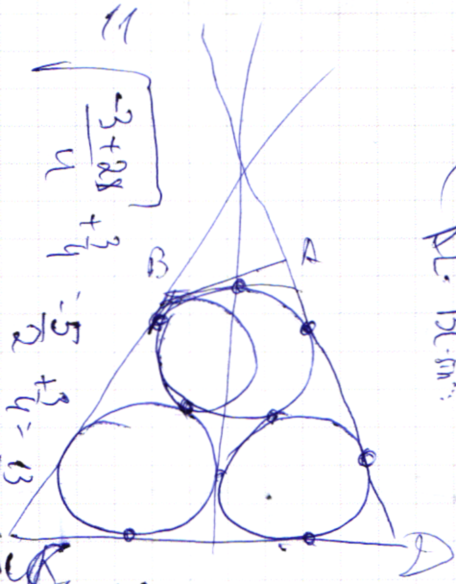
$x^2 - x - 7 < 0$

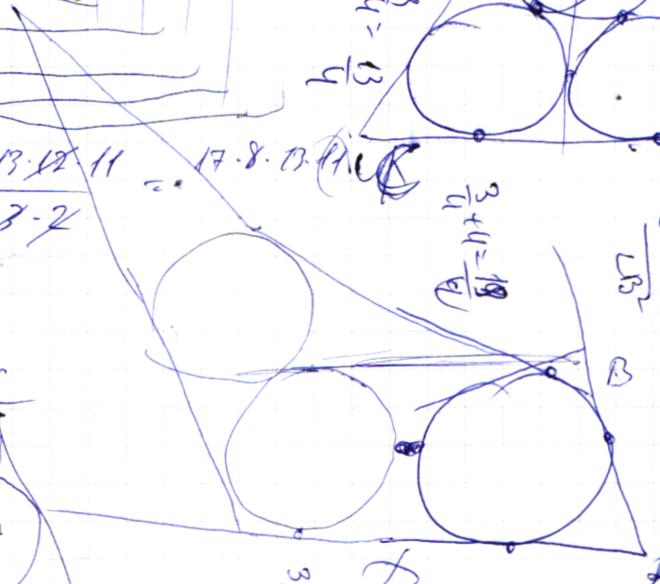
$x < 0$, $x > -2$, $x - 4$

№2

$\frac{17!}{6!\,11!} = \frac{17\cdot16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}$

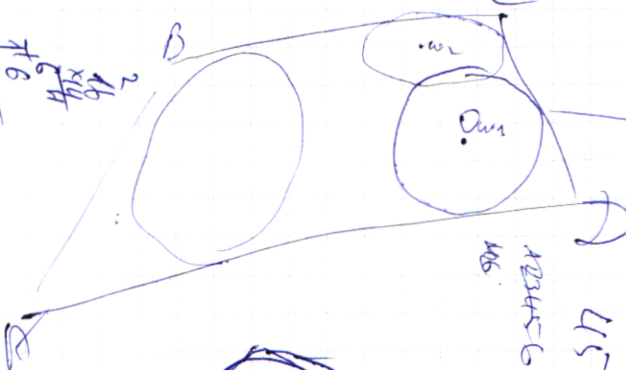


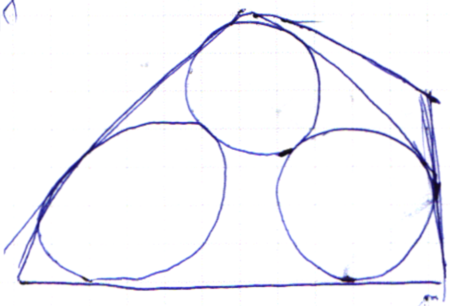


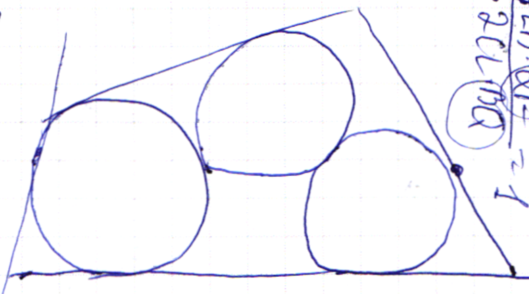


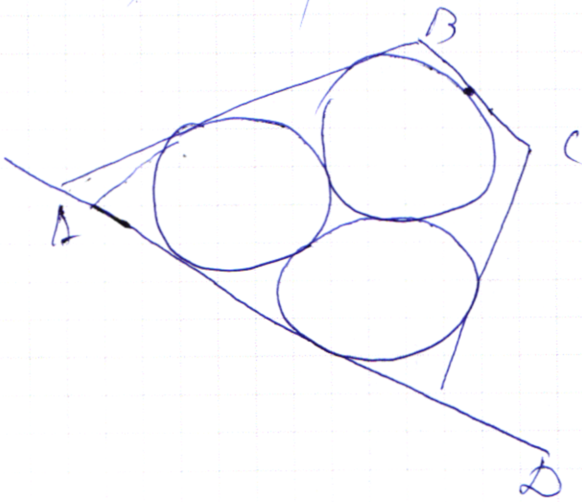
$\frac{17}{7!\cdot10!} = \frac{17\cdot16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11}{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2} = 17\cdot8\cdot13\cdot11$

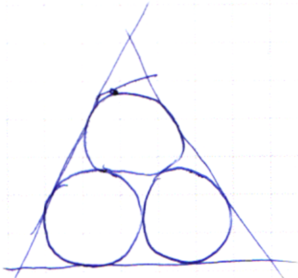
5120
+1024
6144

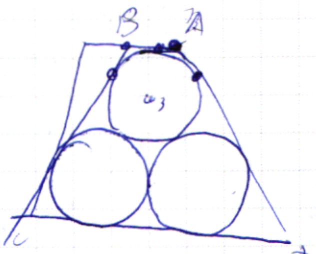












☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-062

ШИФР

(заполняется секретарём)

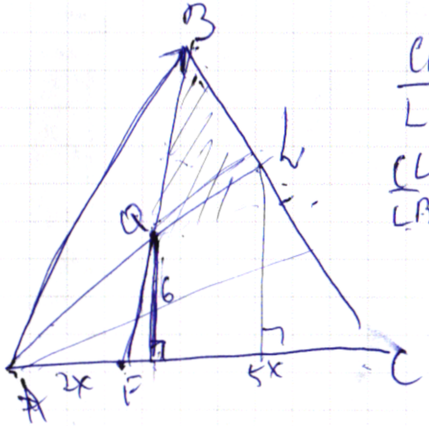
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 5

(Нумеровать только чистовики)



S_{QB} $\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{5}{12} \Rightarrow S_{BQL} = \frac{5}{12} S_{BAC}$

$S_{FQLC} = S_{FBC} - S_{BQL} = \left(\frac{5}{7} - \frac{5}{12}\right) S_{ABC} = \frac{5 \cdot 5}{7 \cdot 12} S_{ABC} = \frac{25}{84} S_{ABC}$

$\frac{CL}{LB} \cdot \frac{BQ}{QF} \cdot \frac{2}{7} = 1$

$\frac{CL}{LB} \cdot \frac{BQ}{QF} = \frac{7}{2}$

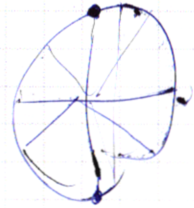
$\frac{S_{BQL}}{S_{FBC}} = \frac{5}{12 \cdot 5} \cdot 7 = \frac{7}{12} = \frac{BQ \cdot BL}{(BQ+QF)(BL+LC)}$

$\frac{LC}{LB} \cdot \frac{QB}{QF} = \frac{7}{5}$, $5 LC \cdot QB = 7 LB QF$

~~$CL \cdot BQ$~~

BQ

$S_{ALC} = S_{AQF} + S_{FQLC} \Rightarrow 3{,}5Hx = 6x + \frac{25}{84} S_{ABC}$



$\frac{BQ \cdot BL}{BQ \cdot BL + LC \cdot QB + BL \cdot QF + LC \cdot QF} = \frac{7}{12}$

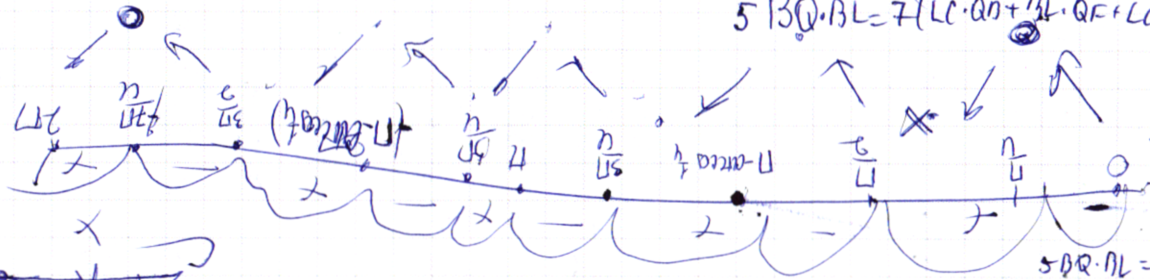
$12 BQ \cdot BL = 7(BQ \cdot BL + LC \cdot QB + BL \cdot QF + LC \cdot QF)$

$5 BQ \cdot BL = 7(LC \cdot QB + BL \cdot QF + LC \cdot QF)$

$S_{AQF} = \frac{1}{2} 2x \cdot 6 = 6x$

$S_{ALC} = \frac{1}{2} H \cdot 7x = 3{,}5Hx$

$5 BQ \cdot BL = 7 LC \cdot QB + 5 LC \cdot QB + LC \cdot QF$

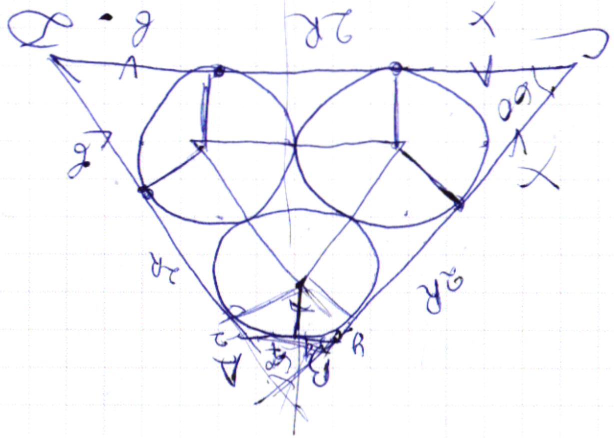


$5 BQ \cdot BL = 12 LC \cdot QB + LC \cdot QF$

$\frac{S_{BAF}}{S_{BFC}} = \frac{2}{5}$

$S_{BAF} = \frac{2}{7} S_{BAC}$

$S_{BFC} = \frac{5}{7} S_{ABC}$



$\frac{S_{BQL}}{S_{FBC}} = \frac{\frac{1}{2} BQ \cdot AF}{\frac{1}{2} AL \cdot AC}$

$S_{ALC} = \frac{CL}{CB} S_{ABC}$

$\frac{1}{2} - \sin^2 2x - \frac{1}{2}\cos 10x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 = -\sin^2 2x - \cos^2 2x - \frac{1}{2}\cos^2 3x + \frac{1}{2} + \cos^2 5x + 4 =$

$-\sin^2 2x - \cos^2 5x + 1 + \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 =$

$-\sin^2 2x + \sin^2 x \cos^2 x + \sin^2 x + 4 = \sin^2 x(1 - 4\cos^2 x) + 4$

$\sin^2 x = 1$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\cos^2 x - 1 = -\sin^2 x$

$\cos^2 2x - 1 + \cos 2x + 4{,}5 = 0$

$\cos^2 2x + \cos 2x - 5{,}5 = 0$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-062

ШИФР

(заполняется секретарём)

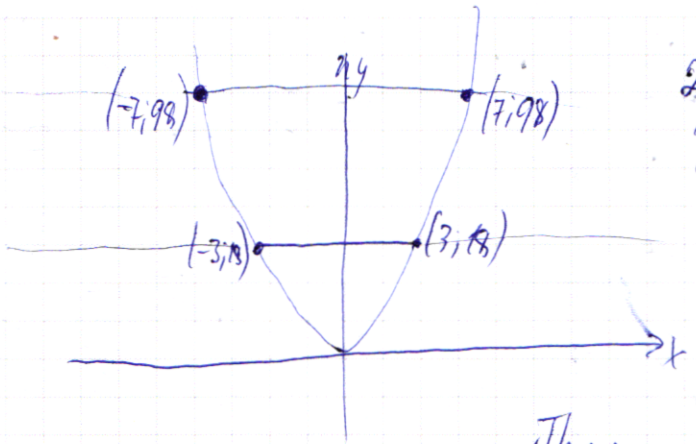
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y=2x^2$

$y=98$

$y=18$

$y=a$



$2x^2=98$
$x^2=49$
$x=\pm 7$

$2x^2=18$
$x^2=9$
$x=\pm 3$

$l_1=14$

$l_2=6$

$l_3=2\sqrt{\frac{a}{2}}=\cancel{\ \ }\sqrt{2a}$

$2x^2=a$
$x^2=\frac{a}{2}$
$x=\pm\sqrt{\frac{a}{2}}$

Th.cos:

$$\left[\begin{aligned}&1)\ 2a=14^2+6^2-2\cdot 14\cdot 6\cdot \cos 120^\circ\\&2)\ 14^2=2a+6^2-2\sqrt{2a}\cdot 6\cos 120^\circ\\&3)\ 36=2a+14^2-2\sqrt{2a}\cdot 14\cdot \cos 120^\circ\end{aligned}\right.$$

$\cos 120^\circ=$
$\cos(\cancel{180-60}\ 90^\circ+30^\circ)=$
$=-\sin 30=-\frac{1}{2}$

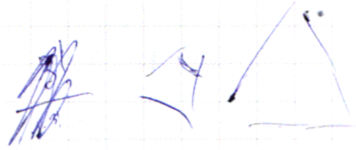
$14^2=196$

$$\left[\begin{aligned}&2a=196+36+2\cdot 14\cdot 6\cdot \tfrac{1}{2}\\&196=2a+36+2\cdot\sqrt{2a}\cdot 6\cdot\tfrac{1}{2}\\&36=2a+196+2\sqrt{2a}\cdot 14\cdot \tfrac{1}{2}\end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned}&a=98+18+7\cdot 6\\&98=a+18+\sqrt{2a}\cdot 3\\&18=a+98+7\sqrt{2a}\end{aligned}\right.$$

$a=98+18+42=158$

$a+\sqrt{a}\cdot 3\sqrt{2}\ \cancel{+}\ 80=0$



$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$
$+$
$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$

$\frac{338}{2}=169-$

$\arccos(-45^\circ)=\pi-45^\circ=135^\circ=$

$x=\alpha+\beta$
$y=\alpha-\beta$

$\cos 2\alpha+\cos 2\beta=2\cos\alpha+\beta\cdot\cos\alpha-\beta$

$\cos 2\alpha-\cos 2\beta=-2\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)$

$\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}(\cos 2\beta-\cos 2\alpha)$

$3\sin 7x\cdot\cos 3x+3\cos 7x\cdot\sin 3x+4\cos 7x\cdot\sin 3x=$

$=3(\sin 10x)+4\cdot\cos 7x\cdot\sin 3x$

$-\sin\frac{2\pi}{3}$
$-\sin 60^\circ(-4\cdot\frac{1}{2}+1)$

$\cos 60\cdot\sin 30=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}\cdot(\sin 90-\sin 30)=\frac{1}{4}$

$-\frac{\sqrt{3}}{2}(4\cdot\frac{1}{2}+1)=$

$\sin 3x\cdot\sin 7x=\sin(5x-2x)\cdot\sin(5x+2x)=\frac{1}{2}(\cos 4x-\cos 10x)$

$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$

$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$

$\sin 2\alpha=\sin(\alpha+\beta)(\cos(\alpha-\beta))+\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$ $=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 3$

$\sin 2\beta=\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$

$\sin 2\alpha-\sin 2\beta=2\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$

$\cos(5x+2x)\sin(5x-2x)=\frac{1}{2}(\sin 10x-\sin 4x)$

$\sin 2\alpha+\sin 2\beta=2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$

$\arccos(-120^\circ)=\pi-180^\circ$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1

(Нумеровать только чистовики)