МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1 ШИФР 15-049

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x + 4) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq \log_{\sqrt{x+7}-x}(\sqrt{x+7}-x)$

$(\sqrt{x+7}-x-1)(x+4-(\sqrt{x+7}-x)) \geq 0$

ОДЗ:

1) $x+4>0$
$x>-4$.

2) $\sqrt{x+7}-x>0$.

$x+7>0 \quad x\leq 0$
$x>-7 \quad x\in(-7;0]$

3) $\begin{cases} x>0 \\ x+7>x^2 \\ x>-7 \end{cases}$

$x^2-x-7<0$

$D=29$

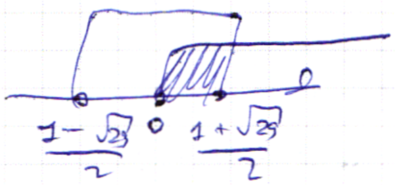
$x_1=\frac{1+\sqrt{29}}{2}$

$x_2=\frac{1-\sqrt{29}}{2}$.

$x>0$.

$\sqrt{f(x)}>g(x)$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)\geq 0 \\ g(x)\leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x)>0 \\ f(x)>g(x)^2 \\ f(x)\geq 0. \end{cases} \end{array}\right.$



$x\in(-7;0]\cup\left(0;\frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

$\begin{cases} x\in\left(-7;\frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) \\ x>-4 \\ \sqrt{x+7}+x\neq 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in\left(-4;\frac{1+\sqrt{29}}{2}\right). \\ \sqrt{x+7}+x\neq 1 \end{cases};$

Вернёмся к неравенству.

1) $\begin{cases} (\sqrt{x+7}-x-1)\geq 0 \\ x+4-(\sqrt{x+7}-x)\geq 0 \end{cases}$

1) $\sqrt{x+7} - x - 1 \geq 0.$

$\sqrt{x+7} \geq x+1.$

1) $x \leq -1.$

2) $x+1>0$

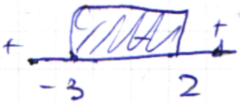
$x>-1$

$x+7 \geq (x+1)^2$

$x^2+x-6 \leq 0$

$x_1 = 2$

$x_2 = -3$



$\begin{cases} x \in [-3; 2] \\ x > -1 \end{cases} \Rightarrow x \in (-1; 2] \cup x \in (-4; -1] \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in [-4; 2]$

$\sqrt{f(x)} \geq g(x)$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geq g(x)^2 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$

2) $x+4 - \sqrt{x+7} + x \geq 0$

$2x+4 \geq \sqrt{x+7}$

$f(x) \geq \sqrt{g(x)}$

$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x)^2 \geq g(x) \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$

1) $x \geq -7$

2) $4x^2+16x+16 \geq x+7$

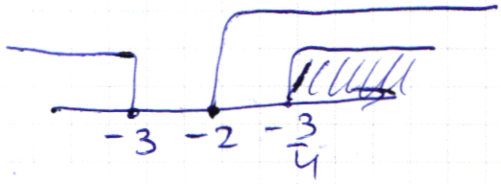
3) $2x+4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2.$

$4x^2+15x+9 \geq 0$

$D = 81.$

$x_1 = -\frac{3}{4}.$

$x_2 = -3.$



$x \geq -\frac{3}{4}$

$\begin{cases} x \in \left(-4; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) \\ \sqrt{x+7} + x \neq 1 \\ x \in (-4; 2] \\ x \geq -\frac{3}{4} \end{cases}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x \in \left(-4; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) \\ \sqrt{x+7} + x \neq 1 \\ x \in (-4; 2] \\ x \geq -\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[-\frac{3}{4}; 2\right] \\ \sqrt{x+7} + x \neq 1. \end{cases}$$

$\sqrt{x+7} + x \neq 1.$

$x+7 \neq (1-x)^2$

$x+7 \neq 1 - 2x + x^2$

$3x + 6 - x^2 \neq 0.$

$x^2 - 3x - 6 \neq 0$

$x_1 = \frac{3+\sqrt{33}}{2}$ – не удовл., т.к. > 2

$x_2 = \frac{3-\sqrt{33}}{2}$ – не удовл., т.к. $< -\frac{3}{4}.$

Ответ:

$\boxed{x \in \left[-\frac{3}{4}; 2\right]}$

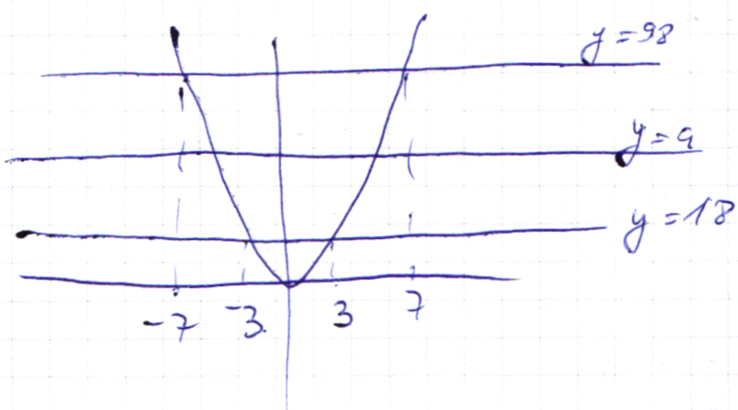
№ 1

$y = 2x^2$

$y = 98$

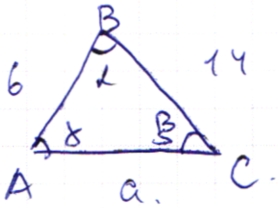
$y = 18$

$y = a.$



$2x^2=18$ $\quad$ $2x^2=98$

$x=\pm3$ $\quad$ $x=\pm7.$



Рассмотрим 3 случая:

1) $\alpha=120^\circ$

2) $\beta=120^\circ$

3) $\gamma=120^\circ$

$AB=6$

$BC=14.$

Теорема косинусов:

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$ (обозначим через a расстояние, которое не имеет отношения к ответу)

1) $\alpha=120^\circ$ $\quad$ $\cos(120^\circ)=-\frac{1}{2}$

$a^2=6^2+14^2-2\cdot6\cdot14\cdot-\frac{1}{2}=$

$=36+196+6\cdot14=232+84=316.$ $\quad$ $a=\sqrt{316}$

2) $\gamma=120^\circ$

$BC^2=AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos\gamma$ $\quad$ $\cos(120^\circ)=-\frac{1}{2}$

$\cancel{BC^2}=196=36+a^2-2\cdot6\cdot a\cdot-\frac{1}{2}$

$160=a^2+6a.$

$a^2+6a-160=0.$

$\frac{D}{4}=9-1\cdot-160=169=13^2$

$a_1=\frac{-3+13}{1}=10$

$a_2=-16<0.$

3) $\beta=120^\circ$

$AB^2=BC^2+AC^2-2\cdot BC\cdot AC\cdot\cos(120^\circ)$

$36=196+a^2-2\cdot14\cdot a\cdot-\frac{1}{2}$

$160+a^2+14a=0.$

$a^2+14a+160=0.$

$\frac{D}{4}=49-1\cdot160<0$

решений нет

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $2x^2 = a$
$x = \pm 5 \Rightarrow a = 50$

2) $2x^2 = a$.
$x = \pm\sqrt{316} \Rightarrow a = 632$.

Ответ: $a_1 = 50$; $a_2 = 632$

№3.

- Рассмотрим 7 „8" как единый блок, тогда у нас C_{11}^1 позиций, куда их можно поставить.
- Осталось расставить остальные 10 цифр.

1) Всего способов расстановки $3^9 \cdot 2$ („0" не может стоять первым)

2) Вычтем кол-во способов, когда у нас хотя бы 1 „7" (и остальные „8"). Их будет $(2^{10} - 1)$.

3) Вычтем кол-во способов, когда у нас хотя бы 1 „0" (и остальные „8"). Их будет $(2^9 - 1)$, („0" не может стоять на первой позиции, она определена однозначно)

4) Вычтем вариант, когда все 10 цифр – это „8".

5) Получим: $3^9 \cdot 2 - (2^{10} - 1) - (2^9 - 1) - 1 =$
$= 3^9 \cdot 2 - 2^{10} - 2^9 - 1$

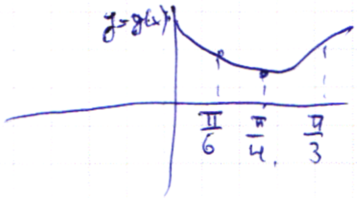
Ответ: $3^9 \cdot 2 - 2^{10} - 2^9 - 1$.

№2.

$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x + 3 = \sin 3x \cdot \sin 7x + \cos^2 x + \cos^2 5x + 3$.

- Получим функцию: $g(x) = (\cos^2 x + \sin 3x \cdot \sin 7x + \cos^2 5x) + 3$

- Мы знаем, что sin и cos – периодичные функции.
- Для того, чтобы найти максимум функции, нужно понимать, что область ~~определения~~ значений лежит в промежутке $[-1; 1]$ => при перемножении двух дробей меньше единицы абсолютное значение будет сильно уменьшаться. Из этого следует, что самым оптимальным значением максимума для функции будет единица. Тогда понятно, что при $x = \pi$ мы достигаем максимума, т.к. оба $\cos = 1$, а $\sin = 0$ => $Max = 5$
- Чтобы найти минимум, нам нужно рассмотреть, как убывает и возрастает функция. Это становится понятно, подставляя $x = \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}$, при которых функция принимает одинаковые значения. Если рассмотреть дальнейшее уменьшение значений, то экстремум будет в $x = \frac{\pi}{4}$.



Получается, что $Min = 3,5$

Ответ: $Max = 5$; $Min = 3,5$

$$\underbrace{10\sin^2 5x}_{\geq 0} + \cos 3x \cos 7x + \underbrace{2\sin^7 x}_{\geq 0} = 0$$

$x = \frac{\pi}{2}$

$x = \pi$

$\cos 3x \cos 7x = 0$

$\cos 3x = 0$

$3x = \frac{\pi}{2} + \pi n$

$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n, n \in Z$

$\cos 7x = 0$

$7x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

$x = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi}{7}n, n \in Z$

$\sin x = 0$

$x = \pi n, n \in Z$

$5x = \pi n, n \in Z$

$x = \frac{\pi n}{5}, n \in Z$

$\cos \pi = -1$

$-1 + (\sqrt{3})^2$

$\cos \frac{\pi}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\cos \frac{5\pi}{4} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\sin \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \quad = 1 \quad = -\frac{1}{2}$

$\sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

$\left(\cos \frac{\pi}{6}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$ $\quad -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$

$\cos \frac{5\pi}{6} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$

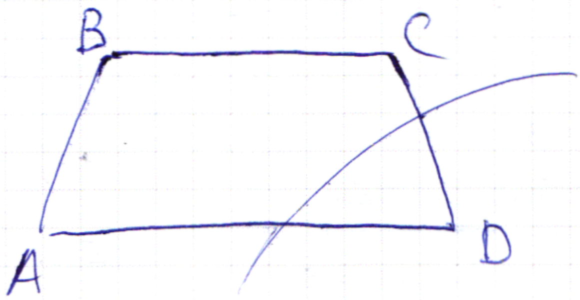
$\sin 3x = \frac{\pi}{6}$

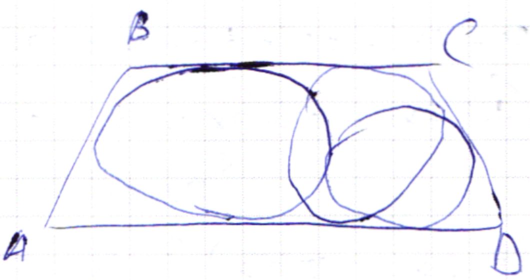
$x = \frac{\pi}{2}$

$\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ sin

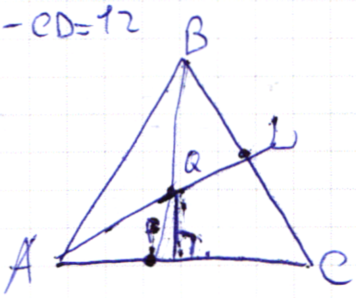
$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad > \quad -\frac{1}{2}$





$AD + BC - AB - CD = 12$



$BQL : BAC = \frac{5}{12}$

$\rho(L; AC)$

$\rho(Q; AC) = 6$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-049
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2.

$f(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4.$

min max?

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\cos^2 5x - \sin^2 x + \sin 3x \sin 7x$

$\cos\alpha + \cos\beta =$

$\sin\alpha + \sin\beta =$

$= 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

$2 \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2}.$

$\frac{\alpha+\beta}{2} = 3$ $\quad \alpha - \beta = 6$

$\frac{\alpha+\beta}{2} = 7$ $\quad 2\alpha = 20$

$\alpha = 10$

$\alpha+\beta = 14.$ $\quad \beta = 4.$

~~$\sin\alpha + \sin\beta =$~~

~~$\sin\alpha\ \cos\beta$~~

~~$\sin(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+\beta) =$~~

$\frac{3\pi}{2} + 2\pi =$

$\frac{3\pi}{2} + \frac{4\pi}{2}$

$\sin\alpha\sin\beta = \cos\alpha\cos\beta - \cos(\alpha+\beta)$

$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot -\frac{\sqrt{2}}{2} =$

$= -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}.$

$\cos 3x \cos 7x - \cos(10x) - \sin^2 x + \cos^2(5x) + 4.$

$\cos^2 5x - \sin^2 x + \sin 3x \sin 7x + 4.$

$\sin 3x \sin 7x = 2\cos 5x \cos x$

$1 = \sin^2 x + \cos^2 x$

$\cos 5x + \cos x = 0$

$\cos^2 5x + \cos^2 x + \sin 3x \sin 7x + 3$

$(\cos^2 5x + \sin 3x \sin 7x + \cos^2 x) + 3$

~~Полный квадрат (доугелин, что пол~~)

7.45

$x = \frac{\pi}{2}.$

$f(x) = (\cos 5x + \cos x)^2 + 3$ + можно найти min. = 3

$\sin\frac{3\pi}{2} \sin\frac{7\pi}{2} = 2\cos\frac{5\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}.$

$\sin\frac{\pi}{2} \sin\frac{\pi}{2} = 2\cos\frac{5\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}.$

$x = \frac{\pi}{2}$ — это 0 => min = 3.

$10\sin^2 5x + \cos 3x \cos 7x + 2\sin^2 x = 0$

$\cos\pi = -1$

$\cos 5\pi = -1$

Max = 5

$3x = \frac{3\pi}{2}$

$x = \frac{\pi}{2}$

$x = \frac{\pi}{8}\ -\frac{\pi}{2}\ \frac{3\pi}{2}$

$3x = \frac{3\pi}{4}$ $\quad \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$

$x = \frac{\pi}{4}$ $\quad \frac{7\pi}{4} =$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

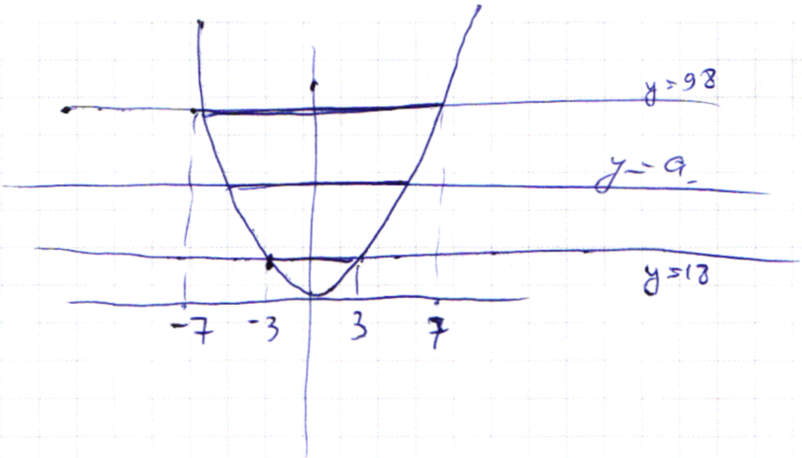
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

1) $y = 2x^2$

$y = 98$

$y = 18$

$y = a$.



$\cancel{232-84} =$

$= \cancel{202}-54 =$

$= 200-52 =$

$= \cancel{148}$

$2x^2 = 18$ $\quad$ $2x^2 = 98$

$x^2 = 9$ $\quad$ $x^2 = 49$

$x = \pm 3$ $\quad$ $x = \pm 7$

$2x^2 = a \Rightarrow a = 50$

$x = \pm 5$

$AB = 6$.

$BC = 14$

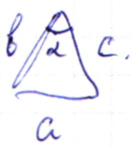
$2x^2 = a \Rightarrow a = 632$

$x = \pm 316$.

AC?, чтобы получся Δ с углом 120°

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ $\quad$ $\alpha = 120° = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{6} + \frac{2\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$



$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$a^2 = 6^2 + 14^2 - 2 \cdot 6 \cdot 14 \cdot -\frac{1}{2}$ $\quad$ $\cos(120°) = -\frac{1}{2}$. - минус не забудь

$a^2 = 36 + 196 - 12 \cdot 14 \cdot -\frac{1}{2} = 36 + 196 + 6 \cdot 14$.

$200 + 32 = 232$

$= 232 + 6 \cdot 14 = 232 + 84 =$

$= 280 + 36 = 316$.

$6 \cdot 14 = 60 + 24 = 84$.

$a = \sqrt{316}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$\cos\gamma = \frac{36 + 100 - 196}{2 \cdot 6 \cdot 10} = \frac{136 - 196}{120} = \frac{-60}{120} = -\frac{1}{2}$

$\cancel{2bc}\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{36 + 196 - 100}{2 \cdot 6 \cdot 14} = \frac{36 + 96}{}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-049

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{x \geq \frac{3}{4}}$

$$\begin{cases} x \in \left(-4; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) \\ \sqrt{x+7} + x \neq 1 \\ \begin{cases} x \in (-4; 2] \\ x \geq -\frac{3}{4} \end{cases} \end{cases}$$

$\sqrt{x+7} + x \neq 1$

$\Leftrightarrow$ $x \in \left(-4; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

$x \in \left[-\frac{3}{4}; 2\right]$ + решения

$\Leftrightarrow$ $x \in \left[-\frac{3}{4}; 2\right]$

$\sqrt{x+7} + x \neq 1$

$\sqrt{x+7} + x = 1$

$\sqrt{x+7} = 1 - x$

$x + 7 = 1 - 2x + x^2$

$x + 7 - 1 + 2x - x^2 = 0$

$3x + 6 - x^2 = 0$

$x^2 - 3x - 6 = 0$

$D = 9 - 4 \cdot 1 \cdot -6 = 9 + 24 = 33$

$x_1 = \frac{3+\sqrt{33}}{2}$ — не удовл.

$x_2 = \frac{3-\sqrt{33}}{2} \approx -1,5$ — не удовл.

$\frac{3-\sqrt{33}}{2}$ $\quad -\frac{3}{4}$

$3 - \sqrt{33}$ $\quad -\frac{3}{2}$

$6 - 2\sqrt{33}$ $\quad -3$

$6 - 10$ $\quad -3$

$-4 < -3$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

1) $\sqrt{x+7}+x \neq 1$

ОДЗ:

$x \in [-7;0] \cup \left(0; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) \Rightarrow x \in \left(-7; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$ $\Rightarrow$ 2) $x \in \left(-4; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

$x > -4$.

ОДЗ.

$\left(\sqrt{x+7}-x-1\right)\left(x+4-\left(\sqrt{x+7}-x\right)\right) \geq 0$

1) $\sqrt{x+7}-x-1 \geq 0$

$\sqrt{x+7} \geq x+1$

$x \geq -7$.

1) $x+1 \leq 0$

$x \leq -1$.

$x \in (-\infty; -1]$

$x \in (-4; -1]$

2) $x+1 > 0$

$x+7 \geq (x+1)^2$

$x+7 \geq x^2+2x+1$

$x^2+2x+1-x-7 \leq 0$

$x^2+x-6 \leq 0$

$D = 1-4\cdot1\cdot-6 = 25$

$x_1 = \frac{-1+5}{2} = 2$

$x_2 = \frac{-1-5}{2} = -3$.

+ − + ; −3, 2

$\boxed{x \in (-4; 2]}$

$\sqrt{f(x)} \geq g(x)$

$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} g(x) \leq 0 \\ \begin{cases} f(x) \geq g(x)^2 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$

$f(x) \geq \sqrt{g(x)}$

$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x)^2 \geq g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$

2) $x+4-\sqrt{x+7}+x \geq 0$

$2x+4-\sqrt{x+7} \geq 0$

$2x+4 \geq \sqrt{x+7}$

1) $x \geq -7$

2) $4x^2+16x+16 \geq x+7$

3) $2x+4 \geq 0$

$2x \geq -4$

$x \geq -2$

$4x^2+15x+9 \geq 0$

$D = 225-4\cdot4\cdot9 =$

$= 225-16\cdot9 = 225-144 =$

$= 125-44 = 100-19 = 81 = 9^2$

$x_1 = \frac{-15+9}{8} = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4}$

$x_2 = \frac{-15-9}{8} = \frac{24}{8} = -3$

$x \geq -\frac{3}{4}$

−3, −2, $-\frac{3}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-049

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $f(x) = \underbrace{\sin 3x \cdot \sin 7x}_{2ab} - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$,

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$2\cos 5x \sin x = \sin 3x - \sin 7x$?

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) - \cos\alpha\sin\beta$

5) $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq \log_{(\sqrt{x+7}-x)}(\sqrt{x+7}-x)$

$(\sqrt{x+7}-x-1)(x+4-(\sqrt{x+7}-x)) \geq 0$

1) $\sqrt{x+7}-x-1=0$

$\sqrt{x+7} = x+1$.

ОДЗ:

1) $x+7 \geq 0$

$x \geq -7$

2) $x \leq 0$

$x \in (-\infty; 0]$. $\Rightarrow x \in [-7; 0]$

3) $\begin{cases} x > 0 \\ x+7 > x^2 \\ x \geq -7 \end{cases}$

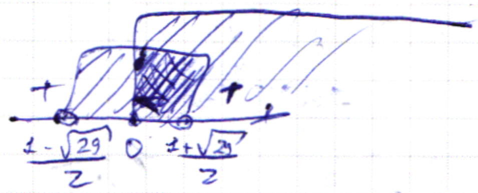
$x > 0$

$x^2 - x - 7 < 0$

$D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-7) = 29$.

$x_1 = \frac{1+\sqrt{29}}{2}$

$x_2 = \frac{1-\sqrt{29}}{2}$



ОДЗ:

1) $x+4>0$

$x > -4$.

2) $\sqrt{x+7} - x > 0$

~~$x \geq -7$~~

$\sqrt{x+7} > x$

$\sqrt{f(x)} > g(x)$

$\Updownarrow$

~~$f(x) \geq 0$~~

~~$f(x) > g(x)^2$~~

1) $f(x) \geq 0$.

2) $g(x) \leq 0 \rightarrow f(x)$ - любое

3) $\begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) > g(x)^2 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-049

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$7\,7\,7^{8\,8}$

$8\,0\,0\,0 \quad \dots\ 7 \dots$

C_{10}^{2}

3^{8}

3^{10} – max

$C_{10}^{2} = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10\cdot 9}{2} = 5\cdot 9 = 45 = 3^2\cdot 5$

- Выбрал 3^8 → остальные определяются однозначно, ~~45~~ 9

$45\cdot 2 - 9 = 81 = 9^2$

коли 0 и 7 – ✗

$3^8 + 81$ – 81 вариант зафиксировать „7" и „0"

$3^8 + \underbrace{9\cdot 9}_{\text{выбрали 0 и 7}}$

- Для каждого варианта остальные цифры определяем как хотим.

12:20

Ответ: $11\cdot(3^8 + 81)$

3^{10} – всего.

$3^9\cdot 2$ – 0 не первый

$3^9\cdot 2 - 1$ → есть или 0, или 7

все „8" и 1 „7" – сколько вар? не $10\cdot 3^9$

2^9

$\boxed{3^9\cdot 2 - 2^9} \cdot 11$

все „8" и ~~строго~~ хотя бы 1 „7" сколько вар

2^{10} – всего.

$2^{10} - 1$ → будет хотя бы 1 „7", „0" нет.

$\boxed{3^9\cdot 2 - (2^{10} - 1)} \cdot 11$ Ответ

$3^9\cdot 2 - (2^{10} - 1) - 1$ (все 8) $= 3^9\cdot 2 - 2^{10} + 1 - 1 = 3^9\cdot 2 - 2^{10}$

- ещё вместо только нули.

„8" и „0"

2^9 – первая точно „8".

$2^9 - 1$

есть хотя бы 1 „0".

$3^9\cdot 2 - (2^{10} - 1) - (2^9 - 1) - 1$

$3^9\cdot 2 - 2^{10} + 1 - 2^9 + 1 - 1$

$= \boxed{3^9\cdot 2 - 2^{10} - 2^9 + 1}$

☑ черновик ☐ чистовик

Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

№3

3) 17 - значные числа

0, 7, 8 - содерж., каждая хотя бы 1 раз

ровно 7 „8" и подряд идут.

C_{17}^{7} - - - - 8888888 - - - -

C

$C_{11}^{1} = 11$

3^8 выбрать +

10 ~~упор.~~ позиций

- ~~хотя~~ бы 1 „7"
- хотя бы 1 „0"
- первая не „0"

... - - - 7 - - - 0 . . . - -

$2 \cdot 3^7$

C_9^1 - выбрать 0 = 9

C_8^1 - выбрать 7 = 9

- осталось ещё 8 позиций, где стоит что угодно $= 3^8 \cdot 2$

- ~~...~~ по-другому 3^{10} - способов расстановки.

$3^{10} - 1$ -

нельзя „0" на первую позицию.

(неверно), ещё $\geq$ 1 способа

- 1-ю позицию 3^2 вар.
- остальные + 3 вар. $3^9 \cdot 2$
- ~~Нужно вычесть~~ Одновременно определяется 0 и 7
- 3^{10} если ставить хоть что.

$3^9 \cdot 2$ + ноль нельзя на первую позицию

хоть что

0 нельзя на первую позицию

$(9 \cdot 9 \cdot 3^8)$

0 7 Ответ.

$9 \cdot 9 \cdot 3^8$

неверно, т.к. это

3^{12}