МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2 ШИФР 7-003

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.

3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры “0”, “5” и “9” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “5” ровно шесть, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.

7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

7-003

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача N 2

$g(x) = \sin(5x) \cdot \sin(9x) - \sin^2(7x) - \cos^2 x - 3$

чтобы найти мин. и макс. $g(x)$, нужно приравнять к нулю производную $g(x)$. ; $g'(x) = 0$

решив ур-ние $g'(x) = 0$; найдем x, этот x подставим в $g(x)$, получим точку „a".

Сведем $g((x))$ к одной тригонометрической функции.

и найдем x_1 и x_2 при значении этой функции [-1] и [1]

Больше значение из x_1, x_2, „a" — есть максимум $g(x)$

меньше значение из x_1, x_2 ; „a" — есть минимум $g(x)$

Задача 7.

$35 = 5 \cdot 7$; сумма цифр не кратна 35 ; и не равна 0

цифры не должны идти по порядку ; методом перебора находим решение

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

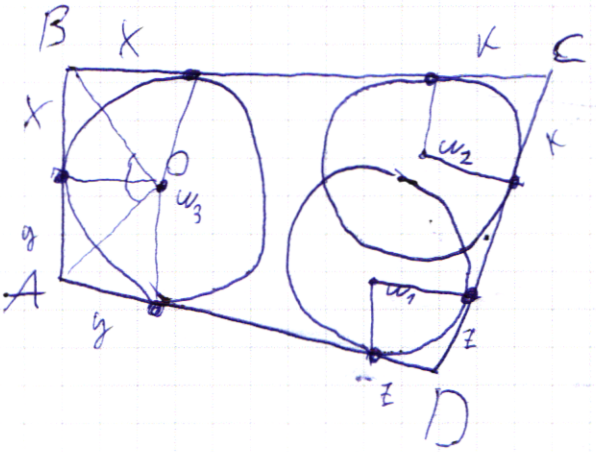
7-003

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4



Из свойств секущей к окружности из одной точки, длины от точки до точек касания равны

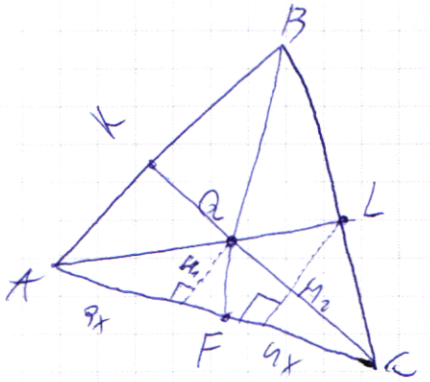
Если продлить прямые BC и AD до точки пересечения.

По теореме о секущей и касательной

$\angle AOB = 60°$ из равнобедренного $\triangle$

AB находим по теореме пифагора

Задача 6



$$\frac{AF}{FC} + \frac{CL}{LB} + \frac{BK}{KA} = 1 \qquad \frac{S_\triangle BQL}{S_\triangle BAC} = \frac{1}{16}$$

$H_1 = 9$

$H_2 = ?$

$$H_2 = \frac{S_\triangle BQL}{S_\triangle BAC} \cdot \frac{4}{3} : 9$$

$H_2 = 9 : \frac{1}{6}$

$H_2 = 54$

H_1 – расстояние от точки Q до прямой AC

H_2 – расстояние от L до AC

Ответ: $H_2 = 54$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Задача №2

$g(x) = \sin(5x)\cdot\sin 9x - \sin^2(7x) - \cos^2 x - 3$

min = ?

max = ?

Чтобы найти минимум и максимум функции, нужно приравнять производную функции к нулю $g'(x)=0$

$\sin(5x)\cdot\sin(9x) = \frac{\cos(4x)}{2} - \frac{\cos(14x)}{2}$

$1-\sin^2(7x) = \cos^2(7x)$

$g(x) = \frac{\cos(4x)}{2} - \frac{\cos(14x)}{2} + \cos^2(7x) - \cos^2 x - 4$

$g'(x) = -2\sin(4x) + 7\sin(14x) - 14\sin(7x) + 2\sin x = 0$

$7\sin((14)x) + 2\sin(x) = 14\sin(7x) + 2\sin(4x)$ (*)

решив ур-ние (*), мы найдём значения аргумента $g((x))$

~~при~~ ~~как~~ Как решение ур-ния (*), найдём значение „α“

Это будет являться минимумом, а максимум $g(x)$ равен 0

так как у тригонометрических функций область значений $[-1;1]$

Ответ: max $g(x) = 0$

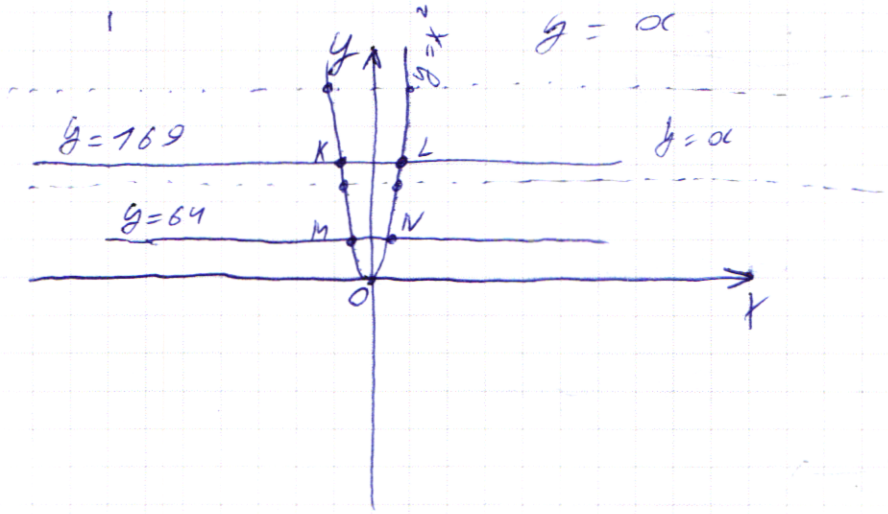
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

7-003
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1



KL - отрезок высеченный параболой на прямой $y = 169$

MN - отрезок высеченный параболой на прямой $y = 64$

длины этих отрезков, в силу симметрии параболы можно найти как удвоенную координату (x) точки пересечения прямых и параболы.

$KL;\ 169 = x_{KL}^2$; $MN;\ 64 = x_{MN}^2$

$x_{KL} = 13 \Rightarrow KL = 26$; $x_{MN} = 8 \Rightarrow MN = 16$

аналогично, a, есть квадрат координаты, $y = a$; $y = x^2 \Rightarrow a = x^2$ (1)

треугольник с углом $120°$ найдем через теорему косинусов

где из (1) следует, что третья сторона равна $2\sqrt{a}$

$(2\sqrt{a})^2 = 26^2 + 16^2 - 26 \cdot 16 \cdot \cos 120° \Rightarrow a = 337$

$26^2 = (2\sqrt{a})^2 + 16^2 - 2\sqrt{a} \cdot 16 \cdot \cos 120° \Rightarrow a = 49$

$16^2 = (2\sqrt{a})^2 + 26^2 - 2\sqrt{a} \cdot 26 \cdot \cos 120° \Rightarrow a \notin R$

Ответ: $a = 337$
$a = 49$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Задача №5. $\log_a b = c \Rightarrow a^c = b$

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$

Запишем ОДЗ; из ОДЗ, $\sqrt{x+3}-x > 0$; $(x+5) > 0$

$\sqrt{x+3}-x \neq 1$

из ОДЗ $x \in \left[-3; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$

решим ур-ние

$(\sqrt{x+3}-x)^1 = x+5 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow x \geq -2$ (для неравенства)

Объединяя решение и ОДЗ, получим;

$x \in \left[-2; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$

Ответ: $x \in \left[-2; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$

Задача №3

Если 6 подряд цифр 5, то для цифр „0" и „9" остается $18-6=$

$=12$ мест расположения, 0 не может быть на первом месте

Для расположения цифры „5" $-\frac{18!}{6!}$ вариантов.

Для цифры „0" и „9" $-\frac{12!}{2!}$ вариантов, исключив варианты,

где 0 на первом месте $\frac{12!}{2!}$ —

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

7-003

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) $g(x) = \sin(5x)\cdot\sin(9x) - \sin^2(7x) - \cos^2 x - 3 + 1 - 1$

min; max = ?

$\sin(5x)\cdot\sin(9x) = \frac{\cos(4x)}{2} - \frac{\cos(14x)}{2}$

$g'(x) = 0 \Rightarrow$ min; max $(g(x))$ на участке $[-1; 1]$

$1 - \cos^2 x = \sin^2 x \Rightarrow g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2(7x) + \sin^2 x - 4$

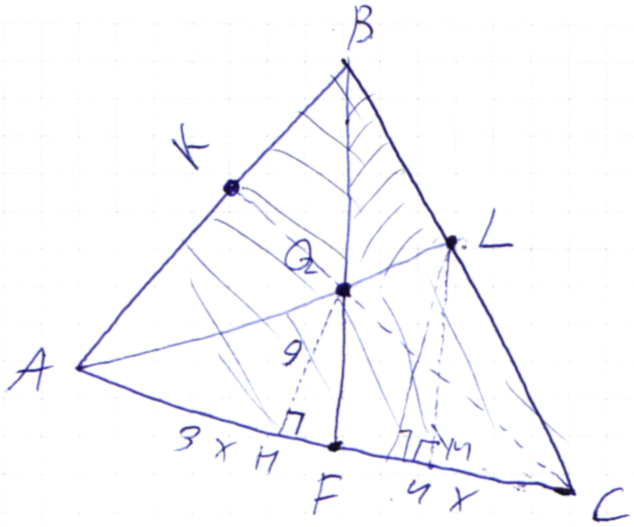
$1 - \sin^2(7x) = \cos^2(7x) \Rightarrow \cancel{g(x) = \frac{\cos(4x)}{2} - \frac{\cos(14x)}{2}}$

$g(x) = \frac{\cos(4x)}{2} - \frac{\cos(14x)}{2} + \cos^2(7x) - \cos^2 x - 4$

$g'(x) = -2\sin(4x) + 7\sin(14x) - 14\sin(7x) + 2\sin x = 0$

$\cancel{-2\sin}$ $7\sin(14x) + 2\sin(x) = 14\sin(7x) + 2\sin(4x)$

(6).



$$\frac{S_{\triangle} BQL}{S_{\triangle} BAC} = \frac{1}{16}$$

$QH = 9$

$LM = 8$

~~Рассмотрим △AQF~~

$$\frac{AF}{FC} + \frac{CL}{LB} + \frac{BK}{KA} = 1$$

Если отношение площадей треугольников $= \frac{1}{16}$, то их линейные размеры относятся как $\frac{1}{4}$

(3)

O O O O O O O O O O O O O O O O O O

$$C_{6}^{18} = \frac{\cancel{6!}}{18!(12)!} \qquad 18 - 6 = 12$$

$$3 + 2 \qquad \frac{18!}{6!} \qquad 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

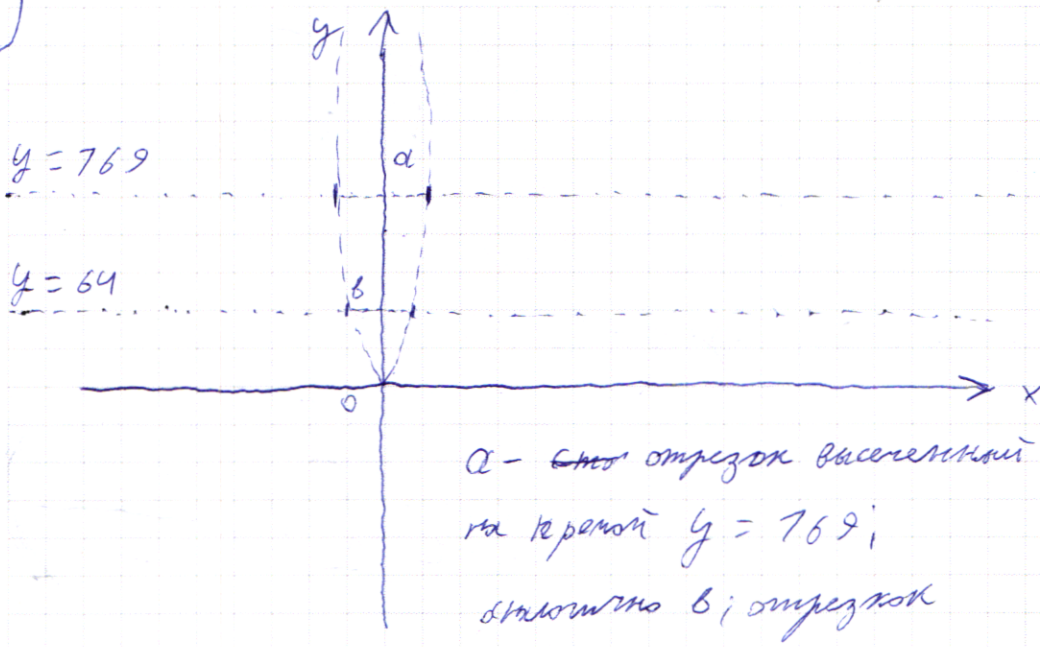
7-003

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1



a – ~~это~~ отрезок высеченный параболой $y = x^2$ на прямой $y = 169$;

аналогично b; отрезков

длины отрезков равна 2 · Координату конца отрезка по oX;

a; $169 = x_1^2$

$x = 13$; $a = 26$

b; $64 = x_2^2$

$x = 8$; $b = 16$

$y = a$

; сторона треугольника равна образующего 3 сторону из известного a

$2\sqrt{a}$ – сторона треугольника

$(2\sqrt{a})^2 = 26^2 + 16^2 - 26 \cdot 16 \cdot \cos 120^\circ \Rightarrow a = 337$

$26^2 = (2\sqrt{a})^2 + 16^2 - 2\sqrt{a} \cdot 16 \cdot \cos 120^\circ \Rightarrow a = 49$

$16^2 = (2\sqrt{a})^2 + 26^2 - 2\sqrt{a} \cdot 26 \cdot \cos 120^\circ \Rightarrow a \notin R$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

5

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5)\geq 1$

ОДЗ $\sqrt{x+3}-x>0;\neq 1 \Rightarrow x\in\left[-3;\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$

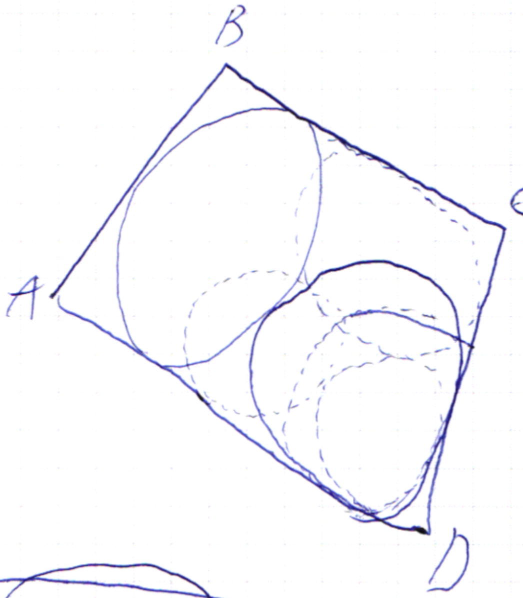
$x>-5$

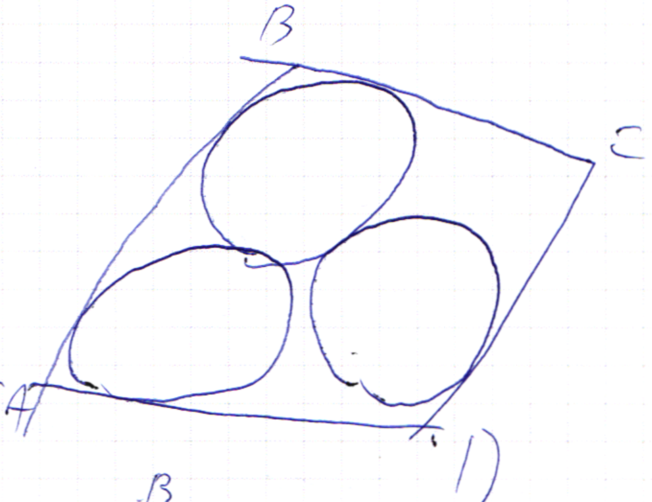
$\sqrt{x+3}-x = x+5 \Rightarrow x=-2$

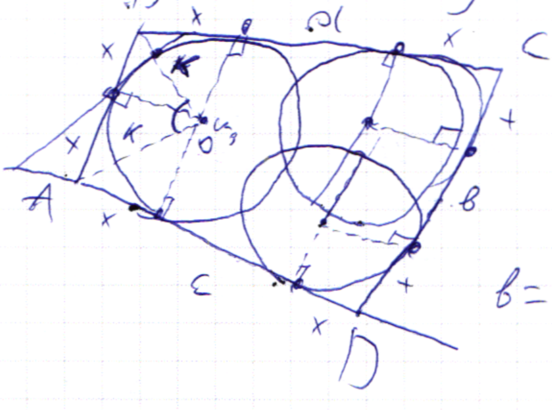
x

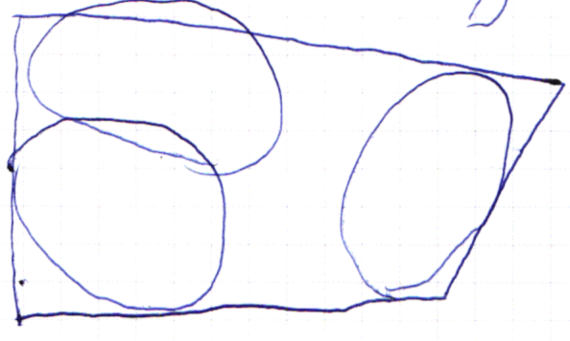
$x\in\left[-2;\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$

4









$(2x+c)+(2x+a)-2x-2x-b=10$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

7-003

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7

~~1 2 3 4 5~~ ~~36, 37, 38, 39, 40,~~ ~~71, 72, 73, 74, 75,~~ ~~106, 107, 108, 109, 110~~

141; 142; 143, 144, 145

$35 = a^{k_1} \cdot b^{k_2}$ Разность не может быть 0

$35 = 5 \cdot 7.$

1 · 3 5 7 10 ; 37, 3.

2 4 6 8 ~~10~~ 11 ; 38 ; 40 ; 42, 44, 46, 57

~~11~~

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)