МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1

ШИФР 11-021

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geqslant 1$.

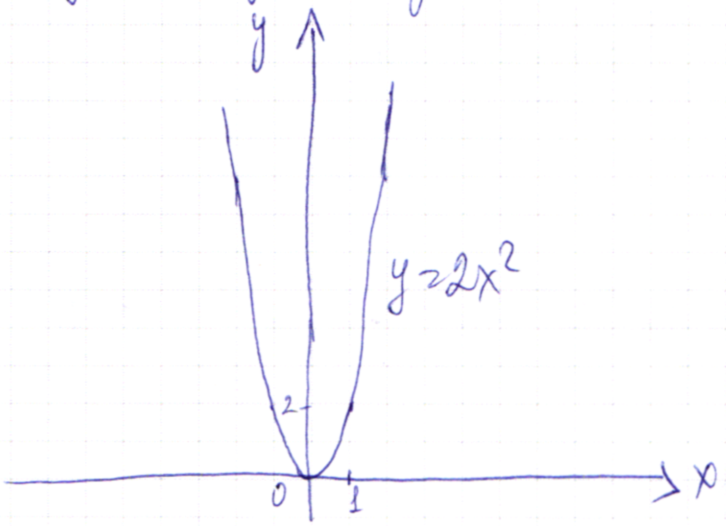
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$y = 2x^2 \quad y = 98 \quad y = 18 \quad y = a$



$2x^2 = 98 \qquad 2x^2 = 18$

$x = \pm 7 \qquad x = \pm 3.$

$2x^2 = a$

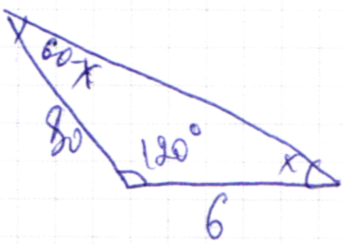
$x = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}}$

$a^2 = 80^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 80 \cos 120^\circ$

$a^2 = 6387$

$a = \sqrt{6387}.$

$x = \frac{6387}{\sqrt{2}}$



Отв: $\boxed{y = \frac{6387}{\sqrt{2}}.}$

N2

$y(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

находим производную от этой фун-и.

$(\sin 3x \cdot \sin 7x)' = -3\cos 3x \sin 7x + 7\cos \cancel{7x} \sin 3x.$

$(u \cdot v)' = u'v - v'u$

$(\sin^2 x)' = (1-\cos 2x)' = \frac{1}{2} + \frac{x}{4}\sin 2x.$

$(\cos^2 5x)' = !$

$(4)' = 0.$

$7\cos 7x \sin 3x - 3\cos 3x \sin 7x - \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{4}\sin 2x\right)$

N5

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1.$

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq \log_{\sqrt{x+7}-x}(\sqrt{x+7}-x).$

$(x+4) \geq \sqrt{x+7} - x.$

~~log~~

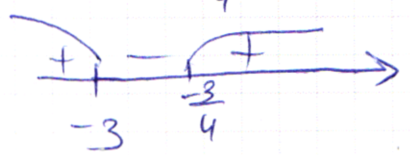
$2x+4 \geq \sqrt{x+7}$

возводим в квадрат

$4x^2+15x+9 \geq 0$

$D = 9^2$

$x_1 = -\frac{3}{4} \quad x_2 = -3.$



$x \in (-\infty; -3] \cup [-\frac{3}{4}; +\infty)$

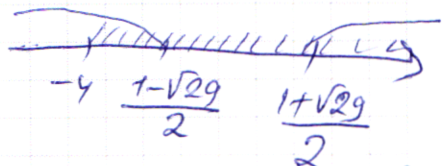
ОДЗ:

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - x > 0 & (1) \\ \sqrt{x+7} - x \neq 1 & (2) \\ x+4 > 0 & (3) \end{cases}$$

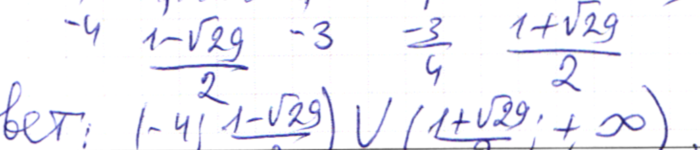
(1) $x_1 = \frac{1+\sqrt{29}}{2}$; $x_2 = \frac{1-\sqrt{29}}{2}$

(2) $x \neq 2$ $\quad x \neq -3$

(3) $x > -4.$



$x \in (-4; \frac{1-\sqrt{29}}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{29}}{2}; +\infty)$



Ответ: $(-4; \frac{1-\sqrt{29}}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{29}}{2}; +\infty).$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

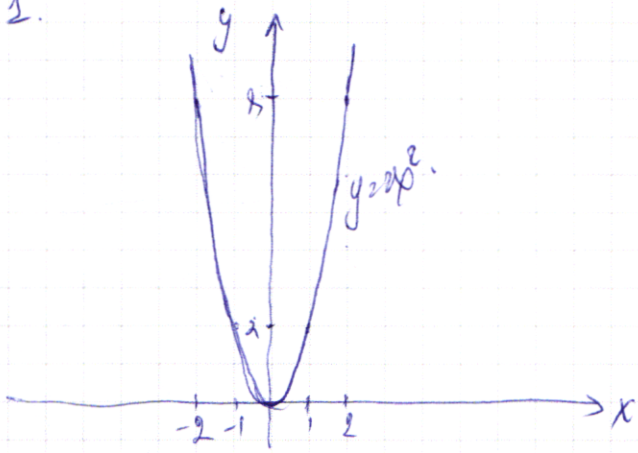
11-021

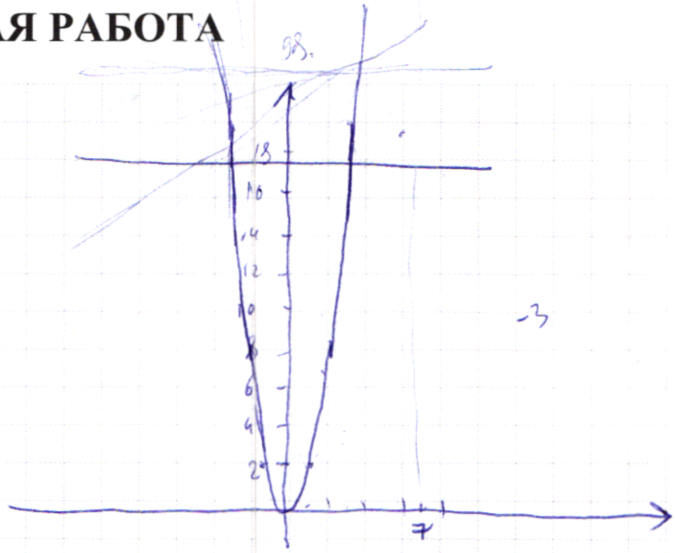
ШИФР

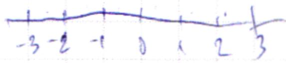
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1.







$y = 2x^2$.

$y = 98$.

$y = 18$

$y = a$.

$2x^2 = 98$

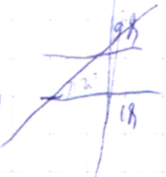
$x^2 = 49$

$x = \pm 7$.

$2x^2 = 18$

$x^2 = 9$

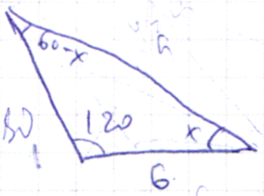
$x = \pm 3$.



$2x^2 = a$

$x = \sqrt{\frac{a}{2}}$

$x = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}}$.



$12 \cdot 8 = 96$

$a^2 = 80^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 80 \cos 120^\circ$

$a^2 = 6400 + 36 - 96 \cdot -\frac{1}{2}$

$a^2 = 6436 - 49 = 6387$

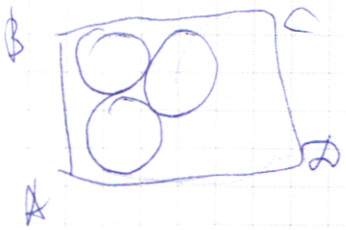
$a = \sqrt{6387}$

$6436 - 49 = 6387$

$79 \cdot 79$: 711, 553, 5701

$80 \cdot 80$

$\frac{x}{2} - \frac{x}{4} \cos 8x$



$\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin x = 5 \sin^2 x$

N2.

$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

$(u \cdot v)' = u'v - v'u$

$(\sin 3x \cdot \sin 7x)' = \sin 3x' \sin 7x - \sin 7x' \sin 3x$

$= -3\cos 3x \sin 7x + 7\cos 7x \sin 3x$

$(\sin^2 x)' = 1 - \cancel{\cos 2x}$

$1 - \cos 2x$?

$2\sin x \cos x = \sin 2x$.

$1 - \cos^2 x =$

$\sin^2 x + \cos^2 x - \cos^2 x - \sin^2 x = 1$.

$\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x$.

$(x^n)' = n x^{n-1}$

$2\cos x$

$(\cos^2 x)' =$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

N 5

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1.$

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq \log_{\sqrt{x+7}-x}(\sqrt{x+7}-x).$

$(x+4) \geq \sqrt{x+7}-\cancel{x}$

$2x+4 \geq \sqrt{x+7}$

$4x^2+16x+16 \geq x+7$

$4x^2+15x+9 \geq 0$

$D = 225-144 = 9^2$

$x_1 = \frac{-15+9}{8} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}.$

$x_2 = \frac{-15-9}{8} = -\frac{24}{8} = -3$ п.к

$+ \quad - \quad +$

$-3 \quad -\frac{3}{4}$

$(-\infty; -3) \cup [-\frac{3}{4}; +\infty)$

$36 \times 4 = 144$

$225 - 144 = 81$

$-4 \quad \frac{1-\sqrt{29}}{2} \quad -3 \quad -\frac{3}{4} \quad \frac{1+\sqrt{29}}{2}$

Отв: $(-4; \frac{1-\sqrt{29}}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{29}}{2}; +\infty)$

ОДЗ:

$$\begin{cases} \sqrt{x+7}-x > 0 \\ \sqrt{x+7}-x \neq 1. \\ (x+4) > 0 \end{cases}$$

$\sqrt{x+7} > x.$

$x+7 > x^2$

$x^2-x-7 < 0.$

$D = 1+28 = 29$

$x_1 = \frac{1+\sqrt{29}}{2}$

$x_2 = \frac{1-\sqrt{29}}{2}$

$\sqrt{x+7} \neq x+1.$

$x+7 \neq x^2+2x+1.$

$x^2+x-6 \neq 0$

$D = 1+24 = 5^2$

$x_1 = \frac{-1+5}{2} = 2$

$x_2 = \frac{-1-5}{2} = -3.$

$x \neq 2 \quad x \neq -3$

$x > -4$

$+ \quad - \quad +$

$-4 \quad \frac{1-\sqrt{29}}{2} \quad \frac{1+\sqrt{29}}{2}$

$x \in (-4; \frac{1-\sqrt{29}}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{29}}{2}; +\infty).$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

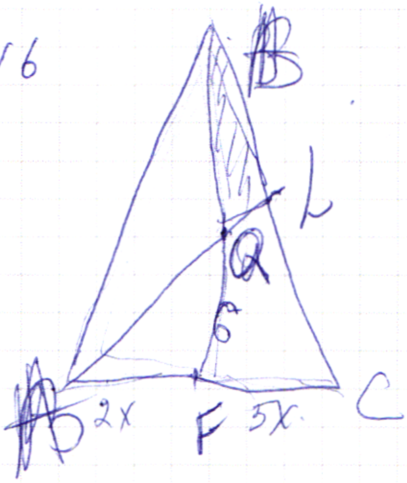
11-021

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6



~~FL = 2,5~~

8888888.

$$\frac{S_{BQL}}{S_{ABC}} = \frac{5}{12}$$

$AF : FC = 2 : 5$

$\frac{AF}{FC} = \frac{2}{5}$ $\frac{S_{BQL}}{S_{ABC}} = \frac{5}{12}$

$$\frac{\frac{1}{2}ah}{\frac{1}{2}bh_1} = \frac{5}{12}$$

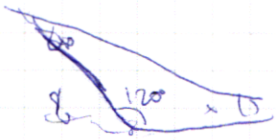
[1;45] [1;225] — 5 отрез

[46;90] 12345...

[91;135]

[136;180]

[181;225]



№4

$AD + BC - AB - CD = 12$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4.$

$g'(x) = -3\cos 3x \sin 7x + 7\cos 7x \sin 3x$

$(\sin^2 x)' = 1 - \cos^2 x.$ $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin 2x.$

$1 - 2\sin^2 x = \sin 2x.$

$\sin^2 x \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)' = \frac{(1-\cos 2x)' 2 - 2'(1-\cos 2x)}{4} = \frac{1-\cos 2x}{2}$

$= \frac{\cancel{2} + \cancel{2}\sin 2x}{4} = \frac{1}{2} + \frac{x}{4}\sin 2x.$

или ФРИПМ $\cos^2 5x = \cos^2(2x+3x) = \sin^2 2x \cos^2 3x - \sin^2 3x \cos^2 2x.$

+ts: $7\cos 7x \sin 3x - 3\cos 3x \sin 7x - \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{4}\sin 2x\right)$

~~[illegible]~~

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)