

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2

ШИФР

12-028

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120° ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.
3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
 - в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB .
5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.
7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3. Существует 13 вариантов расположения идущих подряд цифр «5». На каждой из вариантов существует 2^{12} способов расположения оставшихся цифр «0» и «9». Значит, количество таких 18-ти значных чисел будет равно:

$$n = 13 \cdot 2^{12} = 13 \cdot 4096 = 53248$$

Однако, для каждого из 13 вариантов существует два таких, что все оставшиеся цифры, кроме «5», равны только «0» или только «9».

Исключаем их:

$$n = 53248 - 13 \cdot 2 = 53248 - 26 = 53222$$

Ответ: 53222.

№2. $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

$$\begin{aligned} g'(x) &= (\sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3)' = (\sin 5x \cdot \sin 9x)' - (\sin^2 7x)' - \\ &- (\cos^2 x)' - (3)' = \cos 5x \sin 9x + \cos 9x \sin 5x - 2\cos 7x \sin 7x - 2\cos x \cdot (-\sin x) - \\ &- (\cos x \cdot \cos x)' = \cos 5x \sin 9x + \cos 9x \sin 5x - 2\cos 7x \sin 7x - (\cos x(-\sin x) + \\ &+ \cos x(-\sin x)) = \cos 5x \sin 9x + \cos 9x \sin 5x - 2\cos 7x \sin 7x + 2\sin x \cos x = \\ &= \frac{1}{2}(\sin 14x + \sin 4x) + \frac{1}{2}(\sin 14x - \sin 4x) - \sin 14x + \sin 2x = \frac{1}{2}\sin 14x + \\ &+ \frac{1}{2}\sin 4x + \frac{1}{2}\sin 14x - \frac{1}{2}\sin 4x - \sin 14x + \sin 2x = \sin 14x - \sin 14x + \sin 2x = \\ &= \sin 2x \end{aligned}$$

$$g'(x) = 0 \text{ если } \sin 2x = 0$$

$$2x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi n}{2}; n \in \mathbb{Z}, \Rightarrow x = \frac{\pi n}{2}; n \in \mathbb{Z} - \text{точки экстремума}$$

Возможные значения функции в точках $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$.

$$g(0) = \sin 0 \cdot \sin 0 - \sin^2 0 - \cos^2 0 - 3 = 0 - 0 - 1 - 3 = -4$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{5\pi}{2} \sin \frac{9\pi}{2} - \sin^2 \frac{7\pi}{2} - \cos^2 \frac{\pi}{2} - 3 = 1 \cdot 1 - 1 - 0 - 3 = -3$$

$$g(\pi) = \sin 5\pi \sin 9\pi - \sin^2 7\pi - \cos^2 \pi - 3 = 0 \cdot 0 - 0 - 1 - 3 = -4$$

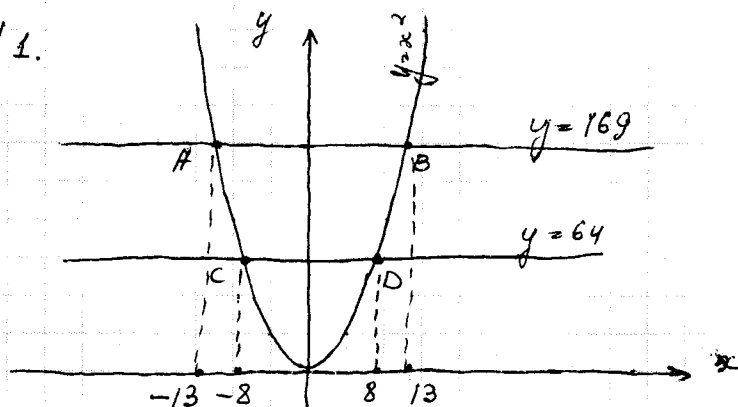
$$g\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin \frac{15\pi}{2} \sin \frac{21\pi}{2} - \sin^2 \frac{23\pi}{2} - \cos^2 \frac{3\pi}{2} - 3 = (-1)(-1) - 1 - 0 - 3 =$$

$$-3 = 1 - 1 - 0 - 3 = -3$$

Значит, $\max_{(-\infty; +\infty)} f(x) = -3$; $\min_{(-\infty; +\infty)} f(x) = -4$

Ответ: -3 ; -4 .

№1.



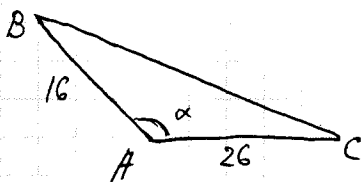
Найдём длину отрезков AB и CD :

$$A(-13; 169); B(13; 169); C(-8; 64); D(8; 64).$$

$$AB = \sqrt{(-13-13)^2 + (169-169)^2} = \sqrt{(-26)^2} = 26$$

$$CD = \sqrt{(-8-8)^2 + (64-64)^2} = \sqrt{(-16)^2} = 16$$

Рассмотрим $\triangle ABC$:



Пусть AB и AC — отрезки, которые мы нашли, $\alpha = 120^\circ$, тогда

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - AB \cdot AC \cdot \cos \alpha = 256 + 676 - 16 \cdot 26 \cdot \frac{1}{2} = 932 - 16 \cdot 13 = 932 - 208 =$$

$$= 724, \Rightarrow BC = \sqrt{724}$$

Для того, чтобы найти a , подставим значение BC в формулу для координат делит отрезка:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{724}$$

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 724$$

П.к. $y = x^2$, то значения y_1 и y_2 будут совпадать, а x_1 и x_2 будут иметь одинаковый модуль. Получим

$$(x_1 - x_2)^2 = 724$$

$$x_1 - x_2 = \pm \sqrt{724}, \Rightarrow x_1 = \frac{\sqrt{724}}{2}; x_2 = \frac{-\sqrt{724}}{2}$$

Поскольку $y = a$ — константа, достаточно подставить одно из этих значений в функцию $y = x^2$:

$$f\left(\frac{\sqrt{724}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{724}}{2}\right)^2$$

$$y = \frac{724}{4}$$

$$y = 181$$

Следовательно, при $a = 181$ можно составить треугольник с углом 120° .

Ответ: 181.

№5. $\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) \geq 1$

$$(\sqrt{x+3}-x-1)(x+5-\sqrt{x+3}+x) \geq 0$$

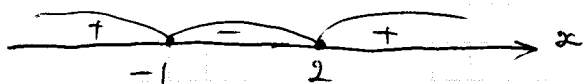
(1) $\sqrt{x+3}-x \geq 1$

$$\sqrt{x+3} \geq x+1$$

$$x+3 \geq x^2+2x+1$$

$$-x^2-x+2 \geq 0$$

$$(x+1)(x-2) \geq 0$$

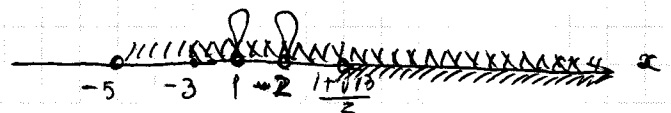


$$x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x+5 > 0 \\ x+3 \geq 0 \\ \sqrt{x+3}-x > 0 \\ \sqrt{x+3}-x \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -5 \\ x \geq -3 \\ x > \frac{1+\sqrt{13}}{2} \\ x \neq -1; x \neq 2 \end{cases}$$



$$(2) (x+5-\sqrt{x+3}+x) \geq 0$$

$$2x+5 \geq \sqrt{x+3}$$

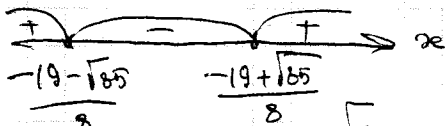
$$4x^2+20x+25 \geq x+3$$

$$4x^2+19x+22 \geq 0$$

$$D = 201 - 176 = 25$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{25}$$

$$x_{1,2} = \frac{-19 \pm \sqrt{25}}{8}$$



$$x \in \left(-\infty; \frac{-19-\sqrt{25}}{8}\right) \cup \left(\frac{-19+\sqrt{25}}{8}; +\infty\right)$$

Объединяя решения (1) и (2):

$$x \in \left(-\infty; \frac{-19-\sqrt{25}}{8}; \frac{-19+\sqrt{25}}{8}; +\infty\right)$$

Объединяя с ОДЗ:

$$x \in \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}; +\infty\right)$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}; +\infty\right)$$

$$\text{Объединяя ОДЗ: } x \in \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}; +\infty\right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$A(-8; 64), B(8; 64)$
 $A(-13; 169); B(13; 169)$
 $AB = \sqrt{(-13-13)^2 + (169-169)^2} = \sqrt{(-26)^2} = 26$
 $\alpha = 120^\circ$
 $a = b \cos \alpha$
 $a = 169 \cdot 64 \cdot \frac{\pi}{3} =$

$\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) \geq 1$
 $\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) - 1 \geq 0$
 $(\sqrt{x+3}-x-1)(\sqrt{x+3}-x-x-5) \geq 0$
 $\sqrt{x+3}-x \geq 1$
 $\sqrt{x+3} \geq x+1$
 $x+3 \geq x^2+2x+1$
 $(x-1)(x+2) \geq 0$

$\sqrt{x-3}-2x-5 \geq 0$
 $\sqrt{x-3} \geq 2x+5$
 $x-3 \geq 4x^2+20x+25$
 $-4x^2-19x-28 \geq 0$
 $4x^2+19x+28 \geq 0$

$x \in (-\infty, -2] \cup [1; +\infty)$
 $x \in [-3, -2] \cup [2; +\infty)$
 $x \in [-3; -2) \cup (-2; 1) \cup (1; 3)$

1. 555555 ~~555555555555~~ 2. *555555***** 3. *555555*****

$$n = 1 \cdot 2^{12}$$

$$n = 2^{12}$$

$$n = 12 \cdot 2^{12} = 12 \cdot 2^4 \cdot 2^4 \cdot 2^4 = 12 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 16 = 4(3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4) = 4(3 \cdot 4^3) = 4^2(3 \cdot 4^2) = 16(3 \cdot 16) = 16 \cdot 48 = 768$$

5 - 32 8 - 128 9 - 572
6 - 64 8 - 256 10 = 1024

11 = 2048 12 = 4096

$$\begin{array}{r} 48 \\ \times 16 \\ \hline 288 \\ + 48 \\ \hline 768 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \\ 192 \cos \alpha + \cos \beta &= \end{aligned}$$

4. *x555555xxxxxxx

5. xxx555555xxxxxxx

6. xxxxx555555xxxxxxx

7. xxxxxx555555xxxxxxx

8. xxxxxx555555xxxxxxx

9. xxxxxx555555xxxxxxx

10. xxxxxxxx555555xxx

11. xxxxxxxx555555xx

12. xxxxxxxxxx555555x

13. xxxxxxxxxx555555.

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 16 \\ \hline 256 \\ + 16 \\ \hline 272 \\ \times 16 \\ \hline 4096 \\ + 12288 \\ \hline 53248 \end{array}$$

$$n = 13 \cdot 2^{12} = 13 \cdot (2^4)^3 = 13 \cdot 16^3 = 13 \cdot 4096 = 53248$$

$$= 13 \cdot 2^4 \cdot 2^4 \cdot 2^4 = 13 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 16 = 53248 - 13 \cdot 2 = 53222$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times 24 \\ \hline 108 \\ + 540 \\ \hline 648 \end{array}$$

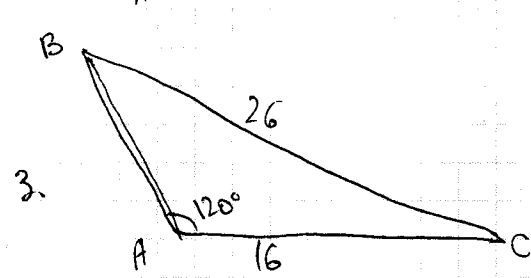
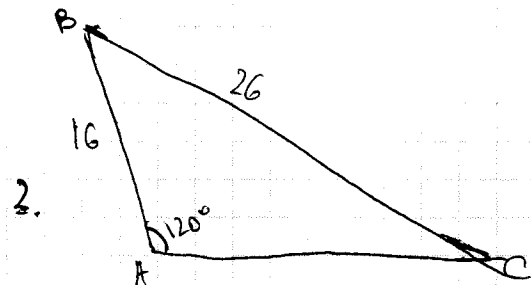
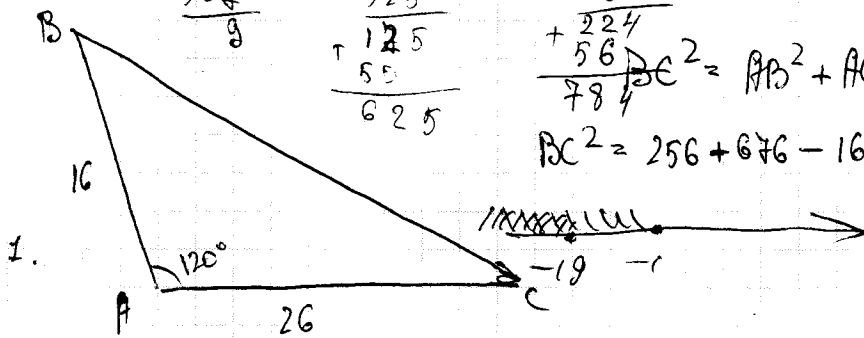
$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 25 \\ \hline 125 \\ + 1250 \\ \hline 625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 28 \\ \hline 224 \\ + 560 \\ \hline 784 \end{array}$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - AB \cdot AC \cdot \cos \alpha$$

$$BC^2 = 256 + 676 - 16 \cdot 26 \cdot \frac{1}{2} = 932 - 208 = 724$$

$$= 932 - 208 = 724 \Rightarrow AC = \sqrt{724}$$



$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{724}$$

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 724$$

$$P(x_1; y) ; M(x_2; y)$$

$$(x_1 - x_2)^2 = 724$$

$$x_1 - x_2 = \sqrt{724}$$

$$\begin{array}{r} 724 \quad | \quad 4 \\ -4 \quad \quad | 181 \\ \hline 32 \\ -32 \\ \hline -4 \\ -4 \\ \hline -8 \end{array}$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{724}}{2}; x_2 = -\frac{\sqrt{724}}{2}$$

$$a = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{724}}{2} \right) = \frac{724}{4} = 181$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$$

$$g'(x) = (\sin 5x \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3)' = (\sin 5x \sin 9x)' - (\sin^2 7x)' - (\cos^2 x)' - (3)'$$

$$\sin 5x \sin 9x = \frac{1}{2} (\cos 14x - \cos 4x) - \sin x \cos x = \cos 5x \cos 9x - \sin x \cos x$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \quad \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\begin{cases} \frac{\alpha+\beta}{2} = 9 \\ \frac{\alpha+\beta}{2} = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha+\beta = 18; \alpha = 18-\beta \\ \frac{\alpha-\beta}{2} = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} \cos \alpha + \beta = 2 \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \\ \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \end{cases}$$

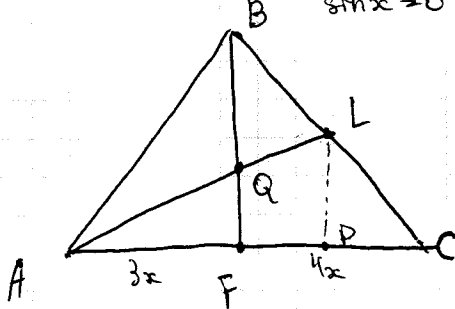
$$\begin{cases} \frac{\alpha+\beta}{2} = 9 \\ \alpha + \frac{26}{4} = 18 \\ \alpha = 18 - \frac{26}{4}; \alpha = \frac{72-26}{4} = \frac{46}{4} = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} 18 - 2\beta = 5; 36 - 4\beta = 10 \\ -4\beta = -26 \\ \beta = \frac{26}{4} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &= \sin 5x \cos 9x + \cos 5x \sin 9x - \cos 7x \sin 7x - \sin 7x \cos 7x - (-\sin x (-\sin x)) = \\ &= \sin 5x \cos 9x + \cos 5x \sin 9x - 2\cos 7x \sin 7x + \sin^2 x = \frac{1}{2} (\sin 14x - \sin 2x) \end{aligned}$$

$$= \sin 14x - 2\cos 7x \sin 7x - \sin 2x = \frac{1}{2} (\sin 14x - \sin 4x) + \frac{1}{2} (\sin 14x + \sin 4x) =$$

$$= \sin 14x - \sin 4x - \sin 2x = \frac{1}{2} \sin 14x - \frac{1}{2} \sin 4x + \frac{1}{2} \sin 14x + \frac{1}{2} \sin 4x =$$

$$- \sin^2 x = 0; \sin^2 x = 0 \quad \sin x = 0$$



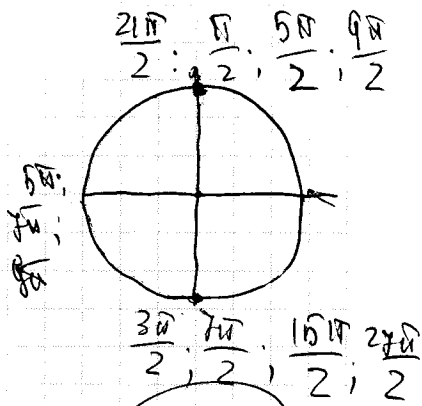
$$\frac{AF}{FC} = \frac{3}{4}; \frac{S(BQL)}{S(BAC)} = \frac{1}{16} \text{ данные: LP}$$

$$g(0) = \sin 0 \cdot \sin 0 - \sin^2 0 - \cos^2 0 - 3 = 0 - 0 - 1 - 3 = -4$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{5\pi}{2} \sin \frac{9\pi}{2} - \sin^2 \frac{5\pi}{2} - \cos^2 \frac{\pi}{2} - 3 = 1 \cdot 1 - 1 - 0 - 3 = -3$$

$$g(\pi) = \sin \pi \sin 9\pi - \sin^2 \pi - \cos^2 \pi - 3 = 0 - 0 - (-1)^2 - 3 = -1 - 3 = -4$$

$$g\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin \frac{15\pi}{2} \sin \frac{27\pi}{2} - \sin^2 \frac{15\pi}{2} - \cos^2 \frac{3\pi}{2} - 3 = (-1) \cdot (-1) - 1^2 - 0^2 - 3 = -3$$



$$\log_{\sqrt{x+3-x}}(x+5) \geq 1$$

$$\log_{\sqrt{x+3-x}}(x+5) - 1 \geq 0$$

$$(\sqrt{x+3-x}-1)(x+5-\sqrt{x+3-x}) \geq 0$$

$$\sqrt{x+3-x} \geq 1$$

$$\sqrt{x+3} \geq x+1$$

$$x+3 \geq x^2+2x+1$$

$$-x^2-x+2 \geq 0$$

$$(x+1)(x-2) \geq 0$$

ODZ:

$$x+5 > 0$$

$$\sqrt{x+3-x} > 0$$

$$\sqrt{x+3-x} \neq 1$$

$$x+3 \geq 0$$

$$x > -5$$

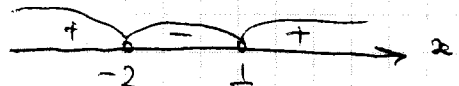
$$x \geq -3$$

$$\frac{261}{85} \begin{cases} x+3 > x^2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{x+3} > x$$

$$(x+3-1)\left(\frac{1}{2}-x\right) > 0$$

$$(x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right) < 0$$



$$x \in \left(-2, \frac{1}{2}\right)$$

$$\sqrt{x+3-x} \neq 1$$

$$\sqrt{x+3} \neq x+1$$

$$x+3 \neq x^2+2x+1$$

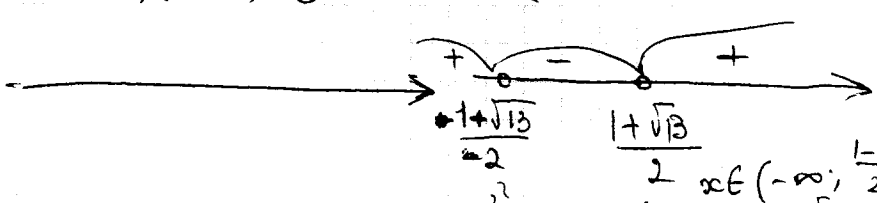
$$x+1 \geq 0$$

$$-x^2-x+2 \neq 0$$

$$x \geq -1$$

$$(x+1)(x-2) \neq 0$$

$$x \geq -1$$



$$D = 1 + 12 = 13$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{13}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{-2}$$

$$x_1 + x_2 = -1 \quad x_1 =$$

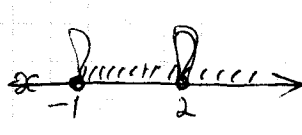
$$x_1 \cdot x_2 = 3$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1 + x_2 = 2$$

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{-2} = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{-2} = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$$





12 - 001

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)