МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2

ШИФР 5-004

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.

3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры “0”, “5” и “9” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “5” ровно шесть, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.

7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N5

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$

ОДЗ: $\begin{cases} \sqrt{x+3}-x>0, \\ \sqrt{x+3}-x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} > x \quad * \\ \sqrt{x+3} \neq 1+x \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+3>x^2 \quad ① \\ x+3 \neq 1+2x+x^2 \quad ② \end{cases} \\ -3 \leq x \leq 0 \text{ (из * при } x \leq 0) \end{array} \right.$

① : $x^2-x-3<0$

$D = 1+12 = 13$

$x_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}, \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$

$x \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \qquad \frac{1-\sqrt{13}}{2} > -3$

② $x^2+x-2=0$

По теореме Виета $x_1=-2, x_2=+1$

ОДЗ: $\left[-3; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) / \{-2; 1\}$

Имеем две системы неравенств:

I $\begin{cases} \sqrt{x+3}-x>1 \\ x+5 \geq \sqrt{x+3}-x \end{cases}$

$\begin{cases} \sqrt{x+3} > 1+x \quad ① \\ 2x+5 \geq \sqrt{x+3} \quad ② \end{cases}$

② $2x+5 \geq \sqrt{x+3}$

$4x^2+25+20x \geq x+3$

$4x^2+19x+22 \geq 0$

По т. Виета $x_1=-2, x_2=\frac{-11}{4}$

$x \in \left(-\infty; -\frac{11}{4}\right] \cup [-2; +\infty)$

① $\sqrt{x+3} > 1+x$

Если $1+x \leq 0$, то $x \leq -1$

II. $\begin{cases} \sqrt{x+3}-x<1 \\ x+5 \leq \sqrt{x+3}-x \end{cases}$

$\begin{cases} \sqrt{x+3} < 1+x \quad ① \\ 2x+5 \leq \sqrt{x+3} \quad ② \end{cases}$

① $\sqrt{x+3} < 1+x$

$x^2+2x+1 > x+3$

$x^2+x-2>0$

$x \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$

② $2x+5 \leq \sqrt{x+3}$

Если $2x+5 \leq 0$, то $x \leq -\frac{5}{2}$.

Если $2x+5 > 0$:

Если $1+x>0$:

$x+3>x^2+2x+1$

$x^2+x-2<0$

$x\in(-2;1)$

Итого: $x\in(-\infty;-\frac{11}{4}]\cup(-2;1)$

$4x^2+25+20x\le x+3$

$4x^2+19x+22\le0$

$x\in[-\frac{11}{4};-2]$.

Итого: $x\in(-\infty;-2)$

Итого без ОДЗ: $x\in(-\infty;-2)\cup(-2;1)$

Ответ: $x\in[-3;-2)\cup(-2;1)$.

№ 7.

Решение: Так как разность никаких двух чисел не делится на 35, то все эти числа дают разные остатки по модулю 35. Любое выбранное число a_k можно записать в виде $a_k=35t+r_k$, причём если число находилось в первом промежутке и не равно 35, то $t=0$ и так далее. Пусть Пиноккио не выбрал ни одного числа, делящегося на 35. Тогда сумма A всех двадцати пяти чисел равна: $A=5(0+35+70+105+140)+\sum_{k=1}^{25}r_k$. Минимум этой суммы достигается, когда $\sum_{k=1}^{25}r_k$ минимальна. $\min\left(\sum_{k=1}^{25}r_k\right)=1+2+\ldots+25=\frac{25\cdot26}{2}=25\cdot13$. (остатка 0 быть не может, так как там нет числа, делящегося на 35).

Тогда $\min A=5\cdot350+25\cdot13=25\cdot(70+13)=25\cdot83=2075$

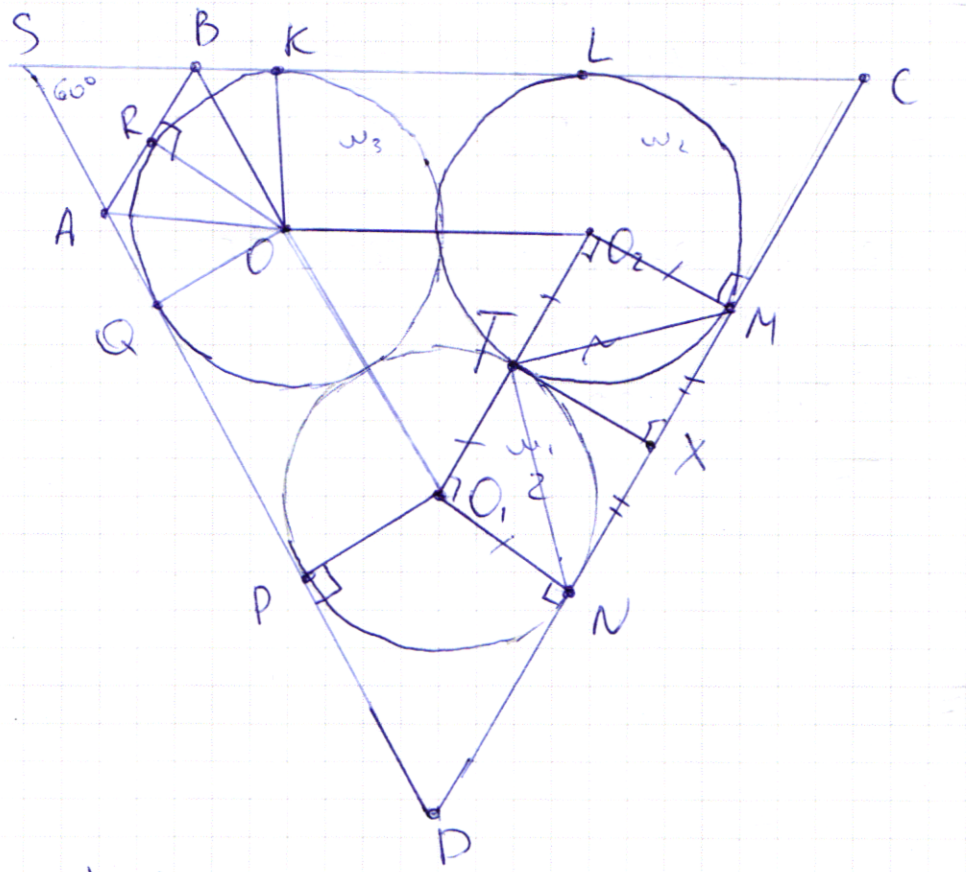
Если Пиноккио выбрал число, делящееся на 35 из какого-либо промежутка, то он может поменять это число на другое из этого промежутка так, что по-прежнему разность любых двух чисел не делится на 35, а сумма чисел станет меньше, так как в любом промежутке число, делящееся на 35 - наибольшее. Ответ: 2075.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.



а) 1) $AD+BC-AB-CD=\underline{AQ}+QP+\underline{\underline{PD}}+\underline{\underline{BK}}+KL+\underline{\underline{LC}}-\underline{AR}-\underline{\underline{RB}}-$
$-\underline{\underline{DN}}-NM-\underline{\underline{MC}}=QP+KL-NM=10$ (св-во касательных)

2) O_2O_1NM – прямоугольная трапеция

Проведём прямую TX ($X\in MN$), параллельную O_2M. Так как $O_1T=O_2T$, то TX – ср. линия и $\angle TXM=90°\Rightarrow$
$\Rightarrow NTM$ – равнобедр. треугольник ($TN=TM$). Тогда $\triangle O_1TN=$
$=\triangle O_2TM$ (по трём сторонам) $\Rightarrow\angle TO_1N=\angle TO_2M$, а так как
$\angle TO_1N+\angle TO_2M=180°$, то $\angle TO_1N=\angle TO_2M=90°\Rightarrow O_1O_2MN$ –

прямоугольник. $\Rightarrow O_2O_1 = MN = 2R$

Аналогично $KL = QP = MN = 2R$.

3) Так как $KL + QP - MN = 2R = 10$, $R = 5$.

б) 1) $\Delta\, OO_1O_2$ – равно~~бедр~~сторонний, так как $OO_1 = O_1O_2 = O_2O = 2R$.

Поэтому $\angle\, OO_1O_2 = 60°$. Тогда $\angle\, PO_1N = 180° \cdot 2 - 180° - 60° =$
$= 120°$. Тогда $\angle\, PDN = 180° - \overset{120}{\cancel{60}}° = 60°$.

Аналогично $\angle\, R\,SDC = \angle SCD = \angle CSD = 60°$

2) $\angle AOB = \angle QOK - \angle AOQ - \angle BOK = 120° - \left(\cancel{90} \frac{180° - \angle SBA}{2}\right) - \left(\cancel{90} \frac{180° - \angle SAB}{2}\right) =$
$= \cancel{-60° +}\ 120° - \frac{\angle SBA + \angle SAB}{2} = 120° - 60° = 60°$

в) 1) $\Delta ARO = \Delta BRO$ ($AR = BR$, OR - общая, и $\angle ARO = \angle BRO = 90°$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow AO = BO$. Тогда $AO = \sqrt{42} = BO$

2) $AB = AR = \sqrt{42 - 5^2} = \sqrt{17} = BR$

$AB = AR + BR = 2\sqrt{17}$.

Ответ: а) 5

б) $60°$

в) $2\sqrt{17}$

N 3.

Решение:

Так как все цифры "5" идут подряд, можно обозначить их за одну цифру "5" и считать количество 13-значных чисел. Рассмотрим два случая:

I. цифра "5" на первой позиции.

Имеется 12 позиций для цифр "9" и "0". Число вариантов расставить "9" и "0" равно 2^{12}. Однако нужно вычесть две ситуации, когда нет "0", и нет "9". Итого: $2^{12} - 2$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

IV. цифра "9" стоит на первом месте.
Сначала есть 12 вариантов на цифру 5, а потом 2^{11} на цифры "9" и "0" за вычетом одной ситуации, когда нет цифры "0". Итого: $12(2^{11}-1)$

В сумме имеем: $2^{12}-2+2^{12}\cdot 6-12=2^{12}\cdot 7-14$.

Ответ: $2^{12}\cdot 7-14$ чисел.

№1.

Решение:

I. Если в треугольнике один из углов равен ~~60~~ $120°$, то для его сторон x, y, z справедливо равенство:

$$x^2+y^2-2xy\cos 120^\circ=z^2 \iff x^2+y^2+xy=z^2.$$

II. Точки пересечения параболы $y=x^2$ и прямой $y=169$ — $(13; 169)$ и $(-13; 169)$. Тогда длина отрезка равна 26.
Аналогично для прямой $y=64$: длина отрезка равна 16.
Для прямой $y=a$ длина отрезка равна $2\sqrt{a}$.

III. Рассмотрим три случая:

а). Если угол в $120°$ лежит напротив стороны длины 16, то получаем противоречие, так как эта сторона не будет наибольшей.

б) Угол $120°$ напротив стороны длины 26.

$$16^2+y^2+16y=26^2 \iff y^2+16y+256=576 \iff$$

$$\iff y^2+16y-320=0$$

$D = 256 + 4 \cdot 320 = 256 \cdot 6.$

$y_1 = \frac{-16 - 16\sqrt{6}}{2}$ – не подходит (длина отрезка больше нуля)

$y_2 = \frac{-16+16\sqrt{6}}{2} = 8\sqrt{6} - 8.$

Тогда $a = \left(\frac{y_2}{2}\right)^2 = (4\sqrt{6} - 4)^2 = 112 - 32\sqrt{6}.$

III. угол $120°$ напротив стороны длины $\sqrt{8a}$

$8a^2 = 26^2 + 16^2 + 16 \cdot 26 = 256 + 576 + 416 = 1248.$

Тогда $a = 312.$

Ответ: $a = 312$

$a = 112 - 32\sqrt{6}.$

№2.

Преобразуем $g(x)$ к более приятному виду:

$\sin 5x \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 = \frac{\cos 2x}{2} - \frac{\cos 7x}{2} + \cos^2 7x - 1 -$
$- \cos^2 x - 3 = \cos^2 x - \frac{1}{2} - \frac{\cos 7x}{2} + \cos^2 7x - 4 - \cos^2 x =$
$= \frac{2\cos^2 7x - \cos 7x - 9}{2}.$ (В первом переходе использовалась формула $\sin\alpha \sin\beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}$).

Обозначим $\cos 7x = t$. имеем уравнение (умноженное на два)
$f(t) = 2t^2 - t - 9.$

Минимум функции в т. $x_в = \frac{1}{4}$. $y_в = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 9 = -9,25$

Тогда минимум $g(x) = -\frac{9,25}{2} = -4,625$ (он достигается при $\cos 7x = \frac{1}{4}$)

~~$f'(t) = 4t - 1 \Rightarrow f(t)$ возрастает при $t > \frac{1}{4}$ и убывает при $t < \frac{1}{4}$~~

Так как $t \in [-1; 1]$, нужно посмотреть значения $f(t)$ в точках -1 и 1. (f – парабола с ветвями вверх, то есть возрастает на промежутках $(x_в; +\infty)$ и $(-\infty; x_в)$.

$f(-1) = 2 + 1 - 9 = -6$

$f(1) = 2 - 1 - 9 = -8$

$-6 > -8 \Rightarrow$ максимум $g(x) = -\frac{6}{2} = -3$ (достигается когда $\cos 7x = -1$)

Ответ: наибольшее: -3; наименьшее $-4,625$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

5-004

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin 5x \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

$\sin\alpha \sin\beta = \dfrac{+\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2}$

$\dfrac{\cos 2x}{2} - \dfrac{\cos 7x}{2} - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 = 0$

$\cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

$\cos 2x - \cos 7x - 2\sin^2 7x - 2\cos^2 x - 6 = 0$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

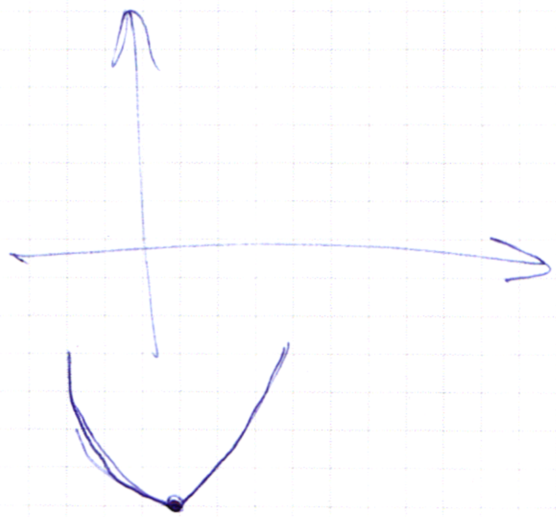
$-\sin^2 x = \cos^2 x - 1$

$2\cos^2 7x - \cos 7x - 1 - 6 - 2 = 0$

$\cos 7x = t$

$f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sqrt{AQ^2+5^2} \cdot \sqrt{BK^2 \cdot 5^2} = \sqrt{42}$

$AQ^2 \cdot BK^2 + 25AQ^2 + 25BK^2 =$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

5-004
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5. $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$

ОДЗ : $\sqrt{x+3} - x > 0$ $\quad \sqrt{x+3} > x \quad x+3 > x^2 \quad x^2 - x - 3 < 0$

$x \geq -3$ $\quad \sqrt{x+3} - x \neq 1 \quad \sqrt{x+3} \neq 1+x \quad x+3 \neq 1 + x^2 + 2x$

$x^2 + x - 2 \neq 0$

$\cancel{D=1}$ $x_1 = -2 \quad x_2 = 1$

$x^2 - x - 3 < 0$

$D = 1 + 12 = 13$

$x_1 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$

$x_2 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$

$\frac{1-\sqrt{13}}{2} \quad \frac{1+\sqrt{13}}{2}$

ОДЗ: $x \in \left(-3; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) / \{-2; 1\}$

$\begin{cases} \sqrt{x+3} - x > 1 \\ x+5 \geq \sqrt{x+3} - x \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} \sqrt{x+3} - x < 1 \\ x+5 \leq \sqrt{x+3} - x \end{cases}$

$\begin{cases} \sqrt{x+3} > 1+x \\ 2x+5 \geq \sqrt{x+3} \end{cases}$ $\qquad \sqrt{x+3} < 1+x$ $\quad 2x+5 \leq \sqrt{x+3}$

$1+x<0$
$x \leq -1$
$2x+5<0$
$x < -\frac{5}{2}$

$\begin{cases} x+3 > x^2+2x+1 \\ 4x^2 + 25 + 20x \geq x+3 \end{cases}$

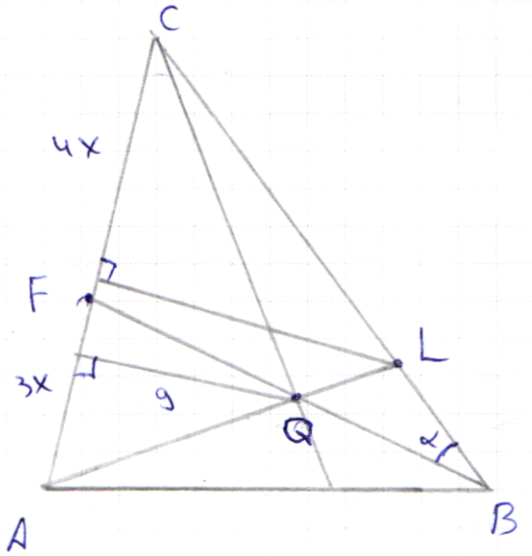
$\begin{cases} x^2 + x - 2 < 0 \\ 4x^2 - 19x + 22 \geq 0 \end{cases}$

$4x^2 - 19x + 22 \geq 0$ $\quad x \in \left(-\infty; \frac{11}{4}\right] \cup \left[\frac{11}{4}; +\infty\right)$

$\frac{19}{4} \quad \frac{22}{4}$ $\quad \left(\frac{11}{4}; 2\right)$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



$\frac{AQ}{AL}$ - ?

$\frac{S_{BQL}}{S_{ABC}} = \frac{1}{16}$

$\frac{S_{BFC}}{S_{BFA}} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{S_{CFB}}{S_{BAC}} = \frac{4}{7}.$

$\frac{S_{BQL}}{S_{CFB}} = \frac{7}{64}$ $\frac{S_{BQL}}{S_{BFA}} = \frac{7}{48}$

$\frac{BL \cdot BQ}{BF \cdot BC} = \frac{7}{64}$ $\frac{S_{FCLQ}}{S_{ABC}} = \frac{4}{7} - \frac{1}{16} =$

$= \frac{64-7}{7 \cdot 16} = \frac{57}{112}.$

$\frac{S_{AFQ}}{S_{CFQL}} =$

7. $\forall$ a_i и a_j нет одинаковых остатков

25 чисел – все разные остатки

$a_i \in 35m + \alpha$

$a_k = 35s + p_k$

$35(5+10+15+20+25) + p_1 + \ldots + p_{25} =$

$= 35 \cdot 75 + 0 + \ldots + 25 = 35 \cdot 75 + \frac{25 \cdot 26}{2} = 25 \cdot 105 + 25 \cdot 13 = 25($

$25 \cdot 118.$

$\sin\alpha \sin\beta =$

$$\begin{array}{r} \times 25 \\ 83 \\ \hline 75 \\ 200 \\ \hline 2075 \end{array}$$

$\sin\alpha \sin\beta = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos^2\alpha + \cancel{\cos^2}\,\sin^2\beta$ $\sin 2\alpha =$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos^2\alpha -$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

5-004

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin\alpha \sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}$.

$2\sin\alpha\sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha\pm\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha\mp\beta}{2}\right)$

$\frac{1}{4} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}$ $\quad \cos^2\frac{\beta}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}$

$\sin\left(2\frac{\alpha}{2}\right)$ $\quad \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) =$ $\quad \cos\frac{\beta}{2} - \sin$

$\sin^2 30^\circ = \frac{1}{4}$ $\quad 2\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

60 60 $\sin\alpha\sin\beta =$

30 60

$2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos 15^\circ$

$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \cos 15^\circ$ $\quad \sin\alpha\sin\beta = \cancel{\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}\,\cancel{\cos} - \sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}$

$2\sin\alpha\sin\beta = \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$\sin^2\alpha =$

$\sin 2\frac{\alpha}{2}\sin 2\frac{\beta}{2} = 4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}$.

$\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right.$

$\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos\alpha\cos\beta$

$\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\,\overset{\sin}{\cancel{\cos}}\frac{\beta}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}\,\overset{\cos}{\cancel{\sin}}\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\,\overset{\sin}{\cancel{\cos}}\frac{\beta}{2}\right)$

$\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\frac{S_{AFQ}}{S_{ACL}} = \frac{AQ \cdot AF}{AC \cdot AL} = \frac{3}{7} \cdot \frac{AQ}{AC}$$

$$\frac{S_{ACL}}{S_{ABC}} = \frac{CL}{BC} = \qquad \frac{S_{ABL}}{S_{ABC}} = \frac{BL}{BC} = \frac{7}{64} \cdot \frac{BF}{BQ}$$

$$\frac{S_{ACL}}{S_{ALB}} = \frac{CL}{LI} \qquad \frac{S_{ACL}}{S_{ABC}} = 1 - \frac{7}{64} \frac{BF}{BQ} = \frac{64BQ - 7BF}{64BQ}$$

$$\frac{S_{AFQ}}{S_{QLB}} = \frac{FQ \cdot AQ}{QL \cdot QB} = \frac{S_{AFQ}}{\frac{1}{16} S_{ABC}} \Rightarrow \frac{S_{AFQ}}{S_{ABC}} = \frac{16\, FQ \cdot AQ}{QL \cdot QB}$$

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{AQ}{AL} = \cancel{\frac{Q4}{QB}} \;\; \frac{16\, FQ \cdot AQ \cdot 64BQ}{QL \cdot QB \cdot (64BQ - 7BF)}$$

$$\frac{LQ}{QA} = \frac{S_{LQB}}{S_{AQB}} \qquad \frac{FQ}{QB} = \frac{S_{AFQ}}{S_{AQB}}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta = \cos^2 \frac{\alpha+\beta}{2} - \sin^2 \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\sin 30^\circ \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\alpha \sin\beta = \underline{\sin^2 \frac{\alpha+\beta}{2}} \;\; \cos^2 \frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \frac{\sin\alpha + \cos\beta}{2}$$

~~60~~ ~~60~~ ~~60~~ · 120 60 ~~120~~ ~~180~~

$$\sin^2 60 = \cos^2 30^\circ$$

30 −30 30 90

$$-\sin 30^\circ \qquad \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}$$

$$\sin\alpha \sin\beta = 2$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{\cos}{\quad}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

5-004

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$AD+BC-AB-CD=10$

$AQ+QP+PB+BK+KL+LC-$

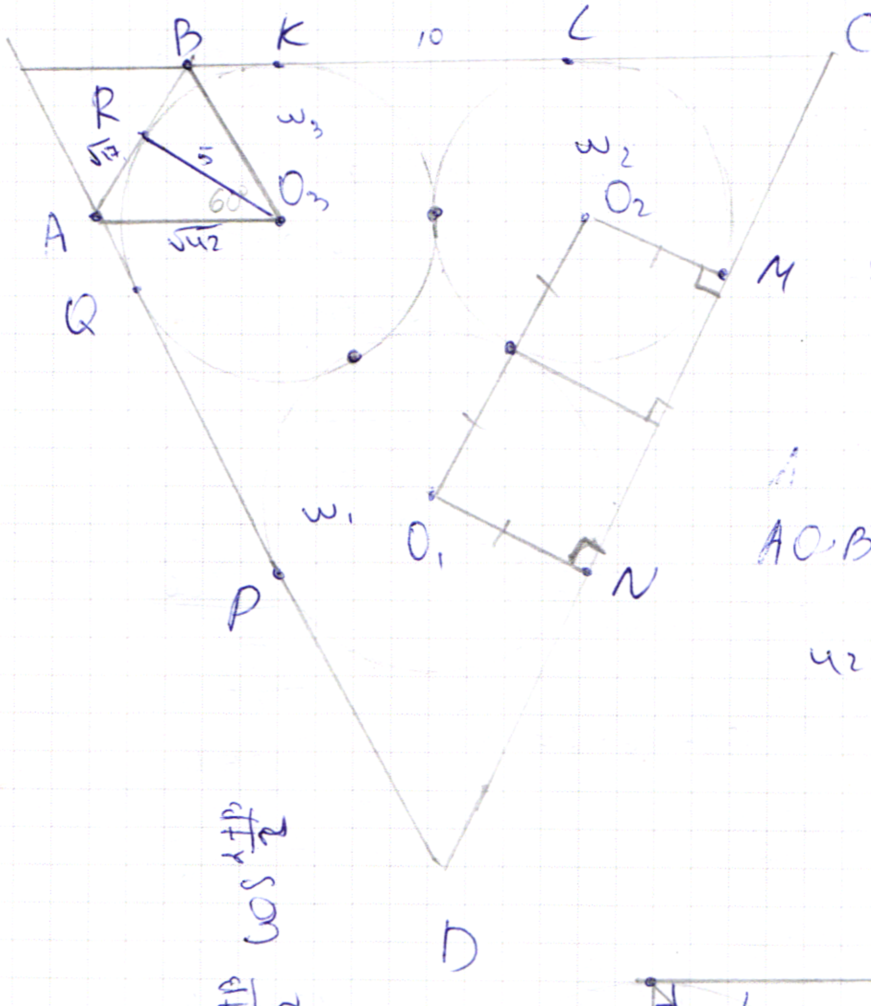
$-AR-RB-$

$-CM-MN-ND=10$

$QP+KL-MN=10$

$\cancel{KL}$

$R=5.$



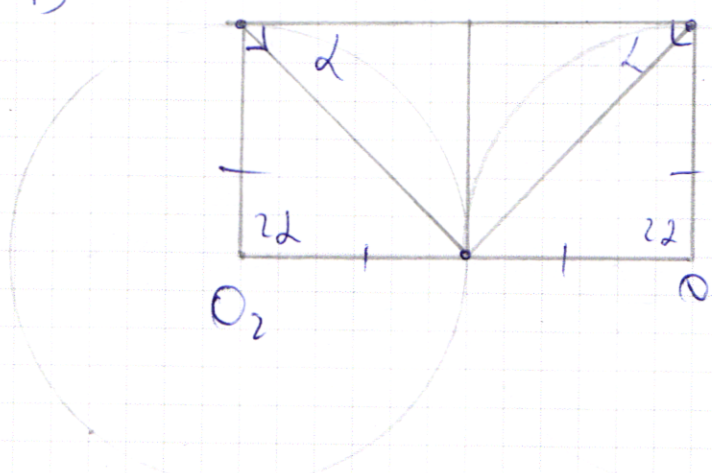
$AO \cdot BO=42$

$42-25=17$

$\sin\alpha \sin\beta =$

$\sin\alpha\cos\beta = \sin\beta\cos\alpha$

$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$



"4" "5" "4" – 6 штук – подряд
"0", "9".
"5" - 1 штука   13 дн.

I. 5   12 позиций
$2^{12} - 2$

II. 9 _ _ 12 позиций

11 позиций
$12 \cdot (2^{11} - 1)$

$2^{12} - 2 + 2^{12} \cdot 6 - 12$

$2^{12} \cdot 7 - 14$.

$(4\sqrt{6} - 4)^2$

$8\sqrt{6} - 8$

66

$y_1 = \frac{-16 + 16\sqrt{6}}{2}$

$y^2 + 16y - 320 = 0$

$D = 256 + 4 \cdot 320 =$

$= \cancel{4 \cdot 64} \, 256(1+5) =$

$= 256 \cdot 6$.

$y = x^2$

$y = 169$

$y = 64$

$y = a$

13 ; −13

13;

26

16

$\frac{a}{2}$ a

$\frac{c^2}{4}$

$a^2 +$

$\alpha = 120°$ a, b, c

$a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = c^2$

$\boxed{a^2 + b^2 + ab = c^2}$

$26^2 + 16^2 + 26 \cdot 16 = x^2$

$\begin{array}{r} \times 26 \\ 16 \\ \hline 156 \\ 26 \\ \hline 416 \end{array}$

$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$.

$\frac{\sqrt{39 \cdot 16 \cdot 2}}{2}$

312.

$\begin{array}{r} \times 26 \\ 26 \\ \hline 156 \\ 52 \\ \hline 576 \\ + 256 \\ \hline 832 \\ + 416 \\ \hline 1248 \end{array}$

$\begin{array}{r|l} 1248 & 4 \\ 312 & 4 \\ 78 & 2 \\ 39 & \end{array}$

$\sqrt{3\cancel{4}\cancel{78}8}$