МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1

ШИФР 13-003

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры “0”, “7” и “8” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “8” ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1;45]$, $[46;90]$, $[91;135]$, $[136;180]$, $[181;225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

13-003

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$y=2x^2$

$y=98$

$y=18$

$y=a$

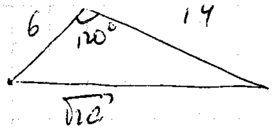
1) Посчитаем длины отрезков

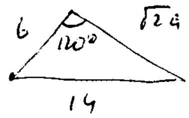
$2x^2=98 \Rightarrow x=\pm7 \Rightarrow l_1=14$

$2x^2=18 \Rightarrow x=\pm3 \Rightarrow l_2=6$

$2x^2=a \Rightarrow x^2=\frac{a}{2} \Rightarrow l=2\cdot\sqrt{\frac{a}{2}}=\sqrt{2a}$

2) Т.к. $6<14 \Rightarrow$ один катет длиной 6 $\Rightarrow$ далее возможно 2 варианта: катет 14 ~~...~~ (не лежит против $120°$) или катет 14 ~~...~~ (лежит против $120°$) (Δ - тупоугольный) $\Rightarrow$

1) 

2) 

Далее воспользуемся Т. cos

$2a = 36+196+\cancel{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot6\cdot14$

42

$a = 18+98+3\cdot14$

$a = 158$

$\overset{160}{196} = 36+2a+\cancel{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2a}\cdot6$

$\sqrt{2a}=t \Rightarrow t>0$

$t^2+6t-160=0$

$t_{1,2}=10; -16$

$\Rightarrow \sqrt{2a}=10 \Rightarrow 2a=100$

$\Rightarrow a=50$

Ответ: $a=158; 50$

№2.

$g(x) = \sin3x\cdot\sin7x-\sin^2x+\cos^2 5x+4$;

$\sin\alpha\cdot\sin\beta = -\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right]$

$\Rightarrow \sin3x\cdot\sin7x = \frac{1}{2}\cos4x-\frac{1}{2}\cos10x$; $\cos10x = 2\cos^2 5x-1$

$\cos4x = 2\cos^2 2x-1$

$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}\left(2\cos^2 2x-\cancel{1}\right)-\frac{1}{2}\left(\cancel{2\cos^2 5x}-\cancel{1}\right)-\sin^2x+4+\cancel{\cos^2 5x}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1

(Нумеровать только чистовики)

$g(x) = \cos^2(2x) - \sin^2(x) + 4$

$\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

$g(x) = \cos^2(2x) + \dfrac{\cos 2x - 1}{2} + 4$

$g(x) = \cos^2(2x) + \dfrac{\cos 2x}{2} + 3\frac{1}{2}$

$2g(x) = 2\cos^2(2x) + \cos 2x + 7$; $\cos 2x = t \Rightarrow t \in [-1;1]$

$2g(t) = 2t^2 + t + 7$

$t_в = -\frac{1}{4} \Rightarrow 2g_{наим} = 2g(-\frac{1}{4}) = 2\cdot\frac{1}{16} - \frac{1}{4} + 7 = 7 - \frac{1}{8} = \frac{55}{8}$

$\Rightarrow g_{наим} = \frac{55}{16} = g$ наим

$2g_{наиб} = 2g(1)$ (наиболее удален от вершины) $= 2+1+7 = 10$

$\Rightarrow g_{наиб} = \cancel{10}\ 5 = g$ наиб $\Rightarrow$

$\frac{55}{16} \le g(x) \le 5$; $\frac{55}{16} = 3\frac{7}{16}$

Ответ: $\cancel{g(x) \in [\frac{55}{16} ; 5]}$ $3\frac{7}{16} \le g(x) \le 5$

№3.

$\underbrace{- - - \dots - - -}_{17}$

1) Возьмем ряд из 7 "8" => останется 10 чисел
⇒ 11 способов поставить ~~ряд~~ ряд из "8" (числа-перегородки)

2) Т.к. надо, чтобы "0" и "7" встречались поставим их в оставшиеся места. Мест − 10 ⇒ Положим что сначала ставим "7" ⇒ 10 способов для 7 и 9 для "0" (можно и наоборот) ⇒ способов поставить "0" и "7" 90 (для случая, когда "8" стоят на нулевой позиции) или мест №6.

3) У нас осталось 8 мест ~~куда~~ в 7 из которых мы можем (но 0 не может быть на 1 месте) поставить или 0 или 7 ⇒ $\underbrace{2\cdot 2 \cdot\ldots\cdot 2}_{8}$ вариантов или 2^8.
Заметим, что все шаги − независимы ⇒ общее число комбинаций − ~~их произведение~~ произведение ⇒ всего $11\cdot 90\cdot 2^8$ ⇒ ~~...~~ $= 990\cdot 256 =$
$= 245\,340$ чисел.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

13-003

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$

$\Rightarrow$ имеем 2 условия

~~$x+4 \geq \sqrt{x+7}-x$ при $\sqrt{x+7}-x > 1$~~

~~$2(x+2) \geq \sqrt{x+7}$~~

~~$4(x^2+4x+4) \geq x+7$~~

~~$\begin{cases} 4x^2+15x+9 \geq 0 \\ \sqrt{x+7} > 1+x \end{cases}$~~

$\sqrt{x+7} > 1+x$

$\Rightarrow x \in [-7; 2]$

$4(x^2+4x+4) \geq x+7$ $x \geq -2$

$4x^2+15x+9 \geq 0$

$D = 225 - 16 \cdot 9 = 81$

$x_{1,2} = \frac{-15 \pm 9}{8} = -\frac{3}{4}; -3$

~~$-\frac{6}{8} < \frac{-15+\sqrt{11}}{8} < -\frac{3}{8}; \frac{24}{8} < \frac{-15-3\sqrt{11}}{8} < -\frac{24}{8}$~~

~~$\Rightarrow x\left[\frac{-15-3\sqrt{11}}{8}; \frac{-15+3\sqrt{11}}{8}\right]$~~ $\Rightarrow x\left[-\frac{3}{4}; 2\right)$

~~$\Rightarrow$ с ОДЗ $x\left[\frac{-15-3\sqrt{11}}{8}; -3\right) \cup \left(-3; \frac{-15+3\sqrt{11}}{8}\right)$~~

~~$\Rightarrow x\left[-2; \frac{-15+3\sqrt{11}}{8}\right)$~~

~~$\Rightarrow \begin{cases} x\left[-4; \frac{-15-3\sqrt{11}}{8}\right] \cup \left[\frac{-15+3\sqrt{11}}{8}; 2\right] \\ x \geq -2 \end{cases}$~~

$x+4 \leq \sqrt{x+7}-x$

при $0 < \sqrt{x+7}-x < 1$

$\Rightarrow x\left(2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

$2(x+2) \leq \sqrt{x+7}$

$\left[\begin{array}{l} 4x^2+15x+9 \leq 0 \quad \left[-\frac{3}{4}; -3\right] \\ x[-4; -2] \end{array}\right.$

$\varnothing$

ОДЗ:

$\sqrt{x+7}-x \neq 1$

$x > -4$

$\sqrt{x+7}-x > 0$

$x+7 \neq x^2+2x+1$

$\Rightarrow x^2+x-6 \neq 0$

$x \neq -3; 2$ $x > -5$

$\sqrt{x+7} > x$

$\left[\begin{array}{l} x[-7; 0) \\ \begin{cases} x > 0 \\ x+7 > x^2 \end{cases} \end{array}\right.$

$\Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x[-7; 0) \\ \begin{cases} x^2-x-2 < 0 \Rightarrow x\left[0; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) \\ x \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \\ x \neq -3; 2 \\ x > -4 \end{cases}$

$\Rightarrow$ ОДЗ

Ответ: $x\left[-\frac{3}{4}; 2\right)$

~~Ответ: $x\left[\frac{-15+3\sqrt{11}}{8}; 2\right]$~~

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

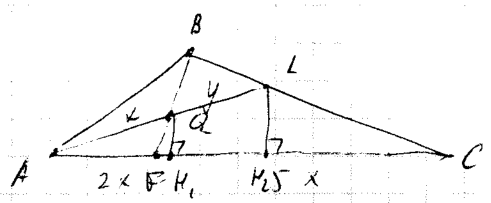
Страница № 3

(Нумеровать только чистовики)

№6.

$S_{ABC} = S_1$

$\Rightarrow S_{BQL} = \frac{5}{12} S_1$



1) $S_{BQL} = S_1 \cdot \frac{BL}{BC} \cdot \frac{QL}{AL} = \frac{5}{12} S_1$

2) Т. Менелая для $\triangle ALC$ $\frac{5}{2} \cdot \frac{AQ}{QL} \cdot \frac{BL}{BC} = 1 \Rightarrow \frac{AQ}{QL} \cdot \frac{BL}{BC} = \frac{2}{5}$

$$\begin{cases} \frac{BL}{BC} \cdot \frac{QL}{AL} = \frac{5}{12} \\ \frac{AQ}{QL} \cdot \frac{BL}{BC} = \frac{2}{5} \end{cases} (:) \Rightarrow \frac{AQ}{QL} \cdot \frac{AL}{QL} = \frac{2}{5} \cdot \frac{12}{5} = \frac{24}{25} \Rightarrow$$

Пусть $AQ = x$ $QL = y \Rightarrow \frac{x(x+y)}{y^2} = \frac{24}{25}$

$\Rightarrow 25x^2 + 25xy - 24y^2 = 0$

$D = 25^2 y^2 + 25 \cdot 24 \cdot 4 y^2 = y^2 \cdot 25 (25 + 96) \Rightarrow \sqrt{D} = 5y \cdot 11 = 55y$

$x_{1,2} = \frac{-25y \mp 55y}{50} \Rightarrow x = \frac{3}{5} y$

3) Заметим, $\triangle AQH_1 \sim \triangle ALH_2$

$AQ = \frac{3}{5} y \Rightarrow AL = \frac{8}{5} y \Rightarrow k = \frac{8}{3} \Rightarrow LH_2 = 16$

Ответ: $\rho(L; AC) = 16$

№7.

Число можно представить в виде $45q + r$, r – остаток от деления числа на 45 (r $[0; 44]$). Мы же условно будем считать, что если число $\vdots 45 \Rightarrow r'$ (остаток от деления) $= 45 \Rightarrow r' [1; 45]$, $r' \in \mathbb{N}$;

$\Rightarrow$ представим числа в виде $45q_1 + r_1'$, ..., $45q_6 + r_6'$, где q зависит от чисел $q [0; 4]$, $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;

1) По условию $r_1' \neq r_2' \neq \ldots \neq r_6'$, а $\Rightarrow \sum_{i=1}^{i=6} 45q_i + r_i'$ – наименьшая, учитывая, что в каждом промежутке есть каждый r' (от 1 до 45) $\Rightarrow$ Σ не зависит от выбранного промежутка;

· Сделаем следующее: сначала посчитаем наименьшую $\sum_{i=1}^{i=6} r_i'$, а

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$D = 64 + 27 \cdot 24 \cdot 4$~~

~~$D = 27 \cdot 45 \cdot 45 + 29 \cdot 24 \cdot 4$~~

Затем наименьшую $\sum_{i=1}^{6} 45 q_i \Rightarrow$ т.к. $r' [1;45]$ и $r_1' \neq \ldots \neq r_6'$ возьмем первые ~~...~~ 6 чисел $\Rightarrow \sum_{i=1}^{6} r_i' = 1+2\ldots+6 = \frac{1+6}{2} \cdot 6 = 21$)

2) По принципу Дирихле 2 числа попадут в 1 промежуток, а т.к. сумма наименьшая, они попадут в I промежуток $\Rightarrow$

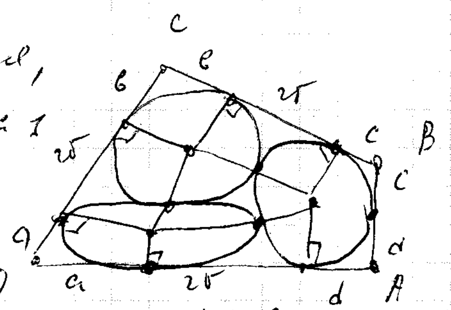
$\sum_{i=1}^{6} 45 q_i = 0+0+\cancel{...}+45+90+135+180 = \cancel{...} 450 \Rightarrow$ (270, 180)

Наименьшая возможная сумма чисел 471, например

$1+2+48+94+140+186$

№4.

1) Если окружности касаются, то их центры лежат на 1 прямой (a) с точкой касания



2) R окружностей равны $\Rightarrow$ при их касании их отрезки касательных и a (ил 1) $\Rightarrow$

3) Как мы знаем отрезки кас., проведенные из 1 точки $= \Rightarrow$,

$AB = c+d$; $CB = c+b+2r$; $DC = b+a+2r$; $DA = a+d+2r$,

по усл: $AB + BC - AD - CD = 12 \Rightarrow$ ~~$a+d+2r+c+b+2r-c-d$~~ $-b-a-2r=2r$

$\Rightarrow 2r = 12 \Rightarrow r = 6$

№3

3) если "7" стоит не на нулевой позиции, остальные расстановки произвольны => случае (выбираем место для 7, 8, расставляем)

$10 \cdot 9 \cdot 2^8$; 2^8 для остальных т.к. 8 позиций, на каждой либо "0" либо "1" ;

4) если "8" стоит не на нулевой позиции => на нулевой позиции (не 0) стоит "7" => способов выбрать место для "8"

9, остальные расстановки произвольны =>

10 (мест для "8") $\cdot 9 \cdot 2^8$

=> всего $2 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 2^8 = 46080$

~~если "8" стоит не на нулевой позиции => будем привязывать~~

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 6

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

13-003

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+1) \geq 1$

$\sqrt{x+7} \geq 1+2x+x^2$

$\Rightarrow [-7 | 2]$

$2(x+2) \geq \sqrt{x+7}$

$4x^2+15x+9 \geq 0$

$90+54$

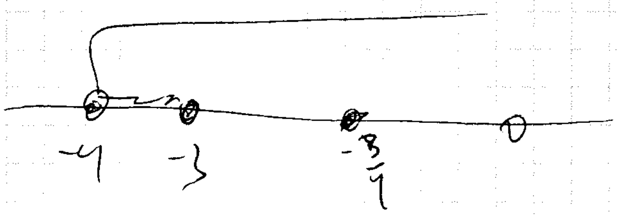
$D = 225 - 16\cdot 9$

144

$81 = 9^2$

$x_{1,2} = \frac{-15 \pm 9}{8}$

$x_{1,2} = -\frac{6}{8} \mid -3$



$-\frac{6}{8}$ 5

$\Rightarrow \frac{5}{4} \geq \frac{5}{2}$

$\sqrt{x+7}-x \neq 1$

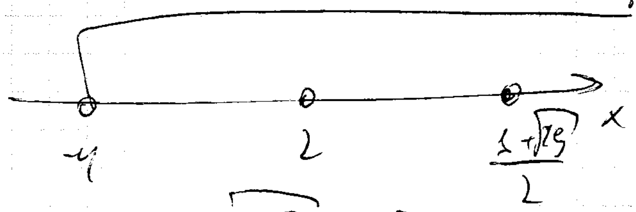
$x+7 \neq x^2+2x+1$

$\sqrt{x+7}-x<1$

$(2; \frac{1+\sqrt{29}}{2})$

$x^2+x-6=0$

2



$\sqrt{x+7}-x>0$

$x>0$

$x+7>x^2$

$x^2-x-7<0$

$D = 1+28=29$

$x_1 x_2 = \frac{1+\sqrt{29}}{2}$

$2+3=5$

$\frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 10x$

$\cos^2 2x + \frac{\cos 4x - 1}{2} + 4$

$2\cos^2 2x - \cos 4x + 7$

$2t^2+t+7$

$t_0 = -\frac{1}{4}$

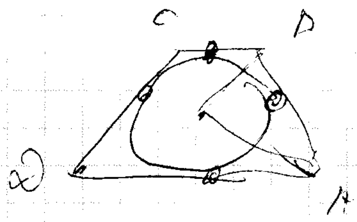
$\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + 7 =$

$\frac{55}{8}$

$\frac{55}{16}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)



8

$10 \cdot 5 \cdot 2^7 + 10 \cdot 90 \cdot 2^7$

7

40.

180

44
1256
16
2048
+2560
4608

44
256
18
2048
+2560
4667

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

13-003

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\lg_{\sqrt{x+7}+x}|x+4| \geq 1$

$\sqrt{x+7}+x \geq 3$

$4(x^2+4x+4) \geq x+7$

$4x^2+15x+9 \geq 0$

$-15 \quad 26$

$D = 225 - 16 \cdot 9$ 126

$x-2 \geq x^2+2x+3$

$x^2+x+8 \geq 0$

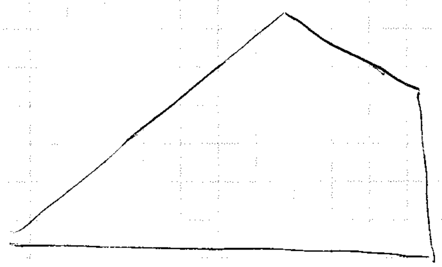
$D<0$

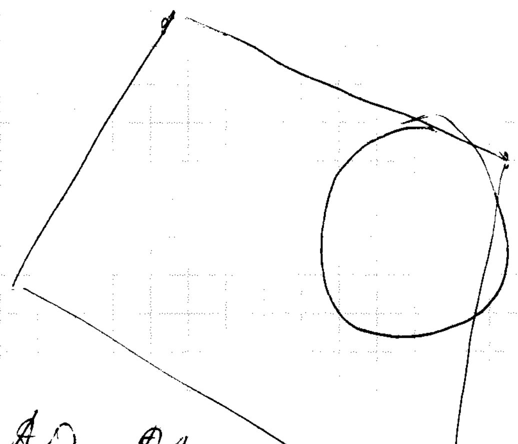
$\sqrt{x+7}-x>0$

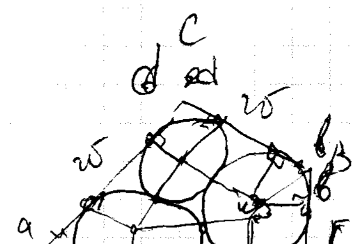
$\sqrt{x+7}>x$

$x+7>x^2$ $x \geq -3$ $x>0$ $x>7$

$x^2-x-7 \geq 0$

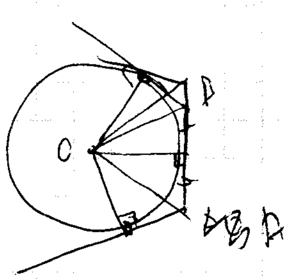






$AD+BC$

$AD+BC-AB-CD=12$



$AB=b+c$

$AD=25+c+a$

$DC=a+d+25$

$CB=25+d+b$

$\Rightarrow 4r=12$

$r=3$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sqrt{x+7} - x > 5$

при $x \in (-7; -3) \cup (2;$

$\sqrt{x+7} > 5+x \qquad x \in [-7 -5]$

$\cancel{x+7 > x^2} \qquad x+7 > x^2+2x+3 \qquad x \geq -5$

x^2+x

$4x^2+15x+5 \geq 0$

$D = \cancel{25-7} 15\cdot 15 - 16\cdot 5 = 225-126 = 99$

$x_{1,2} = \frac{-15 \pm 3\sqrt{11}}{8} \qquad \frac{-15-12}{8}$

$-4 < \frac{-15-3\sqrt{11}}{8} < -3 \qquad < \frac{-15+3\sqrt{11}}{8} < -\frac{3}{8}$

$2(x+2) \geq \sqrt{x+7} \qquad 2(x+2) \geq \sqrt{x+7} \qquad x \geq -2$

$4x^2+16x+16 \geq x+7$

$4x^2-5x+8 \geq 0$

$1\ \ \ 225$
-126
$\overline{\ \ 99}$

$\boxtimes$ черновик $\square$ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

13 - 003

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$

$x > -4$

$x+7$

$\sqrt{x+7}-\cancel{x} > 1$

$x+4 \geq \sqrt{x+7}-x$

$2x+4 \geq \sqrt{x+7}$ $\quad x \geq -2$

$4x^2$

$\sqrt{x+7}-x > 0$

$\sqrt{x+7} > x$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\ [-7; 0] \\ x^2-x-7 > 0 \end{array}\right. \\ x > -4 \end{cases}$

$\sqrt{g(x)} > f(x)$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq f^2(x) \end{cases} \end{array}\right.$

$x+7 = x^2+2x+1$

$x^2+x-6=0$

$D = 1+24$

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = -3; 2$

$\frac{1-\sqrt{25}}{2}$ $\quad \frac{1+\sqrt{25}}{2}$

$\Rightarrow x \in [-4; \frac{1+\sqrt{27}}{2})$

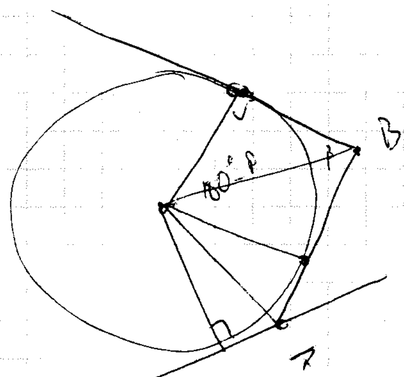
$x = -3; 2$

$x^2-x-7>0$

$D = 1+28 = 25$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2}$

$6 \quad \sqrt{24} > 5$



$180 - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\alpha$

$= 360^\circ - \beta - \alpha$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$\sin\alpha \sin\beta = -\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right]$ $\qquad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

$g(x) = -\frac{1}{2}\cos 10x + \frac{1}{2}\cos 4x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

$\cancel{g(x)} = \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$

$g(x) = -\frac{1}{2}(2\cos^2 5x - 1) + \cancel{\frac{3}{2}}$ $\qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

$g(x) = \cancel{-\cos^2 5x} + 4\frac{1}{2} + \cancel{\cos^2 5x} - \sin^2 x$

$g(x) = \frac{1}{2}\cos 4x - \sin^2 x + 4\frac{1}{2}$

$g(x) = \frac{1}{2}(2\cos^2 2x - 1) + \frac{\cos 2x - \cancel{1}}{2} + 4\cancel{\frac{1}{2}}$

$\cos^2 2x + \frac{\cos 2x}{2} + 3\frac{1}{2}$

$2g(x) = 2\cos^2 2x + \frac{\cos 2x}{\cancel{2}} + 7$ $\qquad t = \cos 2x \Rightarrow$

$t \in [-1;1]$

14
40

$2g(x) = 2t^2 + t + 7$

$t_0 = -\frac{1}{4} \Rightarrow 2g_{наим} = 2g(-\frac{1}{4}) = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + 7 = 6\frac{7}{8} =$

5

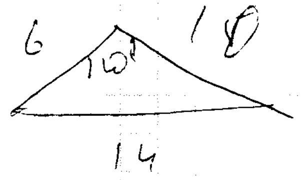
g: (удаление от верш.) $\Rightarrow$ $= \frac{55}{8} \Rightarrow g_{наим}\ \frac{55}{16}$

$2g(1) = 2 + 1 + 7 = 10 \Rightarrow$ 5

12
12

$\log_{\frac{1}{2}} b \geq 1$

$196 = 36 + 100 + 60$



$\cancel{36 + 30}$

$36 + 100 + 60$

316

$11 \cdot 90 \cdot 2^8$ $\qquad 2^8 = 256$

$990 \cdot 256$

$\cancel{99}\ 115$
$\cdot 256$
55
2294
2240
245340

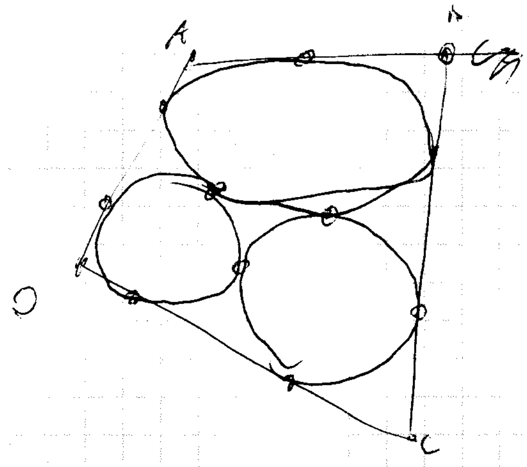
☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

№4,

$R_1 = R_2 = R_3$

$AD + BC - AB - CD = ...$



⇒ числа имеют вид.

$a_1 q_1 + r_1$

$\vdots$ где $r_1 + r_2 ... + r_6$

$a_6 q_6 + r_6$

заметим 99 определяется промежутком ⇒ числа имеют вид

$a_1 q_1 + r_1$

$0 + r_1$ 45k — опр. выбор промежутка, ясно, что надо брать из 5 промежутков

$45 + r_2$

$\vdots$

$180 + r_5$

, где $\sum$ $0 + 45 + ... + 180$ постоянна

⇒ $r_1 + r_2 ... + r_6$ — наименьшая

заметим, что $r \neq 0$ т.к. число $\equiv 0\ (45)$ стоит в конце ряда ⇒ будем считать, что если $r \equiv 0\ (45)$ ⇒ $r = 45$ ⇒ сумма чисел вида

~~1+1 ... +6~~

⇒ $1 + 2 + 48 + 94 + 140 + 186 = 720$

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 45 + 90 + 135 + 180 = 567$

4 180 450

№ 6

$S(BQL) : S(BAC) = 5:12$

$\rho(L; AC)$

$\rho(Q; AC) = 6$

$S_\triangle BFC = \frac{5}{7}$ ABC

$S \triangle ABF = \frac{2}{7}$ AB

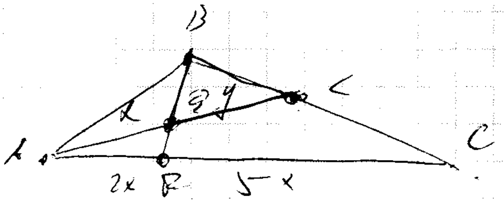
$\frac{AQ}{QC}$ or $\frac{AQ}{AC}$

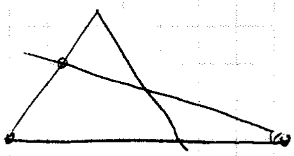
$S_{BLA} = S \cdot \frac{BL}{BL+LC}$

$S_{BQL} = S_{BLA} - S_{QAL}$

$S_{BQL} = S_{BAL} \cdot \frac{QL}{QL+AQ}$

$\Rightarrow S_{BQL} = \left(S \frac{BL}{BL+LC}\right)\frac{QL}{AQ+QL} = S \cdot \frac{BL \cdot QL}{(BL+LC)(AQ+QL)}$





По менелаю:

$\frac{CL}{LB} \cdot \frac{BQ}{QF} \cdot \frac{2}{7} = 1$

$\frac{CL \cdot BQ}{LB \cdot QF} = \frac{7}{2}$

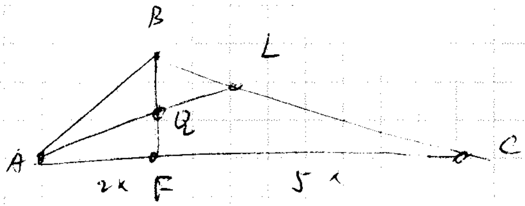
$\frac{CL}{LB} = \frac{7QF}{2BQ}$

$\frac{7}{2} \cdot \frac{AQ}{QL} \cdot \frac{BL}{BC} = 1$

$\frac{AQ}{QL} \cdot \frac{BL}{BC} = \frac{2}{5}$

$\frac{AQ}{QL} = \frac{2BL}{5BC}$

$S(BQL) = \frac{5}{12} S_1$



AQ : QL

S BQL ч.т. менелая

ALC

$S_{BQL} = S_1 \frac{BL}{BL+LC} \cdot \frac{QL}{AQ+QL}$

Т менелая для △:

1) CBF : $\frac{CL}{LB} \cdot \frac{BQ}{QF} = \frac{7}{2}$

ALC $\frac{7}{2} \cdot \frac{AQ}{QL} \cdot \frac{BL}{BC} = \frac{2}{5}$

$$\begin{cases} \frac{CL}{LB} \cdot \frac{BQ}{QF} = \frac{7}{2} \\ \frac{AQ}{QC} \cdot \frac{BL}{BC} = \frac{2}{5} \\ \frac{BL}{BC} \cdot \frac{QL}{AL} = \frac{5}{12} \end{cases}$$

$\Rightarrow \frac{BL}{BC} \cdot \frac{QL}{AL} = \frac{5}{12}$

$$2\begin{cases} \frac{AQ \cdot BL}{QL \cdot \cancel{BC}} = \frac{2}{5} \\ \frac{BL \cdot QL}{\cancel{BC} \cdot AL} = \frac{5}{12} \end{cases}$$

$\left(\frac{AQ}{QL}\right) \frac{AL}{QL} = \frac{2}{12}$

$\frac{AQ}{QL} \cdot \frac{(AQ+QL)}{QL} = \frac{1}{6}$

$\frac{x}{y} \cdot \frac{x+y}{y} = \frac{1}{6}$

$\frac{x+y}{y} = \frac{1}{6}$

$6x(x+y) = y^2$

$6x^2 + 6xy - y^2 = 0$

$D = 36y^2 + 24y^2$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

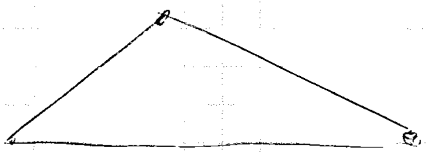
13-003

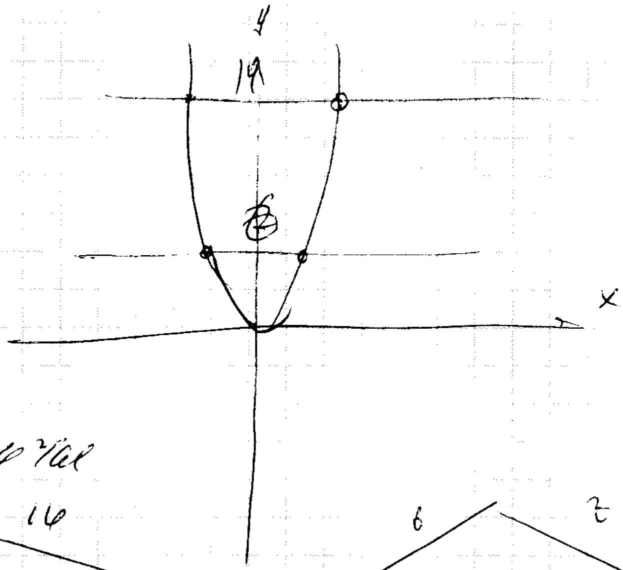
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

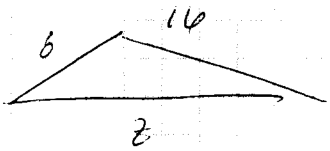


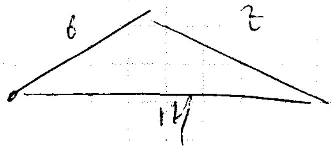


грани 6 и 14

=> (6-тупой) в 1 случае

=> 2 случая





$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$

$z^2 = 36 + 156 + 6 \cdot 7 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} =$

$156 = 36 + z^2 + 2z \cdot \frac{1}{2} \cdot 6$

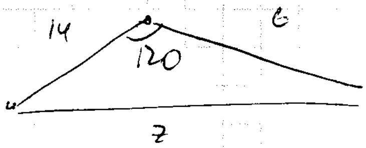
$z^2 + 6z - 160 = 0$

20 8

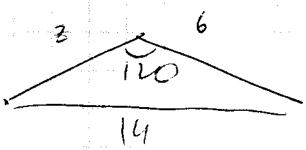
10 4

$2x^2 = 98 \Rightarrow x = \pm 7 \Rightarrow l = 14$

$2x^2 = 18 \Rightarrow x = \pm 3 \Rightarrow l = 6$



$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$



$z^2 = 196 + 36 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 \cdot 14$

232 84 120

196 + 120 = 316

316 | 2

158 | 2

79

$196 = z^2 + 36 + 6z$

$z^2 + 6z - 160 = 0$

$D/4 = 9 + 160 = 13^2$

$z_{1,2} = -3 \pm 13$

$z = 10$

$\Rightarrow x = \pm 10 \Rightarrow y^2 = 100$

$\Rightarrow 2x^2 = 200$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

№2

$y(x) = \sin 3x \sin x - 5\sin^2 x - \cos^2 3x + ?$ $E(y) = ?$

№3.

$\underbrace{\qquad\qquad}_{17}$ $0;\ 7;\ 8;$ (цифр 8 всех - порядок)

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{17}$ $\underbrace{-\ -\ -\ -\ -\ -\ -}_{8}$ ⇒ способов поставить 8

осталось 10 ⇒ 11

11 способов установить '8'

⇒ 10 позиций пронумеруем на т.к. '0' и '7' ≥ 1

⇒ выберем одну поз. для 0 - 10 способ. и 1 для 7 - 9 способов ⇒ тогда всего способов $11 \cdot 10 \cdot 9$, далее расставим 0 и 7. $\underbrace{-\ -\ -\ -\ -\ -\ -}_{8}$ на каждой может быть или ноль или 1 порядок важен ⇒ 2^8 ⇒

$11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 2^8$ способов

№5.

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 3$ ⇒

$\sqrt{x+7}-x > 1$
$x+4 \geq \sqrt{x+7}-x$
$2(x+2) \geq \sqrt{x+7}$

$0 < \sqrt{x+7}-x < 1$
$x+4 \leq \sqrt{x+7}-x$
$2(x+2) \leq \sqrt{x+7}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)