

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1

ШИФР

1-012

Заполняется ответственным секретарем

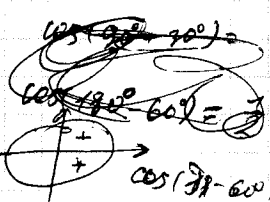
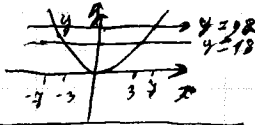
1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120° ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.
3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
 - в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB .
5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.
7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y = 98, y = 18, y = a$

$x = 7, x = 3$

$y = 2x^2, a = ? \angle = 120^\circ$

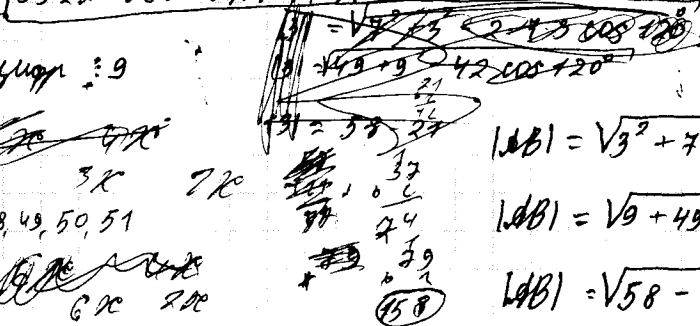


5.9 0,5, сумма цифр = 9

1, 2, 3, 4, 5, 6 = 21

46, 47, 48, 49, 50, 51

Пусть величина $\theta = t$



$|AB| = \sqrt{3^2 + 7^2 - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cos 120^\circ}$

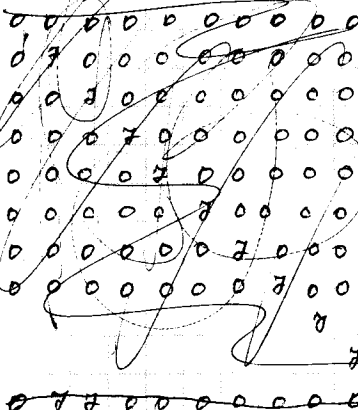
$|AB| = \sqrt{9 + 49 - 42 \cos 120^\circ}$

$|AB| = \sqrt{58 - 42 \cdot (-1)} = \sqrt{58 + 42}$

$\cos 2\alpha = \dots$

$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $\log_a b = c$



$\frac{1}{2} \cos 4x - \cos 10x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

$0,5 \cos 4x - \cos 10x - 1 + \cos^2 x + \cos^2 5x + 4$

$0,5 \cos 4x - \cos 10x + \cos^2 x + \cos^2 5x + 3$

$[1; 45] \quad 1, 2, 3, 4, 5, 6 = 21$

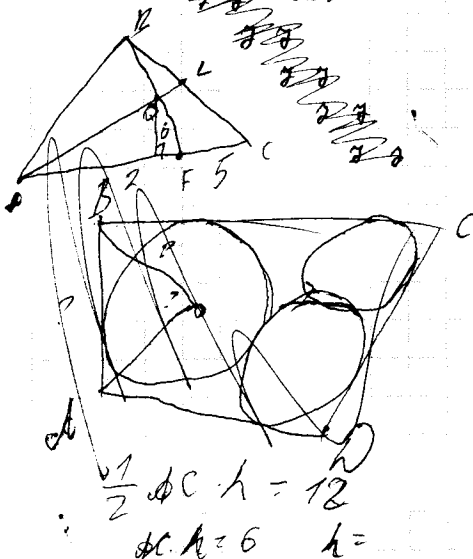
$[46; 90] \quad 46, 47, 48, 49, 50, 51 = 291$

$[91; 135] \quad 91, 92, 93, 94, 95, 96 = 465$

$[136; 180] \quad 136, 137, 138, 139, 140, 141 = 831$

$[181; 225] \quad 181, 182, 183, 184, 185, 186 = 1101$

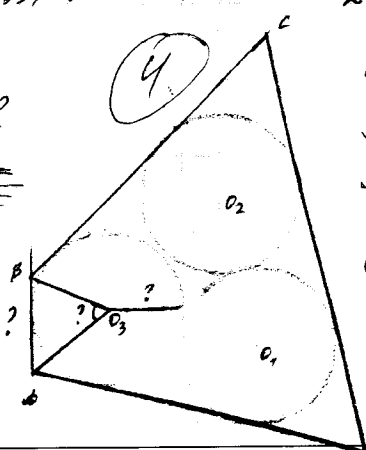
36
75
21
51
66
306
15
291
186
6
192
15
831
101
831
465
291
21
2609



$AD + BC - AB - CD = 12$

$|AD| = |BC|$

$2|AD| - |AB| - |CD| = 12$



$\cos 90^\circ = 0$

$\sin 0^\circ = 0$

$\sin 180^\circ = 0$

$\cos 0^\circ, 180^\circ = 1$

$\sin 90^\circ = 1$

$$\sin 3x \sin 4x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$$

$$\frac{1}{2}(\cos(3x-4x) - \cos(3x+4x)) - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$$

$$\frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x) - 1 + \cos^2 x + \cos^2 5x + 4$$

$$\frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x) + \cos^2 x + \cos^2 5x + 3$$

$$0,5 \cos 4x - 0,5 \cos 10x + \frac{1 + \cos 2x}{2} + \cos^2 5x + 3$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ 15 \\ \hline 30 \\ 15 \\ \hline 45 \end{array} \quad \begin{array}{r} 16 \\ 11 \\ \hline 27 \\ 16 \\ \hline 43 \end{array}$$

$$\frac{11}{4} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{3}{8} \cdot 25 = -1; -2,25$$

5. $\log_a b = c$
 $a^c = b$

$$\sqrt{x+7} - x \geq x+4$$

$$\sqrt{x+7} \geq 2x+4$$

$$x+7 \geq 4x^2 + 16x + 16$$

$$-4x^2 - 15x + x \geq 16 - 7$$

$$-4x^2 - 15x \geq 9$$

$$4x^2 + 15x \leq -9$$

$$4x^2 + 15x + 9 \leq 0$$

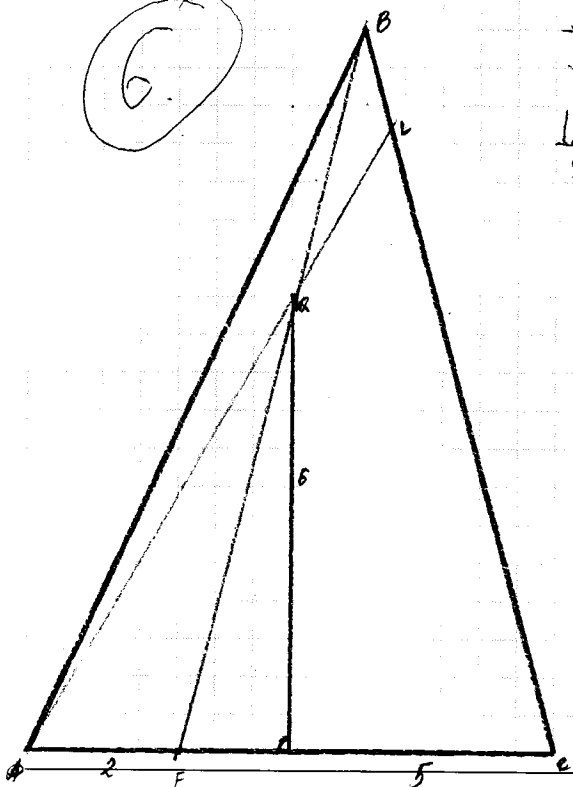
$$D = b^2 - 4ac = 225 - 4 \cdot 4 \cdot 9$$

$$= 225 - 144 = 81$$

$$D = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{-15 \pm 3}{8} = -1; -\frac{22}{8} = -2,75$$

6.



$$\frac{S_{ABC}}{S_{BAC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot h}{\frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot h_1} = \frac{5}{12}$$

$$\frac{|BC| \cdot h}{24 \cdot h_1} = \frac{10}{24}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $y = 2x^2$

$98 = 2x^2$

$49 = x^2$

$x = \pm 7$

$y = 2x^2$

$18 = 2x^2$

$9 = x^2$

$x = \pm 3$

Значит, отрезок отсекаемый на прямой равен 7 Значит, отрезок отсекаемый на прямой равен 3

Пусть третий отрезок будет обозначен $[AB]$

По т. косинусов имеем:

$$|AB|^2 = \sqrt{3^2 + 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot \cos 120^\circ}$$

$$|AB|^2 = \sqrt{9 + 49 - 42 \cdot \cos 120^\circ}$$

$$|AB| = \sqrt{58 - 42 \cdot (-\frac{1}{2})}$$

$$|AB| = \sqrt{58 + 21}$$

$$|AB| = \sqrt{79}$$

Значит, третий отрезок ~~отсекаемый~~ отсекаемый на прямой равен $\sqrt{79}$

$$y = 2x^2$$

$$y = 2(\sqrt{79})^2$$

$$y = 2 \cdot 79$$

$$y = 158$$

Значит, искомый параметр a равен 158

Ответ: $a = 158$

7. Чтобы сумма тридцати выбранных чисел была наименьшей, нужно чтобы каждое выбранное число удовлетворяло условию и являлось наименьшим в промежутке из которого оно было выбрано.

Примечание: число округляется на 0 и 5 и сумма цифр

должна делиться на 9.

Из написанного выше ^{и из условия} следует, что из каждой пятимерки нужно выбрать первые 6 целых чисел

[1; 45] Выбираем 1, 2, 3, 4, 5, 6 их сумма равна 21

[46; 90] Выбираем 46, 47, 48, 49, 50, 51 их сумма равна 291

[91; 135] Выбираем 91, 92, 93, 94, 95, 96 их сумма равна 485

[136; 180] Выбираем 136, 137, 138, 139, 140, 141 их сумма равна 831

[181; 225] Выбираем 181, 182, 183, 184, 185, 186 их сумма равна 1101

Сложим все 5 сумм: $21 + 291 + 485 + 831 + 1101 = 2609$

Ответ: 2609

2. ~~$\sin 3x \cdot \sin 7x$~~ Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции, нуж.
но её упростить и вывести её производную

$$\sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$$

$$\frac{1}{2}(\cos(3x-7x) - \cos(3x+7x)) - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$$

$$\frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x) - 1 + \cos^2 x + \cos^2 5x + 4$$

$$\frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x) + \cos^2 x + \cos^2 5x + 3$$

$$\frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x) + \frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 10x}{2} + 3$$

$$\frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x) + 0,5 + \frac{\cos 2x}{2} + 0,5 \cdot \frac{\cos 10x}{2} + 3$$

$$\frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x) + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 10x}{2} + 4 \cdot 2$$

$$\cos 4x - \cos 10x + \cos 2x + \cos 10x + 8$$

$$\cos 4x + \cos 2x + 8$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5. $\log_{\sqrt{x+7}} - x(x+4) \geq 1$

$$\sqrt{x+7} - x \geq x+4$$

$$\sqrt{x+7} \geq 2x+4$$

$$x+7 \geq 4x^2 + 16x + 16$$

$$-4x^2 - 16x + x \geq 16 - 7$$

$$-4x^2 - 15x \geq 11$$

$$4x^2 + 15x \leq -11$$

$$4x^2 + 15x + 11 \leq 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 15^2 - 4 \cdot 4 \cdot 11 = 225 - 176 = 49$$

$$x_{1,2} = \frac{-15 \pm 7}{8} = -1; -2,75$$

$$x \in [-2,75; -1]$$

$$\text{Ответ: } [-2,75; -1]$$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

2-013

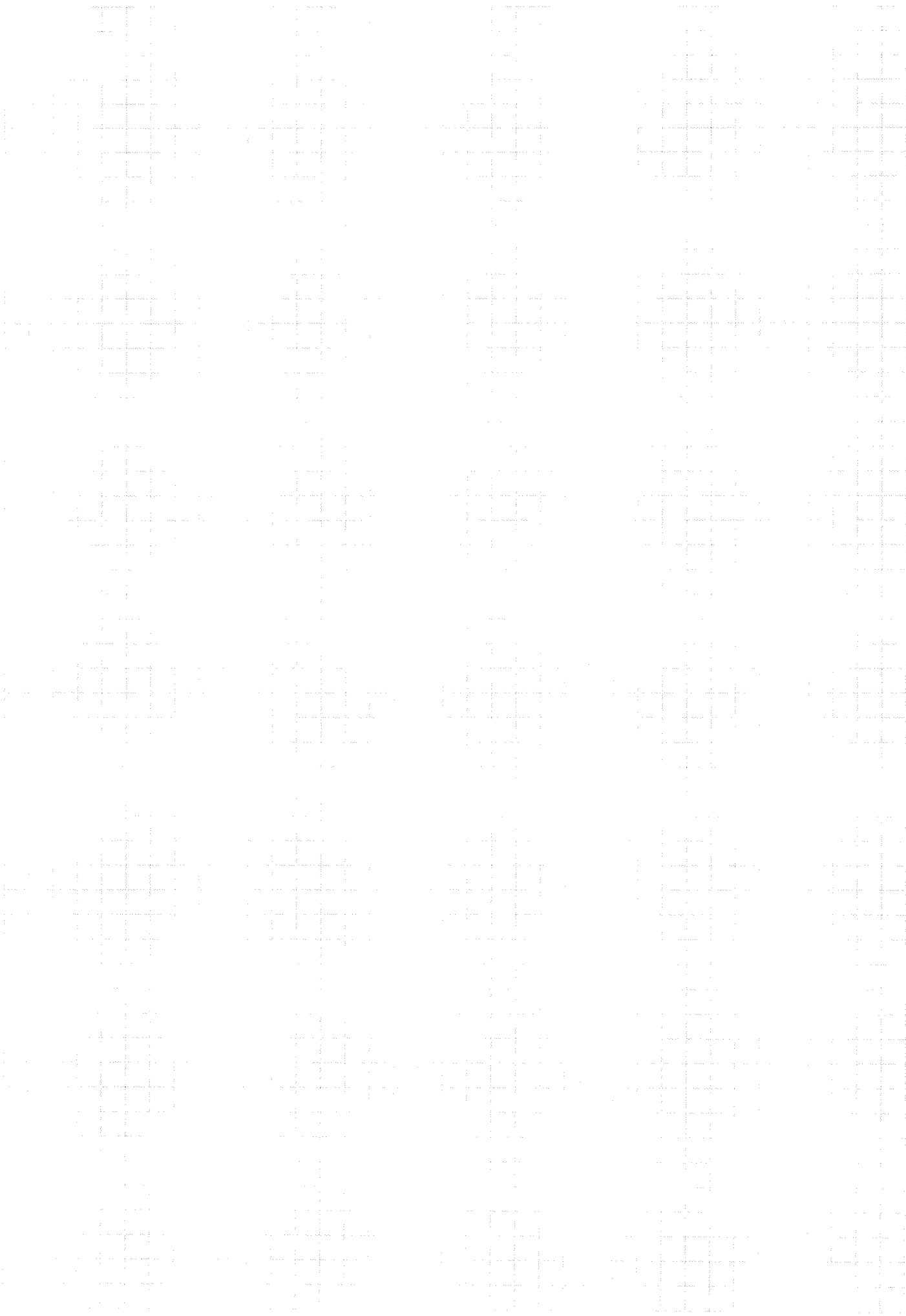
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

2-473
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)