

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2

ШИФР

15-048

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120° ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.
3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
 - в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB .
5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.
7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.) $y = x^2$ $y = 169$; $y = 64$; $y = a$
 $\angle = 120^\circ$ $a = ?$

П.к. параболы f -ция четная \Rightarrow она симметрична
относительно Oy . \Rightarrow длина отрезка вертикально
параболы равна $2\sqrt{y}$, где y - это значение вида $y = \text{const}$
 $\text{const} > 0$

2.) \Rightarrow
длина отрезков из условия
равна: 26 ; 16 ; $2\sqrt{a}$.

3) Рассмотрим 3 случая.

I случай

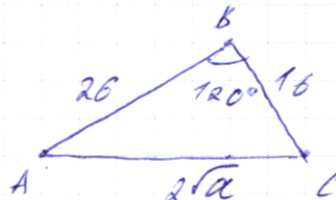
по $\vec{a} \cos$

$$4a = 26^2 + 16^2 - 2 \cdot 26 \cdot 16 \cos 120^\circ$$

$$4a = 26^2 + 16^2 + 26 \cdot 16$$

$$a = 13^2 + 8^2 + 8 \cdot 13$$

$$a = 169 + 64 + 104 = 337$$



II случай.

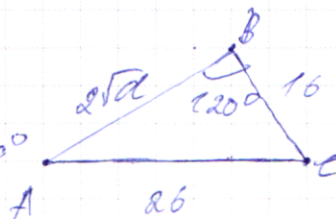
по $\vec{b} \cos$

$$26^2 = 4a + 16^2 - 2 \cdot 2\sqrt{a} \cdot 16 \cos 120^\circ$$

$$26^2 = 4a + 16^2 + 32\sqrt{a}$$

$$13^2 = a + 8^2 + 8\sqrt{a}$$

$$a + 8\sqrt{a} - 105 = 0$$



$$\sqrt{a} = t; t > 0$$

$$t^2 + 8t - 105 = 0$$

$$D = 16 + 105 = 121 = 11^2$$

$$\begin{cases} t = -4 - 11 & \text{— не подходит} \\ t = -4 + 11 & \text{— корень} \end{cases}$$

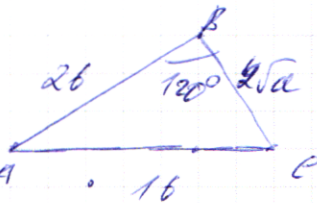
$$t = 7$$

$$\sqrt{a} = t$$

$$a = 49$$

3.)

по $\Delta \cos$



$$16^2 = 26^2 + 4a^2 - 2 \cdot 26 \cdot 4a \cdot \cos 120^\circ$$

$$16^2 - 26^2 = 4a^2 + 52a$$

$$< 0 \quad > 0 \quad \Rightarrow$$

решением нет.

=>

$$a = 33t; \quad a = 49$$

$$\text{Ответ: } \{49; 33t\}$$

$$2.) \quad g(x) = \sin 5x \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$$

$$1.) \quad \sin 5x = \sin(7x - 2x) = \sin 7x \cos 2x - \sin 2x \cos 7x$$

$$2.) \quad \sin 9x = \sin(7x + 2x) = \sin 7x \cos 2x + \sin 2x \cos 7x$$

$$\sin 5x \cdot \sin 9x = \sin^2 7x \cos^2 2x - \sin^2 2x \cos^2 7x = \sin^2 7x \cos^2 2x - (1 - \cos^2 2x)$$

$$(1 - \sin^2 7x) = \sin^2 7x \cos^2 2x - (1 - \cos^2 2x - \sin^2 7x + \cos^2 2x \sin^2 7x)$$

$$= \cos^2 2x + \sin^2 7x - 1$$

3.) =>

$$g(x) = \cos^2 2x + \sin^2 7x - 1 - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$$

$$g(x) = \cos^2 x - \sin^2 x - \cos^2 x - 4$$

$$g(x) = -\sin^2 x - 4$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

п.к. $\sin x \in [-1, 1] \Rightarrow$

$$\sin^2 x \in [0, 1] \Rightarrow$$

$$-\sin^2 x \in [-1, 0].$$

$$g(x)_{\max} = 0 - 4 = -4$$

$$g(x)_{\min} = -1 - 4 = -5$$

Ответ: $g(x)_{\max} = -4$

$g(x)_{\min} = -5.$

5.) $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$

$$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq \log_{\sqrt{x+3}-x}(\sqrt{x+3}-x)$$

$$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) - \log_{\sqrt{x+3}-x}(\sqrt{x+3}-x) \geq 0$$

из равносильных переходов \Rightarrow

$$(\sqrt{x+3}-x-1)/(x+5-\sqrt{x+3}+x) \geq 0$$

$$(\sqrt{x+3}-x-1)/(2x-\sqrt{x+3}+5) \geq 0$$

1.) $\sqrt{x+3}-x-1=0$

$$\sqrt{x+3}=x+1$$

$$x=1$$

2.) $2x+5-\sqrt{x+3}=0$

$$2(x+3)-\sqrt{x+3}-1=0$$

$$\sqrt{x+3}=k; k \geq 0$$

ОФЗ

$$\begin{cases} x+5 > 0 \\ \sqrt{x+3}-x > 0 \\ \sqrt{x+3}-x \neq 1 \\ x+3 \geq 0 \end{cases}$$

1.) $\sqrt{x+3}-x=1$

$$\sqrt{x+3}=1+x$$

$$1+x \geq 0$$

$$\begin{cases} x+3 = x^2+2x+1 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

$$x \geq -1$$

$$x^2+x-2=0$$

$$x \neq -1$$

$$x=1$$

$$x=-2 \Rightarrow$$

$$x=1$$

$$2k^2 - k - 1 = 0$$

$$\begin{cases} k = 1 \\ k = -\frac{1}{2} \text{ - рассматриваем корень} \end{cases}$$

$$\sqrt{x+3} = 1$$

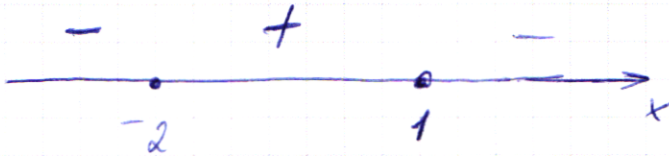
$$x+3 = 1$$

$$x = -2$$

р.к. $\sqrt{x+3} - x - 1 = f(x)$ - ϕ -функция монотонна

~~$2x+5 - \sqrt{x+3} = g(x)$~~ - ϕ -функция монотонна

\Rightarrow можно применить метод интервалов.



\Rightarrow

$$x \in [-2; 1)$$

в.ч.) (граница ОФ. 3)

$$\begin{cases} x \in [-2; 1) \\ x \in [-3; 1) \cup (1; \frac{1+\sqrt{13}}{2}) \end{cases} \Rightarrow$$

$$x \in [-2; 1)$$

Ответ: $x \in [-2; 1)$.

$$2) \sqrt{x+3} - x > 0$$

$$1) \sqrt{x+3} - x = 0$$

$$\sqrt{x+3} = x$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x+3 = x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x - 3 = 0 \end{cases}$$

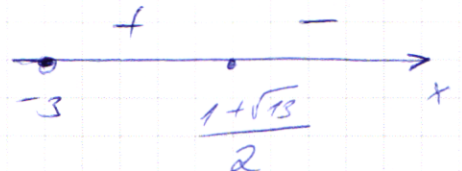
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ D = 1 + 12 = 13 \\ \begin{cases} -x = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \end{cases} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

р.к. $y = \sqrt{x+3}$ и

$$y = x$$

ϕ -функция
возрастает \Rightarrow



$$x \in [-3; \frac{1+\sqrt{13}}{2})$$

$$\begin{cases} x \neq 1 \\ x \geq -3 \\ x > -5 \\ x \in [-3; \frac{1+\sqrt{13}}{2}) \end{cases} \Rightarrow$$

$$x \in [-3; 1) \cup (1; \frac{1+\sqrt{13}}{2})$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6.) Дано:

$$FE \perp AC$$

$$LE \perp BC$$

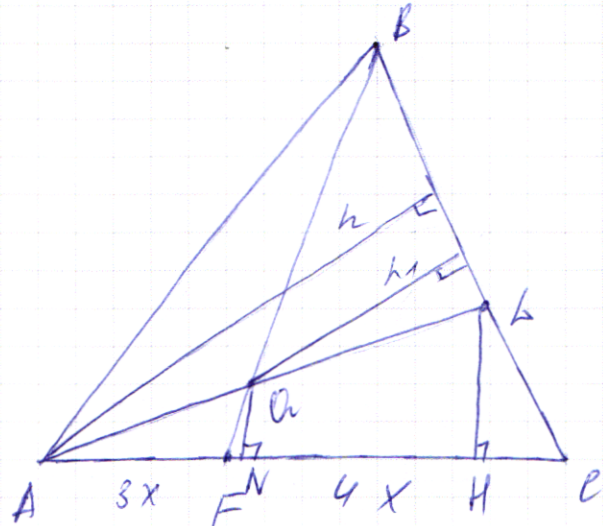
$$AF:FC = 3:4$$

$$BF \cap AL = Q$$

$$\frac{S_{BAK}}{S_{BAC}} = \frac{1}{16}$$

$$AQ = 9$$

$$LN = ?$$



Решение

1.)

$$\frac{QL}{AL} = \frac{h_1}{h}$$

$$\frac{QL}{AL} = \frac{1}{16} \cdot \frac{BC}{BL}$$

$$\frac{S_{BAK}}{S_{ABC}} = \frac{1}{16}, \quad S_{BAK} = \frac{1}{32} h \cdot BC$$

$$\frac{1}{2} BL \cdot h_1 = \frac{1}{2} h \cdot BC \cdot \frac{1}{16}$$

$$\frac{h_1}{h} = \frac{1}{16} \frac{BC}{BL}$$

2.) $\frac{AQ \cdot AF}{AL \cdot AC} = \frac{QN}{AL}$

$$\frac{QN}{AQ} = \frac{NL}{AL}$$

$$\frac{NL}{QN} = \frac{AL}{AQ} = 1 + \frac{QL}{AQ}$$

$$16 \frac{BL}{BC} = 1 + \frac{AQ}{AL}$$

$$\frac{NL}{QN} - 1 = \frac{QL}{AQ}$$

$$\left(\frac{16BL}{BC} - 1 \right) = \frac{AQ}{AL}$$

$$\left(\frac{NL}{QN} - 1 \right) \left(\frac{16BL}{BC} - 1 \right) = 1$$

$$3) \frac{4}{3} \cdot \frac{AQ}{QL} - \frac{BL}{BC} = 1 \text{ по 2 Менсаме.}$$

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{AQ}{QL} = \frac{3BC}{4BL}$$

$$\frac{3BC}{4BL} = \frac{16BL}{BC} - 1$$

$$\frac{BC}{BL} = t; t > 0$$

$$\frac{3}{4}t = \frac{16}{t} - 1$$

$$\frac{3}{4}t^2 = 16 - t$$

$$\frac{3}{4}t^2 + t - 16 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot 16 = 49 = 7^2$$

$$\left[\begin{array}{l} t = \frac{-1 - 7}{3/2} \text{ - не подходит} \\ t = \frac{-1 + 7}{3/2} = \frac{2 \cdot 6}{3} = 4 \end{array} \right.$$

$$\frac{BC}{BL} = 4$$

$$4) \left(\frac{ML}{QL} - 1 \right) \left(16 \cdot \frac{1}{4} - 1 \right) = 1$$

$$\frac{ML}{QL} - 1 = \frac{1}{3}$$

$$\frac{ML}{QL} = \frac{4}{3}$$

$$ML = \frac{4}{3} QL$$

$$ML = \frac{4}{3} \cdot 9 = 12$$

Ответ: 12.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.) Дано:

$ABCD$

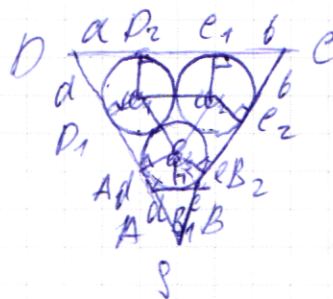
$\omega_1, \omega_2, \omega_3$

ω_1 кас. AD и DC

ω_2 кас. BC и CB

ω_3 кас. EB, BA, AD

$r_1 = r_2 = r_3 = r$



1.) r ; $AD + BC - AB - CD = 10$

2.) $\angle AOB$, O - центр ω_3

3.) $AB = ?$; $AO \cdot BO = 42$

Решение.

1.) По к. $r_1 = r_2 = r_3 = r \Rightarrow$

$$D_1 A_1 = D_2 C_1 = C_2 B_2 = 2r$$

2.) Из O двум касам. провод. из одной точки \Rightarrow

$$P_1 D = D D_2 = a; \quad P_1 C = C C_2 = b; \quad B_2 B = B B_1 = c;$$

$$B_1 A = A A_1 = d.$$

3.) $AD + BC - AB - CD = 10$

$$d + 2r + a + c + b + 2r - d - c - a - b - 2r = 10$$

$$2r = 10$$

$$r = 5.$$

4.) Продлим S , из симметрии задачи \Rightarrow

SDC - равнобедренный. $\Rightarrow \angle D = \angle C = 60^\circ$

5.) Т.ч. ABCD - ромб. \Rightarrow

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$$

$$\angle A + \angle B = \cancel{360^\circ} 240^\circ$$

Т.ч. $\angle A$ и $\angle B$ - смежные углы \Rightarrow

AO и BO - биссектрисы углов $\angle DAB$ и $\angle CBA \Rightarrow$

$$\angle OAB + \angle OBA = 60^\circ$$

$$\angle AOB = \overset{=}{180^\circ} - 120^\circ = 60^\circ.$$

$$6.) S_{AOB} = \frac{1}{2} H \cdot AB \quad H = r$$

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} AO \cdot BO \cdot \sin 30^\circ$$

$$AO \cdot BO \cdot \sin 30^\circ = r \cdot AB$$

$$42 \cdot \frac{1}{2} = 5 \cdot AB$$

$$\frac{21}{5} = AB$$

$$AB = 4,2$$

Ответ: $r = 5$; $\angle AOB = 30^\circ$; $AB = 4,2$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

случаи когда число начинается с 5
когда

555555XXXXXXXXXXXX
000000000000
999999999999

~~уменьше, но случай не~~

рассмотрим случаи, когда ведущее число
числа нечётно или чётно

Когда, чтобы во всех тех вариантах, чтобы
содержимого котлета была равна в один 9 или 0,
будет равно 11.12, тогда в при 4 других
положениях цифры на-во вариантов будет
такое же, чтобы не учитывать повторы

на-во вариантов / будет сумма

$$12 + 11 + 10 + \dots + 2 = \frac{(2+12) \cdot 11}{2} = 7 \cdot 11 = 77$$

$$12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 77$$

рассмотрим случаи, когда цифры различны
=> число будет начинаться на 9

955555... , тогда

на-во вариантов равно сумме

$$11 + 10 + 9 + \dots + 2 = \frac{(2+11) \cdot 10}{2} = 65$$

при 4 других вариантах будет такое же на-во
вариантов

Кол-во документов в 4 пакета, архив, воз
и каталогизация с метками

Кол-во в

Можно ~~предоставить~~ учесть все варианты,
сам
↓

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $y = x^2$

$y = 16g \cdot y = a$
 $y = 64$

$16g = x^2$

$x = \pm 13$

$64 = x^2$

$x = \pm 8$

$a = 26$

$b = 16$

$y \neq a \quad a = x^2 \quad c = 2\sqrt{a}$

$d = \pm \sqrt{a}$

$\log_{\sqrt{x+3}} - x(x+5) \geq 1$

$x+5 > 0$

$x \geq -3$

$\sqrt{x+3} - x > 0$

$\sqrt{x+3} - x \neq 1$

$x+3 - x^2 > 0$

$x^2 - x - 3 < 0$

$26^2 = 16^2 + 4a - 64\sqrt{a} \cos 120^\circ$

$-10 \cdot 42 + 4a + 32\sqrt{a} = 0$

21

$\sqrt{x+3} = 1+x$

$a + 8\sqrt{a} - 105 = 0$

$\frac{1+\sqrt{13}}{2} \sqrt{1}$

$1+x \geq 0$

$\sqrt{a} = t$

$x+3 = x^2 + 2x + 1$

$\sqrt{13} > 1 \quad \times \frac{24}{14}$

$x \geq -1$

$D = 64 + 420 = 484$

$x^2 + x - 2 = 0$

$\frac{D}{4} = 16 + 105 = 121 = 11^2$

$\frac{1-\sqrt{13}}{2} \sqrt{-6}$

$x = 1$
 $x = -2$

$t = \frac{-4 - 11}{2} = -7.5$

$t = \frac{-4 + 11}{2} = 3.5$

$\sqrt{a} = t$

$\neq \sqrt{13}$

$a = 49$

$p = 1 + 10 = 13$

$\frac{320}{16}$

$\frac{1-\sqrt{13}}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{13}}{2}$

$x = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$

$\frac{338}{2}$

$x = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$

$\frac{338}{2}$

$$\sin 5x = \sin 7x \cos 2x - \sin 2x \cos 7x$$

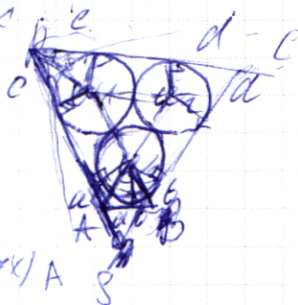
$$\sin 9x = \sin 7x \cos 2x + \sin 2x \cos 7x$$

$$\sin 5x \sin 9x =$$

$$\sin 2x \cos 2x - \sin^2 7x \cos^2 7x$$

$$= \sin 2x \cos 2x - (1 - \cos^2 7x)(1 - \sin^2 7x)$$

$$= \sin 2x \cos 2x - 1 + \cos^2 7x + \sin^2 7x$$



$$AD + BC - AB - CD = 10$$

$$a + c + 2r + d + b + 2r - a - b - c - d - 2r = 10$$

$$2r = 10$$

$$r = 5$$

$$\angle AOB = 120^\circ$$

$$\angle AOB = 60^\circ$$

$$AO \cdot BO \cdot \sin \angle AOB = r \cdot AB$$

$$4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5 \cdot AB$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{5} = AB$$

$$g(x) = \sin 5x \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 7x - 3$$

$$g'(x) = (\sin 5x \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 7x - 3)' = (\sin 5x \sin 9x)' -$$

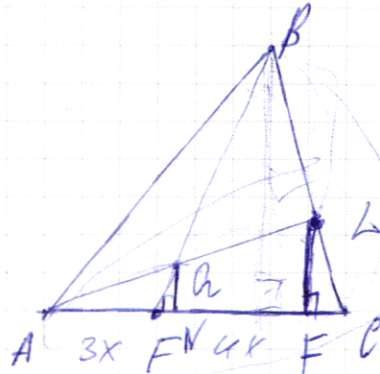
$$-(\sin^2 7x)' - (\cos^2 7x)' =$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6.)

$S(L; AC) - ?$

$$\frac{S_{BAC}}{S_{BAC}} = \frac{1}{16}$$



$QN = 9$

(+2)

0999999999

$$S_{AFQ} = \frac{1}{2} 3x \cdot 9$$

0999999999

$$S_{AFQ} = \frac{27}{2} x$$

17.18

$$\frac{S_{AFQ}}{S_{BAC}} = \frac{AQ \cdot QF}{BA \cdot AL}$$

$$h \cdot 7x = h \cdot LC$$

$$\frac{LC}{BL} \cdot \frac{BQ}{QF} = \frac{3}{7} = 1$$

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{AQ}{QL} \cdot \frac{BL}{BC} = 1$$

$$\frac{QF}{BQ} = \frac{7 \cdot BL}{3 \cdot LC}$$

$$\frac{AQ}{QL} = \frac{3 \cdot BC}{4 \cdot BL}$$

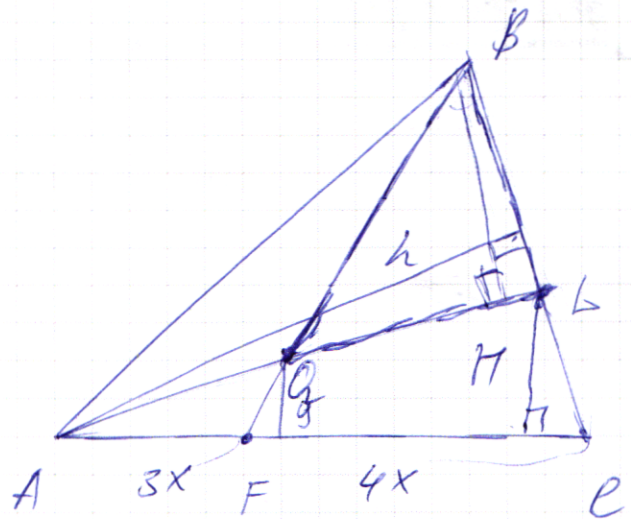
$$\frac{S_{AFQ}}{S_{BAC}} = \frac{7}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{BC}{BL} \cdot \frac{BL}{LC}$$

$$\frac{4}{7} S_{AFQ} = \frac{BC}{LC} S_{BAC}$$

$$\frac{54}{7} x = \frac{BC}{LC} S_{BAC}$$

$$= \frac{7}{4} \cdot \frac{BC}{LC}$$

$$S_{\triangle} \cdot LC = H \cdot FX$$



$$\frac{LC}{BL} \cdot \frac{BF}{AF} \cdot \frac{AF}{AC} \cdot \frac{3}{4} = 1 \quad \frac{BF}{BF} = \frac{3AC}{4BL}$$

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{AL}{AL} \cdot \frac{BL}{BC} = 1 \quad \frac{AL}{AL} = \frac{3BC}{4BL}$$

$$\frac{H}{21} = 1 + \frac{AL \cdot BF}{AL \cdot BF} = \frac{AL \cdot BF}{BF \cdot BL} = \frac{9}{28} \cdot \frac{LC \cdot BC}{BL^2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 3x \cdot 9 = \frac{9}{28} \cdot \frac{LC \cdot BC}{BL^2} \cdot \frac{1}{16} S_{ABC}$$

$$28 \cdot 16 \cdot 3x = \frac{AC}{BL} \cdot \left(1 + \frac{LC}{BL}\right) \cdot \frac{1}{16} S_{ABC}$$

$$\frac{S_{AFBL}}{S_{ABC}} = \frac{BF}{BC}$$

$$\frac{AL}{AL} = \frac{h_1}{h} = \frac{BL}{BC} \cdot \frac{1}{16}$$

$$\frac{AL \cdot AF}{AL \cdot AC} = \frac{9}{H} \cdot \frac{S_{AFBL}}{S_{ABC}} = \frac{AL}{BC}$$

$$BL \cdot h_1 = \frac{1}{16} BC \cdot h$$

$$\frac{AL}{AL} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{H} \cdot \frac{S_{AFBL}}{S_{ABC}} =$$

$$\frac{BF}{BF} =$$