МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1

ШИФР 1.2-004

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

© МФТИ, 2017

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$g(x)=\sin 3x \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

Чтобы найти точки экстремума, возьмем производную и приравняем её к 0;

$g'(x) = -2\sin x\cos x - 10\sin 5x\cos 5x + 3\cos 3x\sin 7x + 7\cos 7x\sin 3x =$
$= -\sin 2x - 5\sin 10x + 3\cos 3x \sin 7x + 7\cos 7x\sin 3x = 2\cos 7x\sin 3x -$
$- 2\sin 7x\cos 3x - \sin 2x = 2\sin 2x \cancel{\cos 2x} \sin 4x - \sin 2x =$
$= 2\sin 2x\cos 2x - \sin 2x = \sin 2x(2\cos 2x - 1) = 0$

$\sin 2x = 0$

$2x = \pi n;\ n\in Z$

$x = \frac{\pi n}{2};\ n\in Z$

$2\cos 2x - 1 = 0$

$\cos 2x = \frac{1}{2}$

$2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ n\in Z$

$x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n;\ n\in Z$

Теперь проверим значения функции для точек экстремума!

$x = 0 + \pi n,\quad g(x) = 1 + 4 = 5$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n;\quad g(x) = -1\cdot(-1) - 1 + 4 = 4$

$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n;\quad g(x) = 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 4 = 4$

$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\quad g(x) = (-1)\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 4 = 4$

Видим, что $\min = 4$; $\max = 5$

Ответ: 4, 5.

№3.

В 17-значном числе расположить подряд 7 восьмерок можно 11 способами (можно взять цифр справа и сдвигать на один разряд влево). Остальные 10 чисел можем выбрать из 2 вариантов ('0', '7'), т.е. 2^{10}, но в этом случае не учитываем, что каждая цифра должна встречаться хотя бы раз и только нули не могут стоять в самом начале числа.

2·11 вариантов, когда 10 цифр одинаковые, их не учитываем.

Далее надо учесть, что 0 не можем ставить на 1 место,

Значит есть 1 вариант для 1 разряда, когда там не ставим 8.

Итого: 1 вариант, когда можем выбрать 10 чисел $2^{10}-2$ способами и 10 вариантов, когда можем выбрать 9 чисел $2^{9}-1$ способом.

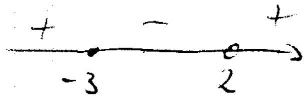
$$2^{10}-2+10(2^{9}-1)=1024-2+5120-10=6132$$ варианта

Ответ: 6 132 варианта

№5

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4)>1$

$(\sqrt{x+7}-x-1)(x+4-1)\geq 0$



~~$x\in(2;\frac{1+\sqrt{29}}{2})$~~

$x\in(-4;3]$

Ответ: $x\in(-4;3]$

ОДЗ:

$$\begin{cases}x+4>0 & (1)\\ \sqrt{x+7}-x>0 & (2)\\ \sqrt{x+7}-x\neq 1 & (3)\end{cases}$$

(1) $x>-4$

(2) $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geq 0\\ x+7>x^2\end{cases}\Rightarrow x\in[\overset{0}{\cancel{\frac{1-\sqrt{29}}{2}}};\frac{1+\sqrt{29}}{2})\\ \begin{cases}x<0\\ x+7>0\end{cases}\Rightarrow x\in(-7;0)\end{array}\right.$

(3) $\sqrt{x+7}\neq(x+1)$

$$\begin{cases}x+7\neq x^2+2x+1\\ x+1\geq 0\end{cases}$$

$x\neq 2$

$$\begin{cases}x+1<0\\ x\in(-\infty,-1)\end{cases}$$

ОДЗ:

$x\in(-4;-1)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7. Нужно взять такие числа, чтобы их разность не была кратна 45, а сумма была наименьшая. Т.к. в отрезках числа различаются на 45, то нужно взять их так:

181 .. 186, 142 .. 147; 103 .. 108; 64 .. 69;
25 .. 30;

Их сумма тогда: 3764.

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

18 - 004
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sqrt{\left(\frac{a}{8}-4\right)\left(25-\frac{a}{8}\right)} = \frac{21\sqrt{3}}{4}$

$\left(\frac{a}{8}-4\right)\left(25-\frac{a}{8}\right) = \frac{21\cdot21\cdot3}{16}$

$\frac{25a}{8} - \frac{a^2}{8^2} - 100 + \frac{4a}{8} = \frac{21\cdot21\cdot3}{16}$

$-\frac{a^2}{8^2} + \frac{29a}{8} - 100 - \frac{21\cdot21\cdot3}{16} = 0$

$a^2 - 29\cdot8a + 6400 + 4\cdot21\cdot21\cdot3 = 0$

$D = 29\cdot29\cdot88 - 4\cdot(6400 + 4\cdot21\cdot21\cdot3) = 29^2\cdot8^2 - 4(8^2\cdot4\cdot5^2 + 4\cdot21\cdot21\cdot3) =$

$= 29^2\cdot8^2 - 4^2\cdot8^2\cdot5^2 - 4^2\cdot7^2\cdot3^3 = 57264 - 25600 - 21168 =$

$= 4496 = 2^4\cdot281$

$a_{1,2} = \frac{29\cdot8 \pm 4\sqrt{281}}{2} = 29\cdot4 + 2\sqrt{281}$

$\sqrt{\left(\frac{a}{8}-4\right)\left(25-\frac{a}{8}\right)} = \sqrt{\frac{27}{32}a}$

$\left(\frac{a}{8}-4\right)\left(25-\frac{a}{8}\right) = \frac{27}{32}a$

$\frac{25a}{8} - \frac{a^2}{8^2} - 100 + \frac{4a}{8} = \frac{27}{32}a$

$-\frac{a^2}{8^2} + \frac{29a}{8} - \frac{27}{32}a - 100 = 0$

$\frac{a^2}{8^2} + \frac{(-29\cdot4+27)a}{32} - 100 = 0$

$a^2 + 2a(27-29\cdot4) - 100 = 0$

$a^2 + 2\cdot129a - 100 = 0$

$a^2 + 258a - 100 = 0$

$D = 66504 + 400 = 66904$

$$\begin{array}{r|l} 53824 & \\ -\ 4676 & \\ \hline 49148 & 2 \\ 24574 & 2 \\ 12287 & \end{array}$$

4.

$p = \frac{14+6+\sqrt{2a}}{2} = \frac{20+\sqrt{2a}}{2}$

$S = \sqrt{\frac{20+\sqrt{2a}}{2}\left(10+\frac{\sqrt{2a}}{2}-14\right)\left(10+\frac{\sqrt{2a}}{2}-6\right)\left(10+\frac{\sqrt{2a}}{2}-\sqrt{2a}\right)} =$

$= \sqrt{\left(\frac{2a}{4}-16\right)\left(100-\frac{2a}{4}\right)} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}-16\right)\left(-\frac{a}{2}+100\right)}$

$\left(\frac{a}{2}-16\right)\left(100-\frac{a}{2}\right) = (21\sqrt{3})^2$

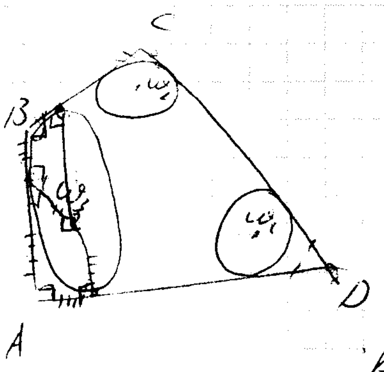
$\frac{100a}{2} - \frac{a^2}{4} - 1600 + \frac{16a}{2} = 1323$

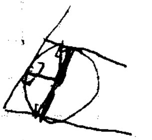
$-\frac{a^2}{4} + \frac{116a}{2} - 2923 = 0$

$a^2 - 2\cdot116a + 4\cdot2923 = 0$

$D = (232)^2 - 4^2\cdot2923 =$

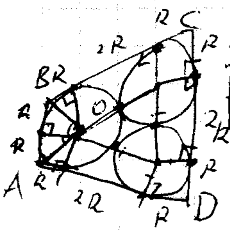
$= 53824 - 4676$

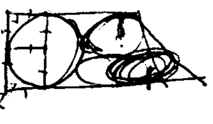




$AD + BC - \boxed{AB} - CD = 12$

$\overset{\shortparallel}{4R} \quad \overset{\shortparallel}{4R} \quad 2R \quad \overset{\shortparallel}{4R} = 12$





$2R = 12$

$\boxed{R = 6}$

$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{6}{12} = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}6}$

$\Rightarrow ~~\sqrt{3}~~ \quad \boxed{\angle\alpha = 90^\circ}$

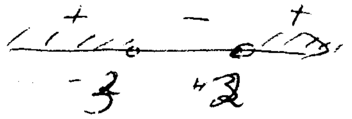
☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$

$(\sqrt{x+7}-x-1)(x+3) \geq 0$

$x=2$ $\quad x=-3$



ОДЗ:

$x \in \left(2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

ОДЗ:

$$\begin{cases} \sqrt{x+7}-x>0 & 1 \\ \sqrt{x+7}-x \neq 1 & 2 \\ (x+4)>0 & 3 \end{cases}$$

1) $\begin{cases} x^2-x-7<0 \\ x \geq 0 \end{cases}$

$D = 1+28=29$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}$

$x \in \left[0; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

2) $\begin{cases} \sqrt{x+7} \neq (x+1) \\ x+1 \geq 0 \quad x \geq -1 \end{cases}$

$x+7 = x^2+2x+1$

$x^2+x-6=0$

$D = 1+24=25$

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$

$x_1 = -3 \quad x_2 = 2$

$x \neq 2$

3) $(x+4)>0$

$x>-4$

ОДЗ: $x \in [0;2) \cup \left(2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

1. $y=2x^2$ $\quad b=14 \quad c=6 \quad d=2\sqrt{\frac{a}{2}} = \pm 2x$

$a=2x^2$

$p = \frac{20+2x}{2} = 10+x \quad S = \sqrt{(10+x)(x-4)(x+4)(10-x)} = \sqrt{(100-x^2)(x^2-16)}$

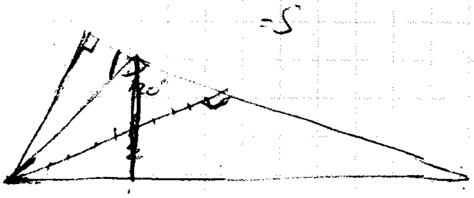
$S = \frac{1}{2}bc\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}cd\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}bd \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{1}{2}\sin 60° \cdot AB \cdot BC = S$

$21\sqrt{3} = \sqrt{(100-x^2)(x^2-16)} \quad (a>98)$

$\frac{3\sqrt{3}}{2}x = \sqrt{(100-x^2)(x^2-16)} \quad (a<98)$

$7\sqrt{3}x = \sqrt{(100-x)^2(x^2-16)}$



2. $g(x) = \sin 3x \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 =$
$\quad 1 \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{4} \quad +\frac{3}{4} \quad +4$

$= \cos^2 x + \cos^2 5x + 3 + \sin 3x \sin 7x = ~~2\cos^2 x~~ + \sin^2 x + 2\cos^2 5x + \sin^2 5x + 1$

$5 \circ g(x) = 5 \quad 6 \quad g(x) = 4$

$g'(x) = -\sin x\cos x + (-\sin x\cos x) + (-\sin 5x \cdot 5 \cdot \cos 5x - \sin 5x \cdot 5 \cdot \cos 5x) + 3\cos 3x \cdot \sin 7x$
$+7\cos 7x \sin 3x = -2\sin x\cos x - 10\sin 5x\cos 5x + 3\cos 3x\sin 7x + 7\cos 7x\sin 3x =$

$= -\sin 2x - 5\sin 10x + 3\cos 3x\sin 7x + 7\cos 7x\sin 3x =$
$= -2\sin 7x\cos 3x + 2\cos 7x\sin 3x - 5\sin 2x = \sin 4x - \sin 2x = 0$
$-(5\sin 10x + \sin 2x) = -4\sin 10x - (\sin 10x + \sin 2x) = 2\sin 2x\cos 2x - \sin 2x = 0$

$\sin 10x = \sin(3x+7x) = \sin 3x\cos 7x + \sin 7x\cos 3x$ $) \cdot 5$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $y=2x^2$

$y=98$ $\quad x=\sqrt{\frac{98}{2}}=\sqrt{49}=7$

$y=18$ $\quad x=\pm3$ $\quad r=6$

$y=a$ $\quad x=\pm\sqrt{\frac{a}{2}}$

$\frac{1}{2}\cdot14\cdot6\cdot\frac{\sqrt3}{2}=21\sqrt3$

$S_\Delta=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{1}{2}7\cdot3\cdot\sin120^\circ=\frac{1}{2}3\cdot\sqrt{\frac{a}{2}}\cdot\sin120^\circ=\frac{1}{2}\cdot7\cdot\sqrt{\frac{a}{2}}\sin120^\circ$

$p=\frac{7+3+\sqrt{\frac{a}{2}}}{2}=5+\sqrt{\frac{a}{8}}$

$S=\sqrt{(5+\sqrt{\frac{a}{8}})(\sqrt{\frac{a}{8}}-2)(\sqrt{\frac{a}{8}}+2)(\sqrt{\frac{a}{8}}+5-\sqrt{\frac{a}{2}})}=\sqrt{(\frac{a}{8}-4)(5+\sqrt{\frac{a}{8}})(5-\sqrt{\frac{a}{8}})}=$

$=\sqrt{(\frac{a}{8}-4)(25-\frac{a}{8})}=\sqrt{}$

1) $\sqrt{(\frac{a}{8}-4)(25-\frac{a}{8})}=\frac{21}{2}\cdot\frac{\sqrt3}{2}=\frac{21\sqrt3}{4}$

$(\frac{a}{8}-4)(25-\frac{a}{8})=\frac{21^2\cdot3}{16}$

$\frac{25a}{8}+\frac{a^2}{64}-100+\frac{a}{2}=\frac{1323}{16}$

$\frac{a^2+25\cdot8a+32a-6400-1323\cdot4}{64}=0$

$a^2+232a-11629=0$

$D=53824+47968=$
$=101792$

$\frac{21\sqrt3}{4}=\sqrt{(\frac{a}{8}-4)(25-\frac{a}{8})}$

$\frac{\sqrt3}{2}\cdot\sqrt{\frac{a}{2}}\cdot\frac{3}{2}=\sqrt{(\frac{a}{8}-4)(25-\frac{a}{8})}$

$\frac{\sqrt{27a}}{\sqrt{32}}=\sqrt{(\frac{a}{8}-4)(25-\frac{a}{8})}$

$\frac{\sqrt{49\cdot3a}}{\sqrt{32}}=\sqrt{(\frac{a}{8}-4)(25-\frac{a}{8})}$

232
×232
464
696
464
53824

66904
2923
×16
17538
2923
46768

4496 | 2
2248 | 2
1124 | 2
562
281

21
×21
21
42
441
×3
1323
×4
5292
+6400
11692
×4
47968
+53824
101792 | 2
50896 | 2
25448 | 2
12724 | 2
6362 | 2
3181

25
×8
200

25600
+21168
46768

1024
×25
5120
2048
25600

51264
−46768
4496

5
49
×16
294
49
784
×27
5488
1568
21168

96
1024
×25

6600
+1323
2923

129
×2
258

29
×29
261
58
841

258
×258
2064
1290
516
66564

146
×2
232

13200
48064
57264

5. $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4)>1$

ОДЗ:

$\sqrt{x+7}-x>0$

$\sqrt{x+7}-x\neq 1$

$X+4>0$

$x+7>x^2$

$x+7\neq(x+1)^2$

$x>-4$

$x^2-x-7<0$

$D=1+28=29$

$x\in\left(\frac{1-\sqrt{29}}{2};\frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

$x\neq-3;\ x\neq 2$

$(\sqrt{x+7}-x-1)(x+4-1)\geq 0$

$\sqrt{x+7}=x+1$

$(x+3)=0$

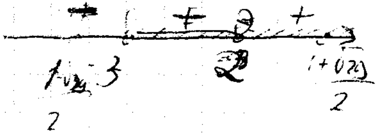
$x=-3$

$x+7=x^2+2x+1$

$x^2+x-6=0$

$D=1+24=25$

$x_{1,2}=\frac{-1\pm5}{2}=2;-3$



ОДЗ: $\left(2;\frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

$-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{19}{4}=\frac{19}{4}-\frac{1}{4}=\frac{18}{4}-\frac{1}{2}=\frac{16}{4}=4$

2. $y(x)=\sin3x\cdot\sin7x-\sin^2x+\cos^25x+4$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$\cos4x=\cos3x\cos7x+\sin3x\sin7x$

$\cos^25x-\sin^2x+4+\sin3x\sin7x=$

$g'(x)=\sin2x(2\cos2x-1)=0$

$\sin2x=0$

$2x=0+\pi n;$

$x=0+\frac{\pi n}{2};$

$\cos2x=\frac{1}{2}$

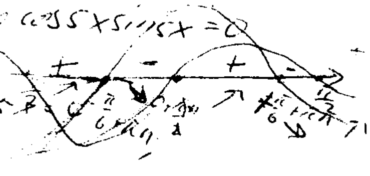
$2x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n;$

$x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n;$

$y'(x)=\cos3x\cdot3\cdot\sin7x+7\cos7x\cdot\sin3x-2\sin x\cdot\cos x-10\cos5x\sin5x=0$

$3\cos3x\sin7x+7\cos7x\sin3x-2\sin x\cos x-10\cos5x\sin5x=0$

$3\sin10x+4\cos7x\sin3x-\sin2x-10\cos5x\sin5x$

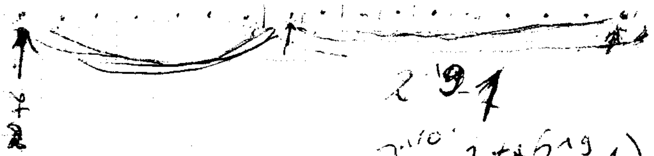


$\sin3x\cdot\sin7x-\sin^2x+(\cos2x\cos7x+\sin2x\sin7x)^2+4$

3 "С" "Т" "Е" – 7 цифр, 17 знаков

11 вариантов – 8

$2^{10}-2$



$2^{9}-1$

$2^{10}-2+10(2^9-1)$

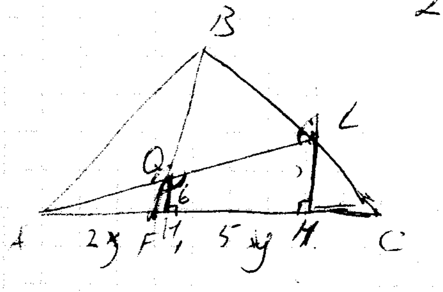
$11\cdot(2^{10}-2)$

$1024-2+5120-10=$

$=6144-12=6132$

6132

6.



$\frac{S_{BAL}}{S_{BAC}}=\frac{5x}{12x}$

$S_{ALC}=\frac{1}{2}LH\cdot7y$

$AQH_1\sim ALH$

$\frac{AH_1}{AH}=\frac{QF}{LH}$

$\frac{2}{7}=\frac{6}{x}$

$\boxed{x/k1}$

$2\sin x\cos x\ (2\cos2x-1)=0$

$(2\cos^2x-2\sin^2x-\cos^2x-\sin^2x)=0$

$4\sin x\cos x(\cos^2x-1)=0$

$-4\sin^3x\cos x=0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7. [1; 45] [46, 90] [91, 155] [~~136~~; 180] [181; 225]

1-46 44 45
40 41 42 43

84, 83, 82, 81, 80, 79

~~103~~ 104
105 106
107 108

142, 143,
144, 145,
146, 147

181, 182,
183,
184,
185
186

на 45 - каждое

$108 - 45 = 63$

181 - 186

142 - 147

103 - 108

64 - 69

25 - 30

186
~~146~~
~~147~~

$147 - 45 = 102$

$187 - 91 = 96$

$108 - 45 = 63$

$69 - 45 = 24$

181
+182
+183
+184
+185
+186
1101
+867
1968
+633
2601
+398
2999
+165
$\boxed{3164}$

142
+143
+144
+145
+146
+147
867

103
104
105
106
107
108
633

64
65
66
67
68
69
398

25
26
27
28
29
30
165

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)