МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2

ШИФР 10-002

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.

3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры “0”, “5” и “9” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “5” ровно шесть, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD. +

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.

7. ? Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $y = x^2$, $y = 169$, $y = 64$, $y = a$. Пусть b, c, d – длины сторон треугольника, причём $b+c>d$, $b+d>c$, $c+d>b$. (b, c, d - положительные числа).

Тогда $b = 2\sqrt{169}$, $c = 2\sqrt{64}$, $d = 2\sqrt{a}$

$b = 26$, $c = 8\cdot2 = 16$. $\cos(120° = -\frac{1}{2}$.

$2\sqrt{a}+16>26$, $a>25$

$2\sqrt{a}<42$, $a<\frac{1764}{2}$,

$a<882$

По теореме косинусов:

1) $4a = 26^2+(8\cdot2)^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot26\cdot8\cdot2$ (в и с образуют угол 120°).

$a = (676+256+416):4 = 169+64+104 = 337$.

2) $256 = 676+4a+26\cdot2\sqrt{a}$ (d и b обр-т угол 120°).

нет решений для a.

3) $676 = 256+4a+16\cdot2\sqrt{a}$ (d и c обр-т угол 120°).

$a+8\sqrt{a}-105=0$. Пусть $\sqrt{a}=t$, $t>0$, тогда $t^2+8t-105=0$ $D=64+420=484=22^2$

$t=\frac{-8+22}{2}=7$

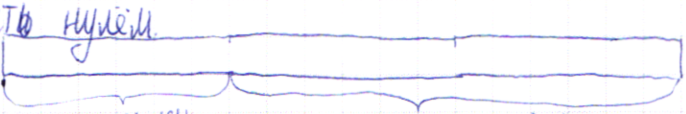
$a = 49$.

Ответ: $a = 49$ или $a = 337$

3. 18-значное число – A, A содержит цифры "0", "5" и "9", подряд 6 цифр "5" каждая цифра встречается хотя бы раз.

а) Первая цифра не может быть нулём.

б) Первая цифра – "5", тогда



Количество таких чисел – $2^{12}-2 = 4096-2 = 4094$

в) Первая цифра - "9", тогда кол-во таких чисел равно:

$12\cdot(2^{11}-2) = 24576-24 = 24552$

количество вариантов расположения первой из пятёрок.

все цифры должны быть использованы хотя 1 раз

$4094+24552=28646$

Ответ: 28646.

5. $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$

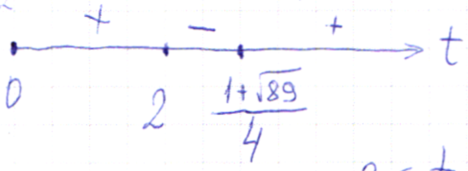
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ (1+x)^2 \neq x+3 \\ x+3 > x^2 \\ (\sqrt{x+3}-x-1)(x-5+x-\sqrt{x+3}) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \\ (\sqrt{x+3}-x-1)(2x-5-\sqrt{x+3}) \geq 0 \end{cases}$$

Пусть $\sqrt{x+3} = t$, $t \geq 0$, тогда $x = t^2-3$

$$(t-t^2+2)(2t^2-t-11) \geq 0.$$

$$(t^2-t-2)(2t^2-t-11) \cancel{>} \leq 0.$$

$$\left[\begin{array}{l} t=-1, \\ t=2 \end{array}\right. \qquad t = \frac{1 \pm \sqrt{89}}{4}$$



$$2 \leq t \leq \frac{1+\sqrt{89}}{4}$$

$$2 \leq \sqrt{x+3} \leq \frac{1+\sqrt{89}}{4}; \quad 4 \leq x+3 \leq \frac{(1+\sqrt{89})^2}{16}$$

$$1 \leq x \leq \frac{90-48+2\sqrt{89}}{16}$$

$$1 \leq x \leq \frac{21+\sqrt{89}}{8}.$$

Ответ: $\left(1; \frac{21+\sqrt{89}}{8}\right]$

2. $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$. $\quad \sin 5x \cdot \sin 9x = \frac{1}{2}\cos 14x + \frac{1}{2}\cos 4x$

$g(x) = \frac{1}{2}\cos 14x + \frac{1}{2}\cos 4x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

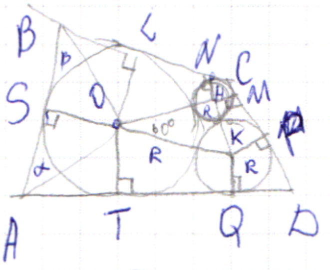
$\frac{1}{2}(2\cos^2 7x - 1) + \frac{1}{2}(2\cos^2 2x - 1) - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 = \cos^2 7x - \sin^2 7x - \cos^2 2x - \cos^2 x - 4 =$

$= \cos 14x - 4\cos^4 x + 4\cos^2 x - \cos^2 x - 5 = \cos 14x - 4\cos^4 x + 3\cos^2 x - 5.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4. Четырехугольник ABCD, три попарно касающиеся окр-ти одинакового радиуса (R).

$AD+BC-AB-CD=10.$



$AT+TQ+DQ+BL+LN+CN-AS-BS-CM-PD-PM=10.$

$AT=AS$, $DQ=PD$, $CM=CN$, $BS=BL$ - по св-ву отрезков касательных, проведенных из одной точки.

$TQ+LN-PM=10.$

прямая, соед-ая центры
линия центров касающих-ся окр-тей проходит через точку касания. окр-тей

$HM=TO=KQ=R$ $KO=KH=HO=2R.$

$KO=TQ$; $KH=PM$, $HO=LN.$

Т.к. TOKQ - прямоугольник. (HKPM и LOHN).

$2R+2R-2R=10$ $R=5.$

а) Ответ: $R=5$

б) Ответ: $m(\angle AOB)=$ ~~90.~~ $60°$

Пусть. ~~$\begin{cases} m(\angle SAO)=\alpha, \text{ тогда } m(\angle SOA)=90°-\alpha. \\ m(\angle SBO)=\beta, \text{ тогда } m(\angle SOB)=90°-\beta \end{cases}$~~

~~Из $\triangle AOB$: $m(\angle AOB)+m(\angle SAO)+m(\angle SBO)=$ m(∠AOB 180°~~

~~$m(\angle AOB)=180°-\alpha-\beta.=180°-(\alpha+\beta).$~~

~~$m(\angle AOB)=m(\angle SOA)+m(\angle SOB)=90°.$~~

Т.к. $KO=HO=HK$, то $m(\angle KOH)=60°.$

$m(\smile TSL)=360°-m(\angle OLN)-m(\angle OTQ)-m(\angle KOH)=360°-180°-60°=120°.$

$m(\angle SAO)=\alpha$, $m(\angle SBO)=\beta$.; $\triangle SAO=\triangle TAO$ (ГК) и $\triangle SBO=\triangle LBO$ (ГК), тогда.

$m(\angle BOL)=\beta$ и $m(\angle AOT)=\alpha.$

$m(\angle AOB)=\alpha+\beta$, $m(\smile TSL)=2\alpha+2\beta \Rightarrow \alpha+\beta=60°$

$m(\angle AOB)=60°.$

в) $AO \cdot BO = 42$

$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} AO \cdot BO \cdot \sin(\angle AOB) = 21 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ кв. ед.

$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} OS \cdot AB \Rightarrow AB = \frac{2S_{\Delta AOB}}{SO}$; $SO = R = 5$.

$AB = \frac{21\sqrt{3}}{5}$

Ответ: $AB = \frac{21\sqrt{3}}{5}$

6. 

ΔABC, $AF : FC = 3 : 4$

$S_{BQL} : S_{BAC} = 1 : 16$, $QH_2 = 9$.

LH_1 - ?

7. $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$

25 чисел, разность никакия 2х ни кратна 35.

1	2	3	4	5
41	42	43	44	45.
81	82	83	84	85
121	122	123	124	125
161	162	163	164	165.

$40K+1$. $40K+2$ $40K+3$ $40K+4$ $40K+5$.

$S = \frac{1+4}{2} \cdot 2 + 5 + 5 \cdot 40 + 15 + 5 \cdot 80 + 15 + 5 \cdot 120 + 15 + 5 \cdot 160 + 15$.

$S = 15 \cdot 5 + 40(5 + 10 + 15 + 20) = 75 + 1000 = 1075$.

Ответ: 1075.

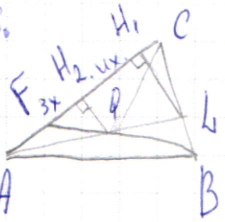
10-002

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6.



$$S_{AQS} = \frac{1}{2} QH_2 \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 7x = \frac{63}{2} x \text{ кв. ед.}$$

$$S_{ALC} = \frac{1}{2} LH_1 \cdot AC = \frac{1}{2} LH_1 \cdot 7x = \frac{7x}{2} LH_1 \text{ кв. ед.}$$

$$\frac{S_{BQL}}{S_{QLC}} = \frac{BL}{LC.} ; \quad \frac{S_{QLC}}{S_{AQC}} = \frac{QL}{AQ} ; \quad \frac{S\ BQL}{S\ ABQ} = \frac{QL}{AQ.}$$

$$S_{BQL} = \frac{S_{QLC} \cdot BL}{LC} \qquad S_{QLC} = \frac{S_{AQC} \cdot QL}{AQ}$$

$$S_{BQL} = \frac{S_{AQC} \cdot QL}{LC \cdot AQ}$$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

3. 0, 5, 9. "5" - 6 раз подряд

792 +
495
1287

1287 +
220
1507

1507 +
78
1585

18-значное число

1585.

I ~~цифора~~ "5": $\left(\frac{12!}{1!\cdot 11!} + \frac{12!}{2!\cdot 10!} + \frac{12!}{3!\cdot 9!} + \frac{12!}{4!\cdot 8!} + \frac{12!}{5!\cdot 7!} + \frac{12!}{6!\cdot 6!}\right)\cdot 2$

3170 +
924
4094

I цифора "9": $12\cdot\left(\frac{11!}{1\cdot 10} + \frac{11!}{2\cdot 9!} + \frac{11!}{3!\cdot 8!} + \frac{11!}{4!\cdot 7!} + \frac{11!}{5!\cdot 6!}\right)\cdot 2.$

84
11
84
84
72

$\left(12 + 66 + 220 + 495 + \frac{8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{120} + \frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{720}\ 924\right)\cdot 2.$

792

$+\quad 9\ 10\cdot 11\cdot 12 : 6 : 4$

924 +
792
1716 +
220
1936 +
495
31

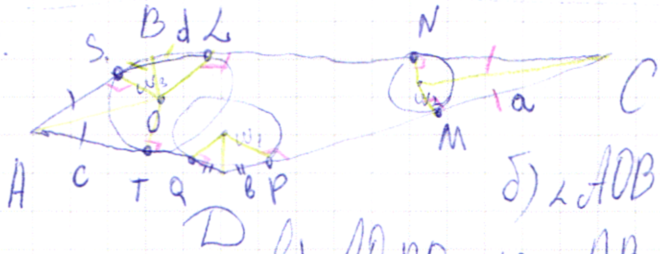
924 +
792
1726 +
495
2221

11
72

72
792

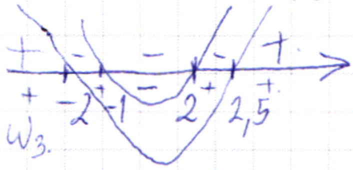
$12\left(11 + 55 + 165 + \frac{8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{24} = 330 + \frac{7\cdot 8\cdot 8\cdot 10\cdot 11}{120} = 462\right)\cdot 2.$

④.



а) ω_1 - ? ω_2 - ? ω_3 - ?

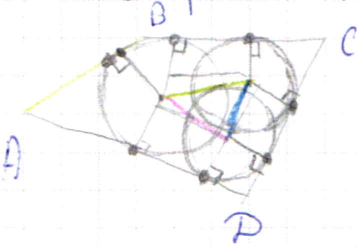
$AD + BC - AB - CD = 10.$



б) $\angle AOB$ - ?, O - центр

в) $AO\cdot BO = 42$, AB - ?

~~DT - BS~~ TQ + PM + LN = 10.



24552 +
4094
28646

?

462 +
330 +
165 +
66
1023

$\sqrt{x+3} = 4$

$t^2 = x+3$

$x+1 = t^2 - 2$

$2x - 5 = 2t^2 - 11$

$1 \leq x \leq \frac{90 - 48 + 2\sqrt{89}}{16} - \frac{42 + 2\sqrt{89}}{16}$

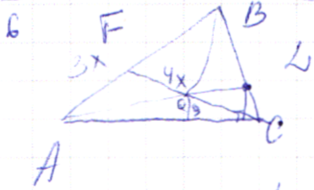
$4 \leq x + 3 \leq \frac{(1+\sqrt{89})^2}{16}$

$8 \leq 4\sqrt{x+3} \leq 1 + \sqrt{89}$

⑤ $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq \log_{\sqrt{x+3}-x} \sqrt{x+3} - x$

$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ \sqrt{x+3} - x > 0 \\ \sqrt{x+3} - x \neq 1 \\ (\sqrt{x+3} - x - 1)(x + 5 - \sqrt{x+3} + x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \geq 0 \\ x+3 > x^2 \\ ~~1+x>0~~ \\ x+3 \neq x^2 + 2x + 1. \\ \text{нер-во} \end{cases} \Rightarrow$

6



$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{1}{16}.$

расстояние(AC; L)

$x^2 + x - 2 \neq 0.$

$x \neq 1$

$x \neq -2.$

$x^2 - x + 3\ D = 1..$

2048.
12
4096
2048
24576

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

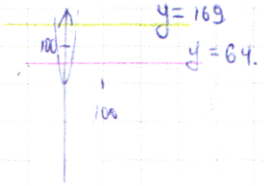
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

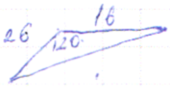
64+420.

484

1\.



$26+16.>C$



$S=\frac{1}{2}26$

$a=\frac{-8\pm\sqrt{\cancel{484}}22}{16}$ =

$y=a$ $2\sqrt{a}=C$

$4a=676+256-2\cdot26\cdot16\cdot(-\frac{1}{2})$-

$a=\frac{932}{4}+\frac{26\cdot16}{4}=233-104=129$.

22.
22
44
44
44

$2\sqrt{a}+16>26$.

$\sqrt{a}>5$ $a>25$.

$256=4a+676-4\sqrt{a}\cdot\frac{1}{2}\cdot26$.

$256=4a+676-52\sqrt{a}$. $\sqrt{a}=t$. , $t>0$.

208
676 +
64
1048

-13.5

26.
8.
208

$4t^2+420-52t=0$

676 +
256
416
1348

676.

$t^2-52t+105=0$.

$D=\frac{52^2-4\cdot105}{}$

$1348:4=13\cdot25+{}^{2}12=337$.

105 | 3
35 | 5
7 | 7
1\.

233
337.

337.
4
1348

---

②. $g(x)=\sin5x\cdot\sin9x-\sin^27x-\cos^2x-3$.

$\sin5x\cdot\sin9x=\frac{1}{2}$

$\sin\alpha+\sin\beta=\frac{1}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

$\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha+B}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-B}{2}$

$\sin30^\circ+\sin60^\circ=\frac{1}{2}\sin45\cdot\sin30$.

$\frac{1}{2}\sin\frac{\alpha+B}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-B}{2}$.

$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt3}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{1}{2}$.

$\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{\sqrt3}{2}=\frac{\sqrt6}{8}=\frac{A}{2}+\frac{B}{2}$.

26+16

42.
49 4
8
168
176

42.

676 -
256
$420:4=105$

$g'(x)=$ ~~5 cos5x~~

$\sin x$. $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta$

2^{12}.

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\cdot\sin\beta$

$\sin5x\cdot\sin9x$

$\cos(\alpha+\beta)-(\cos(\alpha-\beta)=\cos\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta-\cos\cos\beta\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta$.

$-\frac{1}{2}(\cos90^\circ-\cos\overset{30}{90}^\circ)=\sin30^\circ\cdot\sin60^\circ$

$-\frac{1}{2}(\frac{\sqrt3}{2}-\frac{1}{2})=\frac{\sqrt3}{2}\cdot\frac{1}{2}$

$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos\frac{(\alpha+\beta)}{2}-$co

$-\frac{\sqrt3}{4}+\frac{1}{4}=$ [illegible]

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin 7x +$

$10x \quad 18x.$

$x+y=18$

$x-y=10.$

$14x \quad 4x.$

$\overset{90}{\sin\alpha}\cdot\overset{30}{\sin\beta}=\frac{1}{2}\cos(\alpha+B)+\frac{1}{2}\cos(\alpha-B)$

$0\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(\cos 120)+\frac{1}{2}\cos 60°$

$\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right).$

$\frac{1}{2}\cos 14x+\frac{1}{2}\cos 4x-\sin^2 7x-\cos^2 x-3$

40 · 50.

$\sim$

~~$\cos 14x=\cos^2 7x-\sin^2 7x.$~~ $=2\cos^2 7x-1.$

~~$\frac{1}{2}\cos^2 7x-\frac{3}{2}\sin^2 7x+\frac{1}{2}\cos 4x$~~ $-\cos^2 x-3.$

~~$\frac{1}{2}\cos^2 7x$~~

$\cos^2 7x-1-\sin^2 7x+\cos^2 2x-1-\cos^2 x-3.$

$\cos 14x \quad \cos$

$\cos^2 2x=(2\cos^2 x-1)^2=4\cos^4 x-4\cos^2 x+1.$

$-14\sin 14x+16\cos^3 x\sin x-6\cos x\sin x=0.$

2.? $-7\sin 14x+8\cos^3 x\sin x-3\cos x\sin x=0.$

[1; 35], [36; 70], [71; 105], [106; 140], [141; 195].

25 чисел.

(a − b) ⋮ 35.

83 − 27 = 56.

5 · 35 + 5 · 70 + 5 · 105 + 5 · 140 + 5 · 175.

$S<5(175+35+210+105)$

28 315
525
2625

$S<2625.$

35 · 12 + 2

35 34 32 33 31.

1 + 2 + 3 + 4 + 5. 71 72 73 74 75.

41 + 42 + 43 + 44 + 45.

81 + 82 + 83 + 84 + 85

121 + 122 + 123 + 124 + 125

161 + 162 + 163 + 164 + 165.

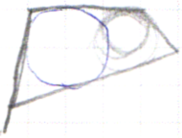
35K + 1 + 35K + 2 + 35K + 3 + 35K + 4.

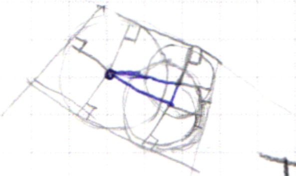
35K + 1

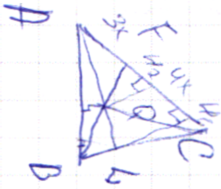
153 − 70

83.

153
35







$AO\cdot BO=42.$ $AB-?$

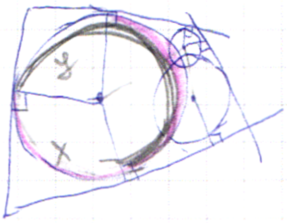
$SB^2=BX\cdot BO$

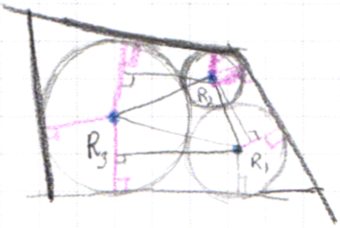
$AS^2=AX\cdot AO.$

$\frac{1}{2}9\cdot 7x=\frac{63}{2}x$

$L\ \frac{1}{2}LH_1\cdot 7x=\frac{7x}{2}LH_1$

7x.





$360-x-y=\frac{360-x+360-8}{2}$

$\frac{BL}{CL}=\frac{S}{}$

$\sqrt{}$

$(R_3+R_1)^2=(R_3-R_1)^2+x$

$(R_1+R_2)^2=(R_1-R_2)^2+y$

$(R_3+R_2)^2=(R_3-R^2)^2+z$

$2(90-\alpha)+2(90-B)=120°$

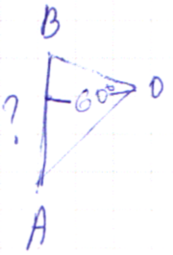
$(90-\alpha+90-B)$

$4R^2=x$ $\quad 3\cdot 4R^2=10.$

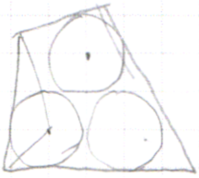
$4R^2=y$

$180-(\alpha+B)=$

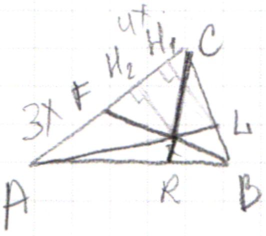
$4R^2=z$

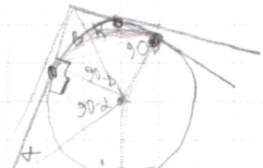


$360-60-180=120$



$AO\cdot BO.=42.$





$\frac{AF.}{FC}\cdot\frac{CL}{BL}\cdot\frac{BK}{AK}=1$

$\frac{3}{4}$

$\frac{S_{ABF}}{S_{BCF}}=\frac{9}{16}$ $\quad \frac{S_{ABF}}{S_{ABC}}=\frac{9}{25}$ $\quad \frac{S_{BCF}}{S_{ABC}}=\frac{16}{25}$

$S_{ABC}=16S_{BQL}$ $\quad \frac{S_{BCF}}{16S_{BQL}}=\frac{16}{25}$

$\frac{S_{BCF}}{S_{BQL}}=\frac{256}{25}$