# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 класс

БИЛЕТ 2 ШИФР 1-001

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра $a$ из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.

3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса $\omega_1$, $\omega_2$ и $\omega_3$, причём $\omega_1$ касается сторон $AD$ и $DC$, $\omega_2$ касается сторон $DC$ и $CB$, а $\omega_3$ касается сторон $CB$, $BA$ и $AD$.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.

   б) Найдите угол $AOB$, где $O$ – центр окружности $\omega_3$.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите $AB$.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geqslant 1$.

6. Точки $F$ и $L$ лежат на сторонах $AC$ и $BC$ треугольника $ABC$ соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки $BF$ и $AL$ пересекаются в точке $Q$; площади треугольников $BQL$ и $BAC$ относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки $L$ до прямой $AC$, если расстояние от точки $Q$ до прямой $AC$ равно 9.

7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

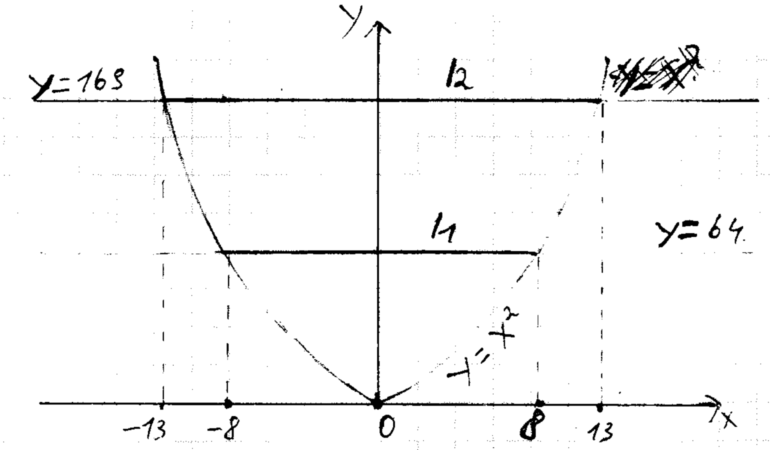
© МФТИ, 2017

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

1-001
ШИФР
(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. $y=x^2$ - парабола, $y=169$, $y=64$, $y=a$, $\angle\alpha=120^\circ$. $a$-?

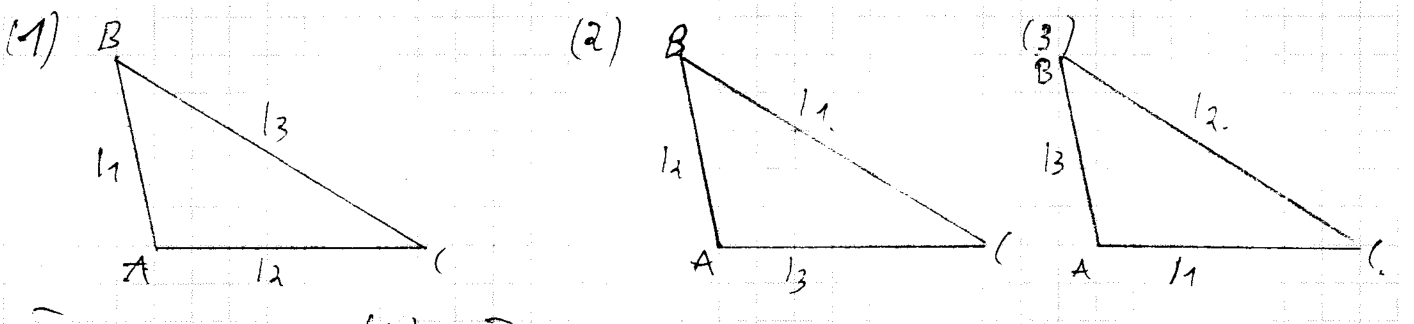



Пусть $y_1=64$, тогда $x_1=\pm 8$. В таком случае $l_1=16$.
$l_1$ - длина отрезка прямой $y=64$.

Пусть $y_2=169$, тогда $x_2=\pm 13$, В таком случае $l_2=26$.
$l_2$ - длина отрезка ~~y=169~~ прямой $y=169$

Пусть $y_3=a$, $x_3=\sqrt{a}$,
В таком случае
$l_3=2|\sqrt{a}|$, Отсюда
$a=\left(\frac{l_3}{2}\right)^2$, $l_3$ - длина
отрезка $y=a$

Рассмотрим треугольник $ABC$, где $\angle A=\angle\alpha=120^\circ$.
Возможны 3 случая расположения сторон треугольника




Рассмотрим (1). По теореме косинусов.
$l_3=\sqrt{l_1^2+l_2^2-2\cos\alpha\, l_1 l_2}=\sqrt{256+676+2\cdot\frac{1}{2}\cdot16\cdot26}=\sqrt{932+416}=$
$=\sqrt{3\cdot416}$

Отсюда $a=\frac{l_3^2}{4}=\frac{3\cdot416}{4}=3\cdot104=312$.

Рассмотрим (2). По теореме косинусов.

$l_1^2 = l_2^2 + l_3^2 - 2\cos\alpha\, l_2 \cdot l_3$.

$l_3^2 - 2\cos\alpha\, l_2 l_3 - l_2^2 - l_1^2 = 0$.

$l_3^2 + 26 l_3 + 420 = 0$.

Решим кв уравнение:

$D = 676 - 4 \cdot 420 = -1004$. $D < 0 \Rightarrow$ корней нету.

Рассмотрим (3). По теореме косинусов.

$l_2^2 = l_1^2 + l_3^2 - 2\cos\alpha\, l_1 l_3$

$l_3^2 - 2\cos\alpha\, l_1 l_3 + l_1^2 - l_2^2 = 0$.

$l_3^2 + 16 l_3 - 420 = 0$

Решим кв уравнение:

$D = 256 + 1680 = 1936 = (44)^2$.

$l_3 = \frac{-16 \pm 44}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} l_3 = 14 \\ l_3 = -30 \end{array}\right.$ – не подходит, т.к длина не может быть отрицательной.

Значит:

$l_3 = 14 \Rightarrow$

$a = \left(\frac{l_3}{2}\right)^2 = 7^2 = 49$

Ответ: $a = 49$, $a = 312$.

№7. Дано: множество $A \in [1;35]$ множество $B \in [36;70]$, множество $C \in [71;105]$, множество $D \in [106;140]$, множество $K \in [141;175]$. С каждого множества по 5 чисел. Разность двух чисел одного и того же промежутка никогда не будет кратна 35. Т.к длина каждого промежутка 34.

Пусть с множества $A$ выбрали: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$, с множества $B$: $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$, с множества $C$: $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$. С множества $D$: $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5$., с множества $K$: $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5$.

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Заметим, что $a_n - b_n$ и $b_n - a_n$ ($n \in \mathbb{Z}$, $n \in [1;5]$) - могут быть кратны 35.

Например: $1-36 \vdots 35$ и $36-1 \vdots 35$.

Таким образом можем учитывать только разность большего от меньшего.

$a_n < b_n < c_n < d_n < k_n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \in [1;5]$

Что бы сумма была наименьше, нужно, что бы $k_n$ - было наименьшим. Т.е $k_1 = 141$, $k_2 = 142$, $k_3 = 143$, $k_4 = 144$, $k_5 = 145$.

Теперь раcмотрим множество D и выберем наименьше возможные числа, $[106-110]$ - не подходит, т.к разность будет $\vdots 35$. Тогда, $d_1 = 111$, $d_2 = 113$, $d_4 = 114$, $d_5 = 115$.

Аналогично: $c_1 = 81$, $c_2 = 82 = c_3 = 83$, $c_4 = 84$, $c_5 = 85$

$b_1 = 41$, $b_2 = 42$, $b_3 = 43$, $b_4 = 44$, $b_5 = 45$.

$a_1 = 21$, $a_2 = 22$, $a_3 = 23$, $a_4 = 24$, $a_5 = 25$.

Тогда сумма 25 - выбраных чисел будет равна

$5 \cdot 140 + 5 \cdot 110 + 5 \cdot 80 + 5 \cdot 40 + 5 \cdot 20 + 5(1+2+3+4+5)$ (Группировка)

$5(140 + 110 + 80 + 40 + 20 + 15)$

$5 \cdot 335 = 1875$.

Ответ: 1875.

№3. ~~Т.к~~ Рассмотрим 18 ячеек для чисел.

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Т.к по условию цифр „5" ровно шесть и они идут подряд. То ряд этих пятёрок может занимать 13-позиций. В таком случае „0" и „9" - заполнят оставшиеся 12 ячеек.

$a$ - количество нулей, $b$ - количество девяток, тогда $a+b=12$.

Рассмотрим все случаи ниже..

$a=1$, $b=11$: „0" занимает свободную ячейку из 12, а „9" - заполнят оставшиеся ячейки. Значит Вариантов 12.

$a=2$, $b=10$: I „0" может занять любую из 12 ячеек, II „0" любую из 11, а „9" заполнят оставшиеся ячейки. Вариантов $12\cdot 11$

$a=3$, $b=9$: I „0" может занять любую из 12 ячеек, II „0" любую из 11, III „0" любую из 10, а „9" заполнят оставшиеся ячейки. Вариантов: $12\cdot 11\cdot 10$.

$a=4$, $b=8$: Аналогично и дальше! Вар. $12\cdot 11\cdot 10\cdot 9$

$a=5$, $b=7$: Вар: $12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8$.

$a=6$, $b=6$: Вар: $12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7$

$a=7$, $b=5$: Вар: $12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8$

$a=8$, $b=4$: Вар. $12\cdot 11\cdot 10\cdot 9$.

$a=9$, $b=3$: Вар: $12\cdot 11\cdot 10$

$a=10$, $b=2$: Вар: $12\cdot 11$.

$a=11$, $b=1$: „9" занимает свободную ячейку из 12, а „0" заполнят оставшиеся ячейки. Вариантов 12.

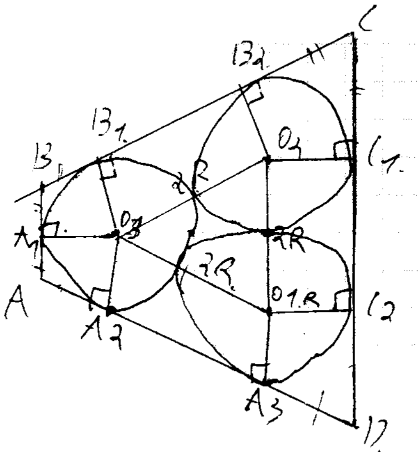
Значит количество возможных чисел будет:
$13\cdot 12^{11}\cdot 11^{9}\cdot 10^{7}\cdot 9^{5}\cdot 8^{3}\cdot 7$.

Ответ: $13\cdot 12^{11}\cdot 11^{9}\cdot 10^{7}\cdot 9^{5}\cdot 8^{3}\cdot 7$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

1-001

№4.




а) $B_2C = CC_1$,

$BB_1 = A_1B$,

$AA_1 = AA_2$

$A_3D = DC_2$. т.к касательные окр.

~~AD = A.~~

$A_2A_3 = O_3O_1$, т.к $O_1A_3 \parallel O_3A_2$ и $O_1A_3 = O_3A_2 = R$.

$A_2A_3 = 2R$.

Аналогично: $B_1B_2 = 2R$, $C_1C_2 = 2R$.

$AD = AA_2 + 2R + A_3D$.

$AB = AA_1 + BA_1$.

$BC = BB_1 + 2R + B_2C$.

$CD = CC_1 + 2R + C_2D$.

$AD + BC - AB - CD = 10$

$AA_2 + 2R + A_3D + BB_1 + 2R + B_2C - AA_2 - BB_1 - B_2C - 2R - A_3D = 10 \Rightarrow$

$2R = 10$.

$R = 5$.

Ответ: $R = 5$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5. $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$

ОДЗ: $\begin{cases} \sqrt{x+3}-x \neq 0 \\ x+5 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow$ $x \geq 0$

$x^2$

$x \neq -6$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$a+b=12$
$a=0$
$b=9$

3. 18 - 3 - раз ,0,5,8.

5-(13).

1-001

15-6=12.

$9, 0$

$\frac{0-1}{9-11} = 12.$

$\frac{0-2}{9-10} = 12 \cdot 11$

$\frac{0-3}{9-9} = 12 \cdot 11 \cdot 10$

$\frac{0-4}{9-8} = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9$

$\frac{0-5}{9-7} = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$

$\frac{0-6}{9-6} = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$

$\frac{0-7}{9-5} = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$

$\frac{0-8}{9-4} = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9$

$\frac{0-9}{9-3} = 12 \cdot 11 \cdot 10$

$\frac{0-10}{9-2} = 12 \cdot 11$

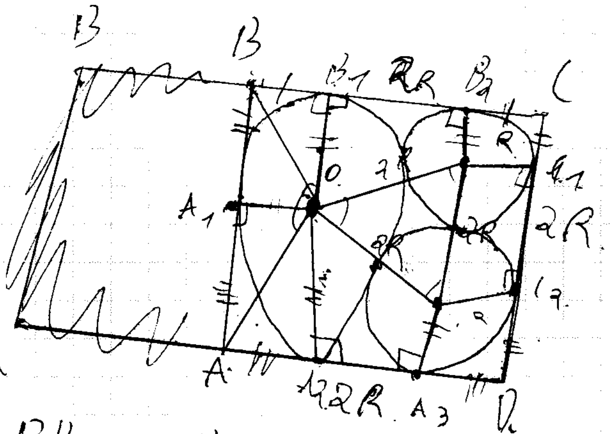
$\frac{0-11}{9-1} = 12.$

Итого:

$13 \cdot 12^{11} \cdot 11^{9} \cdot 10^{7} \cdot 9^{5} \cdot 8^{3} \cdot 7.$

4. а)

$AD + BC - AB - CD = 10$




$BB_1 = A_1B$
$AA_1 = AA_2$
$A_3D = DC_2$
$CC_1 = CB_2$

$AD = AA_2 + 2R + A_3D$
$AB = AA_1 + BA_1$
$BC = BB_1 + 2R + B_2C$
$CD = CC_1 + 2R + C_2D$


$AA_2 + 2R + \cancel{A_3D} + \cancel{BB_1} + 2R + \cancel{B_2C} - \cancel{AA_2} - \cancel{BB_1} - \cancel{B_2C} - \cancel{2R} - \cancel{A_3D} = 10$

$2R = 10$

а) $R = 5$.

б) $BO = \sqrt{R^2 + BA_1^2}$ $\quad R^2 = BO^2 - BA_1^2$

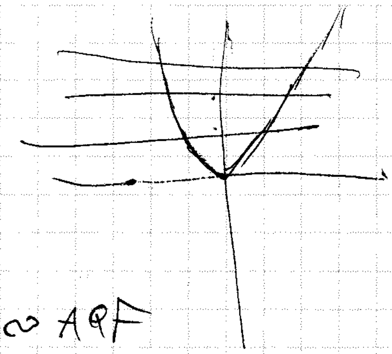
$AO = \sqrt{R^2 + AA_1^2}$ $\quad R^2 = AO^2 - AA_1^2$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $y=x^2$, $y=16$, $y=64$, $y=a$.



44 − 16

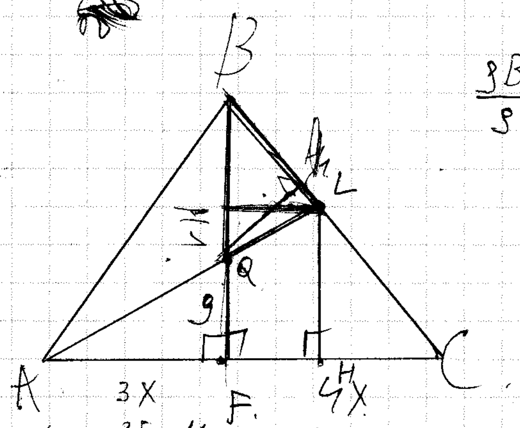
34 − 6

28

6)

$k^3=16$

$k=4$




$\frac{S_{BQL}}{S_{BAL}} = \frac{1}{16}$

$\triangle A \cdot LH \sim AQF$

QF — высота ABC т.к. $QF \perp AC$

$QF \cup BF$ совпадают.

$\frac{16}{1} = \frac{S}{S} = \frac{\frac{1}{2} \cdot BF \cdot AC}{\frac{1}{2} \cdot BQ \cdot LH_1}$

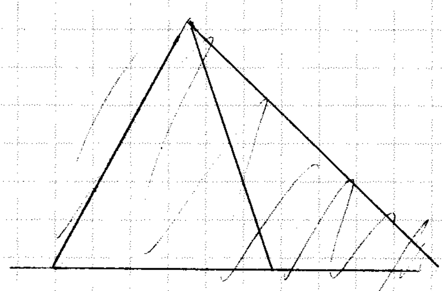
$16 = \frac{BF \cdot AC}{BQ \cdot LH_1}$

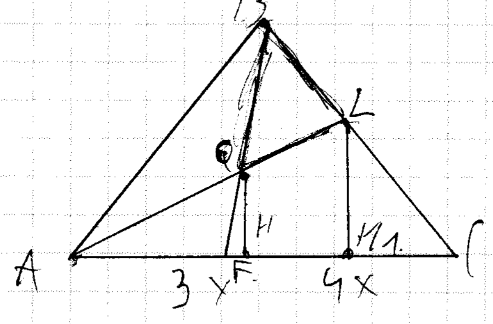
$16\, BQ LH_1 = BF \cdot AC$

$16 BQ LH_1 = (BQ + QF) \cdot AC$

$16 BQ LH_1 - BQ AC = QF AC$

$BQ = \frac{SAL}{}$






$46 \times 46 =$

$= 40 \cdot 40 + 40 \cdot 6 + 40 \cdot 6 + 36$

$1600 + 480 + 36$

$2080 + 36$

$2116$

$44 \cdot 44$

$40 \cdot 40 + 40 \cdot 4 + 40 \cdot 4 + 16$

$1600 + 160 + 160 + 16$

$1600 + 320 + 16$

$1936$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

1-001

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $l_3 = \sqrt{l_1^2 + l_2^2 - 2\cos 2 l_1 l_2} = \sqrt{256 + 676 + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 416}$

$1680 + 256 = 1936$

$l_3 = \sqrt{932 + \sqrt{3}\cdot 416}$

$l_3 = \sqrt{416(2+\sqrt{3})} = \sqrt{3\cdot 416}$

$a = \frac{l_3^2}{4}$

$a = \frac{416(2+\sqrt{3})}{4} = \cancel{104(2\sqrt{3})} = 104(2+\sqrt{3}) = 104\cdot 3 = 312.$

2) $l_1^2 = l_2^2 + l_3^2 - 2\cos 2 l_2 l_3$

$676 - 256 = 420$

$l_3^2 - 2\cos 2 l_2 l_3 + l_2^2 - l_1^2 = 0$

$l_3^2 + 26 l_3 + 420 = 0.$

$D = 676 - 4\cdot 420 = 676 - 1680 = -1004$ $D<0$ корней нет.

3) $l_2^2 = l_1^2 + l_3^2 - 2\cos 2 l_1 l_3$

$l_3^2 - 2\cos 2 l_1 l_3 + l_1^2 - l_2^2 = 0$

$l_3^2 + 16 l_3 - 420 = 0$

$D = 256 + 1680 = 1936 = (44)^2.$

$l_3 = \frac{-16 \pm 44}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} l_3 = 14 \\ l_3 = -30 \end{array}\right.$ — не подходит, длина не может быть отрицательной

$l_3 = 14.$

$a = \left(\frac{l_3}{2}\right)^2 = 7^2 = 49$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$\sin^5 x\cdot\sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

$\frac{1}{2}\sin\frac{14x}{2}\cdot\cos\frac{9x-5x}{2}$

$\frac{1}{2}\sin 7x\cdot\cos 2x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

$\frac{1}{2}\sin 7x(\cos 2x - \sin 7x) - \cos^2 x - 3$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**

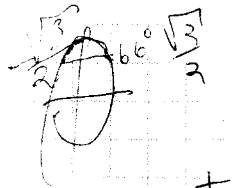
**«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»**

1-СС1

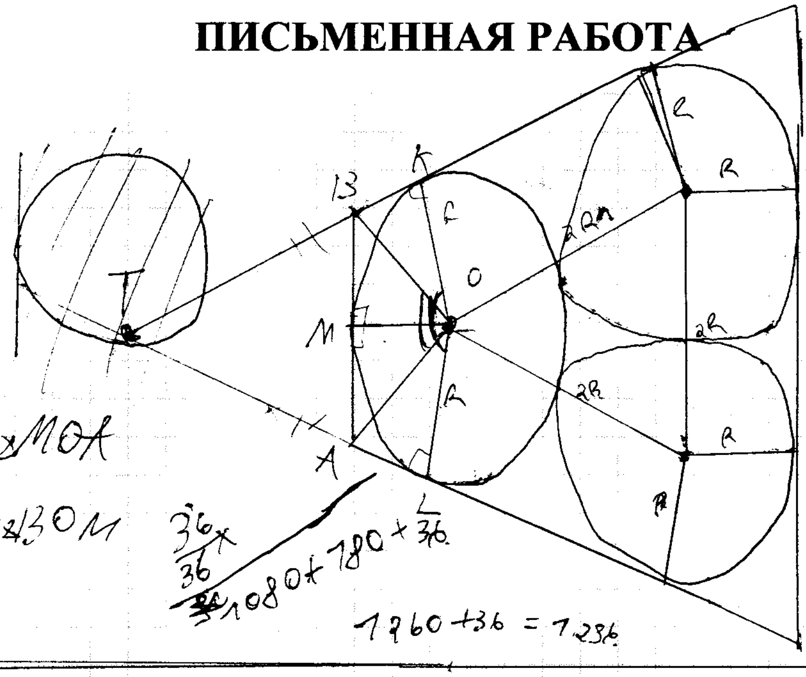
ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА




$LT = K^T$




$\angle AOL = \angle MOA$

$\angle KOB = \angle BOM$

$36 \times 36$

$1080 + 180 + 36$

$1260 + 36 = 1296$

$256 + 676$

$16 \times 16$

$160 + 60 + 36$

$256$

$256 + 676 = 932$

$26 \times 26$

$520 + 120 + 36$

$676$

$16 \times 16 = 160 + 60 + 36$

$16 \times 26$

$320 + 60 + 36 = 380 + 36$

$416$

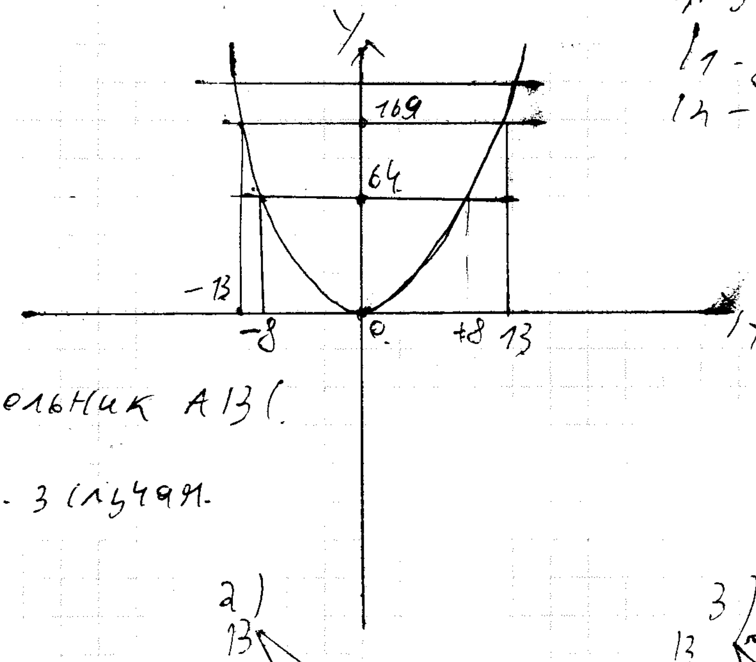
1). $y = 169$, $y = a$, $y = 64$, $y = x^a$, $a - ?$

$y_1 = 64 = x_1^2$

$x_1 = \pm 8$

$y_2 = 169 = x_2^2$

$x_2 = \pm 13$




треугольник.

$l_1$ - длина первого

$l_2$ - длина второго

$a = \left(\frac{l_3}{2}\right)^2 = \frac{l_3^2}{4}$

$l_1 = 16$

$l_2 = 26$

Есть треугольник $ABC$.

$\angle A = 120°$

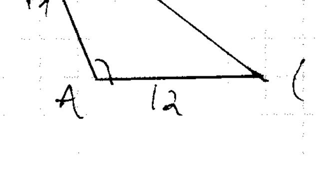
Возможны 3 случая.

$y_3 = a$.

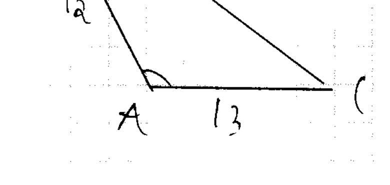
$x_3 = \pm\sqrt{a}$

$2|l_3| = 2\sqrt{a}$

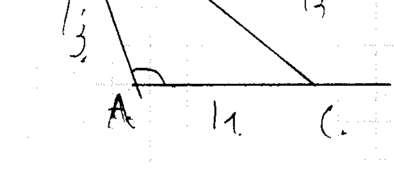
1)




2)




3)




☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

8V
≠ V.

$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$ $b_1 b_2 b_3 b_4 b_5$ $c_1 c_2 c_3 c_4 c_5$ $d_1 d_2 d_3 d_4 d_5$ $k_1 k_2 k_3 k_4 k_5$

т.к. $[1; 35]$, $[36-70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141-175]$ $\in \mathbb{Z}$

заметим что $a_n - b_n$ все равно что $b_n - a_n$. Например: $1-36 \vdots 35$ и $36-1 \vdots 35$.

Разница чисел на каждом из промежутков не $\vdots 35$ т.к. $[\ ] = 35$

Таким образом Можем учитывать только разность большего от меньшего

$a_n < b_n < c_n < d_n < k_n$

Чтобы ~~число~~ сумма была наименьшей, нужно чтобы $k_n$ - было наим, т.е. $k_1 = 141$, $k_2 = 142$, $k_3$, $143$, $k_4 = 144$, $k_5 = 145$

теперь рассмотрим множество $d_n$ и возьмём наименьшее возможное. $[106 - 110]$ — нам не подходит, значит

$d_1 = 111$, $d_2 = 112$, $d_3 = 113$, $d_4 = 114$, $d_5 = 115$.

Аналогично: $c_1 = 81$, $c_2 = 82$, $c_3 = 83$, $c_4 = 84$, $c_5 = 85$.

$b_1 = 41$, $b_2 = 42$, $b_3 = 43$, $b_4 = 44$, $b_5 = 45$.

$a_1 = 21$, $a_2 = 22$, $a_3 = 23$, $a_4 = 24$, $a_5 = 25$.

$5 \cdot 140 + (1+2+3+4+5) \cdot 5 + 110 \cdot 5 + 80 \cdot 5 + 40 \cdot 5 + 20 \cdot 5$.

~~5(15 \cdot 3~~ $5(140 + 15 + 110 + 80 + 40 + 20)$

$5(250 + 100 + 45)$

$5 \cdot 395 = 1500 + 450 + 25 = 1975$

Ответ: 1975.

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)