МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2 ШИФР 9-25

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.

3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.

7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-25

ШИФР

(заполняется секретарём)

Задача 1.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y_1 = 169$ $y_2 = 64$ $y_3 = a$

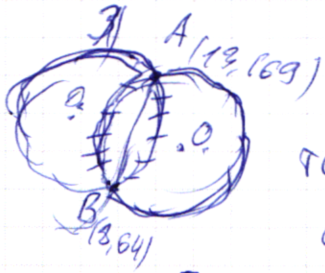
Назовем точку $A(13, 169)$ $x_1 = 13$ $x_2 = 8$ $x_3 = b$

$B(8, 64)$ и $C(b; a)$

3 варианта при 1) $\angle ABC - 120°$

2) $\angle BAC - 120°$

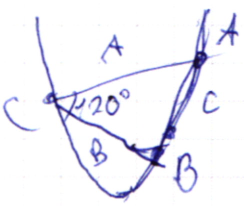
3) $\angle BCA - 120°$

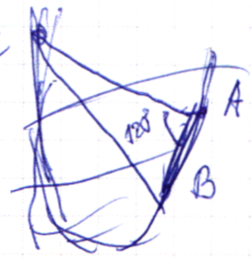


точка C лежит на дугах с черточками

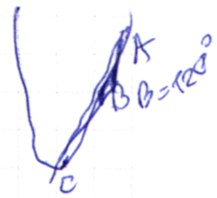
учитывая то что точка также лежит на параболе имеем $C(\sqrt{a}; a^2)$ количество вариантов уменьшается

1.





~~до одного такого что~~



C лежит на ветке параболы с $x < 0$

$64 < y = 169$

$a^2 + b^2 - a \cdot b \cdot \cos 120° = c^2$

$a_1^2 + b_1^2 - a \cdot b.$

$c = \sqrt{(13-8)^2 + (169-64)^2}$

~~$c = \sqrt{25 + 105^2}$~~

~~$c = \sqrt{25(1 + 21^2)}$~~

$a = \sqrt{(13-x)^2 + (169-x^2)^2}$ $(13-x)^2 + (169-x^2)^2 - a \cdot b \cdot \cos 120° = (13-8)^2 + (169-64)^2$

$b = \sqrt{(13-x)^2 + (64-x^2)^2}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1

(Нумеровать только чистовики)

$C(x; x^2)$

~~Из того~~ имеем 3 случая теоремы косинусов где мы знаем большую сторону

1) $B = 120°$

$b_{max} = \sqrt{(x-13)^2 + (x^2-169)^2}$

$a = \sqrt{(x-8)^2 + (x^2-64)^2}$

$c = \sqrt{(8-13)^2 + (169+64)^2}$

$(x-13)^2 + (x^2-169)^2 = (x-8)^2 + (x^2-64)^2 + (8-13)^2 + (x^2-64)^2$
$- a \cdot c \cos 120$

$C = 120°$

$c_{max} = \sqrt{(8-13)^2 + (64-169)^2}$

$b = \sqrt{(x-13)^2 + (x^2-169)^2}$

$a =$ все как в первом

и того

2) $c_{max}^2 = a^2 + b^2 - ab \cos 120°$

3) $a_{max}^2 = b^2 + c^2 - bc \cos 120°$

Ответы: 1); 2); 3). из этих трех уравнений подставив значения $\cos 120°$ которое к сожалению не вспомнил и раскрывая скобки решаем уравнения с 1 неизвестной

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-25

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1.$

$x \geq -3.$

$\sqrt{x+3} - x \neq 1$ $\quad \sqrt{x+3} \neq x+1 \quad x+3 \neq x^2+2x+1 \quad x \neq 1$, $x \neq -2$

$\sqrt{x+3} - x > 0$ $\quad$ ~~$\sqrt{x+3} > x$ $\left[\begin{array}{l} x \leq 0 \\ x+3 > x^2 \end{array}\right.$ x^2-x-3 $\sqrt{D} \leq \sqrt{13}$~~

$x^2 < x+3$

$x^2-x-3 < 0$

$x \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$

$x+5 > 0 \qquad x > -5$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x+3} - x \leq x+5 & (1) \\ \sqrt{x+3} - x > 1 & (2) \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x+3} - x \geq x+5 & (3) \\ x+5 < 1. & (4) \end{cases} \end{array}\right.$

(1)

$\sqrt{x+3} \leq 2x+5$

$x \geq -3$

$x \geq -2,5$

$x+3 \leq 4x^2+20x+25$

$4x^2+19x+22 \geq 0$

$x \in (-\infty; -2] \cup [2,75; \infty)$

(2) $\sqrt{x+3} - x > 1.$

$x+3 > x^2+2x+1$

$x^2+x-2 < 0$

$x \in (-2; 1)$

(3) $\sqrt{x+3} - x \geq x+5$

$\sqrt{x+3} \geq 2x+5$

$x+3 \geq 4x^2+20x+25$

$4x^2+19x+22 \leq 0$

$D = 361 - 4 \cdot 88$

$D = 361 - 352 = 9$ $\quad x_1 = -2 \quad x_2 = \frac{22}{8} \quad 2,75$

$x \in [-2; 2,75]$

(4)

$x < -4$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

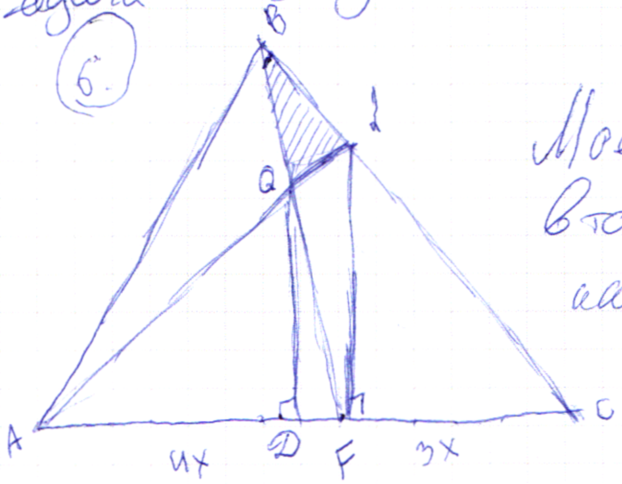
Задача

2.

имеем функцию $g(x)$ чтобы найти ее минимум и максимум стоит взять ее производную затем найти экстремумы с помощью пределов и выбрать максимальное и минимальное значение, к сожалению не помню таблицы производных.

Задача

6.



Мое предположение заключается в том что соотношения помогут нам найти коэффициэнты при подобии треугольников

AQD и ALF из которых QD и LF по соотношению

$LF = kQD$ где k - коэффициэнт для этого нам могли бы понадобится площади $S=\frac{1}{2}ah$

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-25

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 3.

у нас имеется 18 ~~цифр~~ ячеек из которых любые 6 подряд могут быть заняты цифрами "5"

возможностей у нас поставить "5" есть $18 - 6 + 1 = 13$ вариантов

дальше у нас остается всегда 12 пустых клеток из которых первая не „0"

учитываем это для всех кроме случая где в начале 5. там где в начале 5.

имеем 12 ячеек заполняем их по „0" и „9" $A = 2^{12}$ (кол-во значений) способов расставить 0 и 9.

$= 4096$

так осталось 12 вариантов для 5.

и „0" нельзя на первую позицию поэтому там вариант лишь один это „9" итого 11 пустых клеток в „0" и „9" имеем

$A = 2^{11} = 2048$ способов поставить „0" и „9"

умножим на 12 для „5" $2048 \cdot 12$ и прибавим оставшиеся 4096 способов для первого занятого „5"

$8192 \cdot 3 + 4096$

$16384 + 8192 + 4096 = 20480 + 8192 = 28672$ числа

~~Ответ:~~ 28672, не все подходят так как

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

1 цифра используется один раз так что отнимаем
из 12 способов для „5" где „5" не на первом
12 случаев где все „9" не 5 0 – не могут быть т.к.
первое „9", и еще 24 способа от того
где 5 на первом. итого

28762 − 36 = 28726

Ответ 28726.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-25

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5.

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$

область допустимых значений

$\sqrt{x+3} \geq 0 \quad x \geq -3$

$x+5 > 0$

$x > -5$

$\left.\right\} x \geq -3$

$\sqrt{x+3} - x > 0$

$\sqrt{x+3} > x$

$x \geq 0$

$x+3 > x^2$

$x^2 - x - 3 < 0$

$D = 13$

$x_1 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$

$x_2 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$

$x \in \left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2}; \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)$

$x \in \left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2}; \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)$

$x \neq 1 \quad x \neq -2$

ОДЗ

$x \in \left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2}; -2\right) \cup (-2; 1) \cup \left(1; \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)$

далее рассмотрим 2 возможных варианта

$x+5 \geq \sqrt{x+3} - x$ такое выполнится при

$\sqrt{x+3} - x > 1$

$x+3 > x^2 + 2x + 1$

$x^2 + x - 2 < 0 \quad x \in (-2; 1)$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$x+5 \geq \sqrt{x+3} - x$

$4x^2+25+20x-x-3 \geq 0$

$4x^2+19x+22 \geq 0$

$D = 361 - 352 = 9$

$x_{1,2} = \dfrac{-19 \pm \sqrt{9}}{8} = -2; -2.75$

$x \in (-\infty; -2,75] \cup [-2; \infty)$

получаем $(-2; 1)$

далее 2 вариант пра

$x+5 < \sqrt{x+3} - x$

$\sqrt{x+3} - x < 1$

$$\begin{cases} x \in (-2,75; -2) \\ x \in (-\infty; -2) \cup (1; \infty) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-2,75; -2) \cup (-2; 1) \\ x \in ОДЗ. \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{-1; -\sqrt{13}}{2}; -2\right) \cup (-2; 1) \cup \left(1; \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)$$

Ответ:

$x \in (-2; 1) \cup \left(\frac{-1; -\sqrt{13}}{2}; -2\right)$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 7

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9 - 25
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7.

два числа из одного промежутка не могут давать разность которая делилась бы ~~на~~ 35

тогда поскольку у нас сумма не важно группы возьмем большие числа так как все равно их будет 5.

~~приведем пример мы берем первые 5~~

для каждой группы будет числа вида $n \cdot 35 + x$ где n порядок группы с 0, а x какие не сложимые $n \cdot 35$. поэтому и неважно.

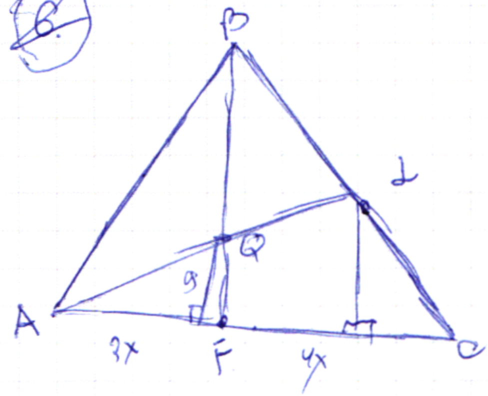
поэтому логично что из каждой группы x не должно быть одинаковым с x из другой поэтому берем минимальные x $[1; 25]$. и распределяем их как хотим и в итоге у нас выйдет.

$5\cdot(35\cdot 0) + 5(35\cdot 1) + 5\cdot(35\cdot 2) + 5(35\cdot 3) + 5(35\cdot 4) +$ сумма чисел от 1 до 25 включительно

Ответ: ~~0~~ + 175 + 350 + 525 + 700 + сумма $1 \to 25$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

6.



275
275
1275
1925
550
75595

15

$-2,75$ $-\frac{1-\sqrt{13}}{2}$

$-5,50$ $-1-\sqrt{13}$

$-4,5$ $\sqrt{13}$

4.