

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2

ШИФР

6-007

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120° ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.
3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
 - в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB .
5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.
7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N5

$$\log_{\sqrt{x+3}} - x(x+5) \geq 1$$

$$\begin{cases} x+5 \geq \sqrt{x+3} - x \\ \sqrt{x+3} - x \geq 1 \\ x+5 \leq \sqrt{x+3} - x \\ \sqrt{x+3} - x \geq 1 \end{cases}$$

OD 3: $x+5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -5$

$x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$

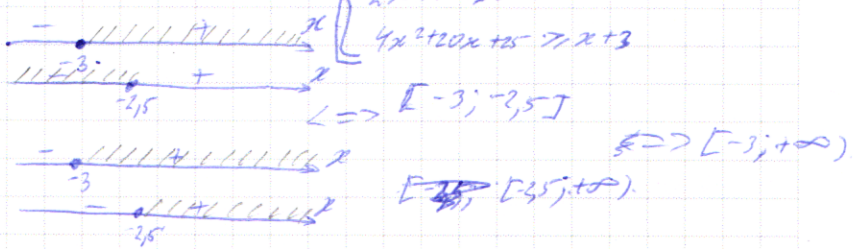
$\sqrt{x+3} - x \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+3} \geq x+1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x+1 \leq 0 \\ x+3 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ x^2 \geq 1+2x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x+1 \leq 0 \\ x+3 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ (x+2)(x-1) \leq 0 \end{cases}$$

Answers: $x \in [-3; -1] \cup (-1; 1)$

$$\begin{cases} x+5 \geq \sqrt{x+3} - x \\ \sqrt{x+3} - x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} \leq 2x+5 \\ \sqrt{x+3} \geq x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 2x+5 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+5 \geq 0 \\ 2x+5 \leq 0 \\ x+3 \geq 0 \\ 2x+5 \geq 0 \\ 4x^2+19x+22 \geq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} \end{cases}$$



$$\begin{cases} x+5 \leq \sqrt{x+3} - x \\ \sqrt{x+3} - x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+5 \leq \sqrt{x+3} \\ \sqrt{x+3} \geq x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 2x+5 \leq 0 \\ x+3 \geq 0 \\ 2x+5 \geq 0 \\ x+3 \geq 4x^2+20x+25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 2x+5 \leq 0 \\ x+3 \geq 0 \\ 2x+5 \geq 0 \\ 4x^2+19x+22 \leq 0 \Rightarrow \emptyset \end{cases} \Rightarrow [-3; +\infty)$$

Ответ: $x \in [-3; +\infty)$

N 2

$$g(x) = \sin 5x \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 14x) - \frac{1 - \cos 14x}{2}$$

$$= \frac{\cos 4x - \cos 14x - 1 + \cos 14x}{2} - \cos^2 x - 3 = \frac{\cos 4x - 1}{2} - \frac{1 + \cos 2x}{2} - 3 =$$

$$= \frac{\cos 4x - \cos 2x - 2}{2} - 3$$

$$g'(x) = \frac{1}{2}(-4\sin 4x + 2\sin 2x) = \sin 2x - 2\sin 4x$$

$$\sin 2x - 2\sin 4x = 0$$

$$\sin 2x - 4\sin x \cos 2x = 0$$

$$\sin 2x(1 - 4\cos 2x) = 0$$

$$\begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \cos 2x = \frac{1}{4} \end{cases} \begin{cases} 2x = \pi \cdot k, k \in \mathbb{Z} \\ 2x = \pm \arccos \frac{1}{4} + \pi \cdot k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi \cdot k}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{4} + \pi \cdot k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$g(0) = -1 - 3 = -4$$

$$g\left(\frac{1}{2} \arccos \frac{1}{4}\right) = \frac{\cos(2 \arccos \frac{1}{4}) - \cos(\arccos \frac{1}{4}) - 2}{2} - 3 = \frac{1 - 2 \cdot \cos(\arccos \frac{1}{4}) - \frac{1}{4} - 2}{2} - 3$$

$$= \frac{1 - 2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 2}{2} - 3 = \frac{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - 2}{2} - 3 = \frac{-\frac{9}{4} - 2}{2} - 3 = -\frac{11}{8} - 3 = -\frac{53}{8}$$

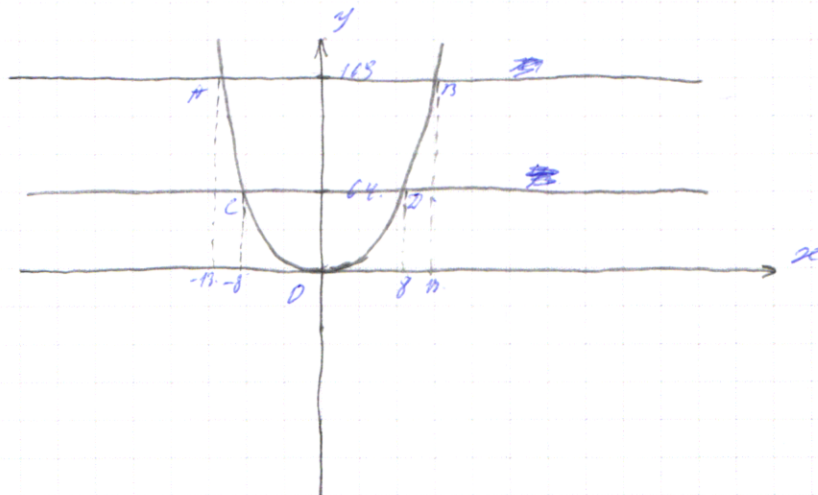
Ответ: $g(0) = -4$ - min, $g\left(\frac{1}{2} \arccos \frac{1}{4}\right) = -\frac{53}{8}$ - max.

Н.Т.

$$y = x^2, y = 169, y = 64 \text{ и } y = a$$

Три числа a $\angle = 120^\circ$

Решение:



~~Решение~~ Пусть x - неизвестный отрезок.

$$AB = 26, CD = 16$$

По теореме косинусов: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \angle$

$$1) 676 = 256 + x^2 - 2 \cdot 16 \cdot x \cdot \cos 120^\circ$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$676 = 256 + x^2 + 16x$$

$$x^2 + 16x - 420 = 0$$

$$x = \frac{-16 \pm \sqrt{256 + 1680}}{2} = \frac{-16 \pm 44}{2} = \frac{44 - 16}{2} = 14$$

$$2) x^2 = 676 + 256 - 2 \cdot 26 \cdot 16 \cdot \cos 120^\circ$$

$$x^2 = 676 + 256 + 416x$$

$$x^2 - 416x - 932 = 0$$

$$x = \frac{416 \pm \sqrt{416^2 + 4 \cdot 932}}{2} = \frac{416 \pm \sqrt{416(416 + 8)}}{2} = \frac{416 \pm \sqrt{1552 \cdot 256}}{2} =$$

$$= \frac{416 \pm 16\sqrt{689}}{2} = 208 + 8\sqrt{689}$$

$$3) 256 = 676 + x^2 - 2 \cdot 26 \cdot x \cdot \cos 120^\circ$$

$$256 = 676 + x^2 + 26x$$

$$x^2 + 26x + 420 = 0$$

Д

$$D = x^2$$

$$D = 196$$

$$D = (208 + 8\sqrt{689})^2 = 86760 + 3328\sqrt{689}$$

Ответ: при $a = 196$ и $D = 86760 + 3328\sqrt{689}$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$$\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) \geq 1$$

$$\sqrt{x+3}-x \geq 1$$

$$\begin{cases} x+5 \geq \sqrt{x+3}-x \\ \sqrt{x+3}-x \geq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+5 \geq \sqrt{x+3} \\ \sqrt{x+3} \geq 1+x \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x+3 \geq 0 & x+5 > 0 \\ x \neq -3 & x \neq -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 2x+5 \leq 0 \\ x+3 \geq 0 \\ 2x+5 \geq 0 \\ 4x^2+20x+25 \geq x+3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 2x+5 \leq 0 \\ x+3 \geq 0 \\ 2x+5 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \xrightarrow{[-3; +\infty]} \\ \xrightarrow{[-2,5; +\infty]} \\ \xrightarrow{[-3; +\infty]} \\ \xrightarrow{[-2,5; +\infty]} \end{matrix}$$

$$[-3; +\infty)$$

$$\sqrt{x+3} \geq 1+x$$

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 1+x \leq 0 \\ x+3 \geq 0 \\ 1+x \geq 0 \\ x+3-1-2x+x^2 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 1+x \leq 0 \\ x+3 \geq 0 \\ 1+x \geq 0 \\ (x+4)(x-1) \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \xrightarrow{[-3; -1)} \\ \xrightarrow{[-1; 1)} \\ \xrightarrow{[-1; 1)} \\ \xrightarrow{[-1; 1)} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x+5 \leq \sqrt{x+3}-x \\ \sqrt{x+3}-x \geq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -2x+5 \leq \sqrt{x+3} \\ \sqrt{x+3} \geq 1+x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 2x+5 \leq 0 \\ x+3 \geq 0 \\ 2x+5 \geq 0 \\ 4x^2+10x+25 \leq x+3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 2x+5 \leq 0 \\ x+3 \geq 0 \\ 2x+5 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \xrightarrow{[-3; -2,5]} \\ \xrightarrow{[-2,5; +\infty]} \\ \xrightarrow{[-2,5; +\infty]} \end{matrix}$$

$$[-3; +\infty) \cap [-3; -1) \cap (-1; 1)$$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$$g(x) = \sin 5x - \sin 3x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3.$$

$$g'(x) = 5 \cos 5x - 3 \cos 3x$$

$$g(x) = \frac{1}{2} (\cos 4x - \cos 14x) - \sin^2 7x - \frac{1 - \cos 2x}{2} - 3 =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\cos 4x - 1 - 1 - \cos 2x}{2} - 3 = \frac{\cos 4x - \cos 2x - 2}{2} - 3 =$$

$$g'(x) = \frac{1}{2} (-4 \sin 4x + 2 \sin 2x) = -2 \sin 4x + \sin 2x.$$

№5

$$\log_{\sqrt{x+3}}(x(x+5)) \geq 1.$$

$$\text{OD } 3: \begin{cases} x+3 > 0, & x+5 > 0 \\ x > -3, & x > -5 \end{cases}$$

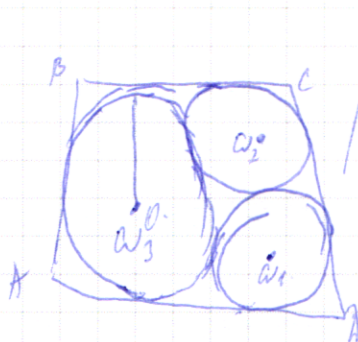
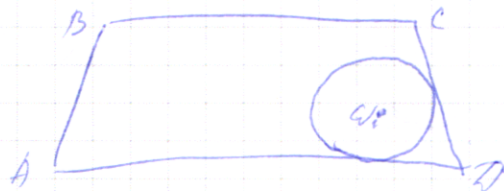
$$\begin{cases} x+5 \geq \sqrt{x+3} - x \\ \sqrt{x+3} - x > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+5 \leq \sqrt{x+3} - x \\ \sqrt{x+3} - x \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2 + 20x + 25 \geq x+3 \\ x+3 > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} AD + BC - AB - CD = 10 \\ 1 - 2P - 4R = 10 \end{cases}$$

№4.



$$AD + BC - AB - CD = 10$$

№2

$$\sin 2x - 4 \sin 4x = 0.$$

$$\sin 2x - 4 \sin 2x \cdot \cos 2x = 0$$

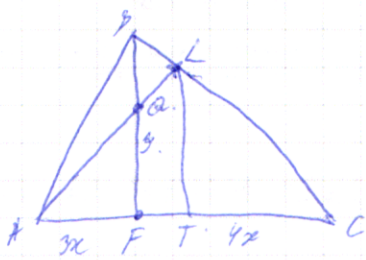
$$\begin{cases} \sin 2x = 0 \\ 1 - 4 \cos 2x = 0 \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi \cdot k}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ \cos 2x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$2x = \pm \arccos \frac{1}{4} + \pi \cdot n$$

$$x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{4} + \frac{\pi \cdot n}{2}$$

N6

$S_{BRL} : S_{BAC} = \frac{1}{76}$



$$\begin{array}{r} 688 \\ \times 64 \\ \hline 2756 \\ + 4134 \\ \hline 44096 \end{array}$$

64.688

$$\begin{array}{r} 208 \\ \times 208 \\ \hline + 9664 \\ 6000 \\ + 416 \\ \hline 42664 \end{array}$$

42664

$416^2 + 4 \cdot 932$

$$\begin{array}{r} 42004 \\ + 44056 \\ \hline 86060 \end{array}$$

$416(416+8)$

86060

$416 \cdot 924$

$$\begin{array}{r} 416 \\ + 8 \\ \hline 3928 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 26 \\ + 26 \\ \hline 156 \\ + 52 \\ \hline 676 \end{array}$$

$208 \cdot 2 \cdot 212$

$104 \cdot 106 \cdot 10$

$52 \cdot 53 \cdot 64$

$13 \cdot 53 \cdot 100$

$530 + 1150 = 680$

N7

- [1; 35], [36; 70], [71; 105], [106; 140], [141; 175]
- (a-b) : 35

$$\begin{aligned} 1680 + 156 &= \\ &= 1836 : 4 = \\ &= 459 \cdot 4 = 1836 \end{aligned}$$



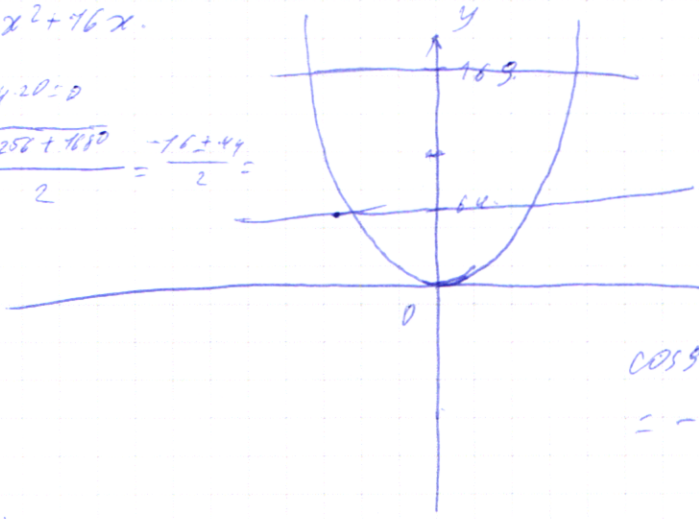
$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ + 156 \\ \hline 676 \end{array}$$

N1.

$676 = 256 + x^2 + 16x$

$x^2 + 16x - 420 = 0$

$$x = \frac{-16 \pm \sqrt{256 + 1680}}{2} = \frac{-16 \pm 44}{2} = \begin{cases} x = 14 \end{cases}$$



$256 = 676 + x^2 + 16x$

$x^2 + 16x + 676 = 256$

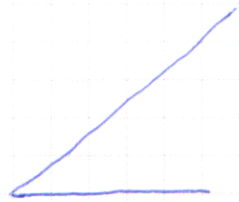
$x^2 = 676 + 16x - 256$

$x^2 - 16x - 932 = 0$

$$x = \frac{16 \pm \sqrt{256 + 3728}}{2}$$

$\cos 90^\circ \cos 90^\circ - \sin 90^\circ \sin 90^\circ = -1 = 208 \pm 8\sqrt{13}$
 $= -\frac{1}{2}$ $208 + 8\sqrt{13}$

10.



$169 = x^2 = 169 + 64 - 2 \cdot 13 \cdot 8 \cdot \cos 120^\circ$

$x^2 = 233 + 208 \cdot \frac{1}{2} = 233 + 104 = 337$

$169 = 64 + x^2 + 2 \cdot 8 \cdot x \cdot \frac{1}{2} = 64 + x^2 + 8x$

$x^2 + 8x - 105 = 0$
 $x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 420}}{2}$

$\frac{-8 \pm 22}{2} = \sqrt{x = 7}$
 509505905905905905

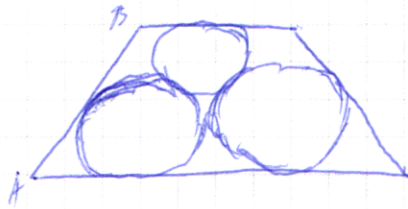
N3

55555 00000 99999
 000 :

590590590590590590
 905905905905905905
 509 05959095050509
 950950950950950950

$64 = 169 + x^2 + 16x$
 $x^2 + 16x + 105 = 0$

р. 4.





ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

6-004

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Grid area for writing the answer.

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)