

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2

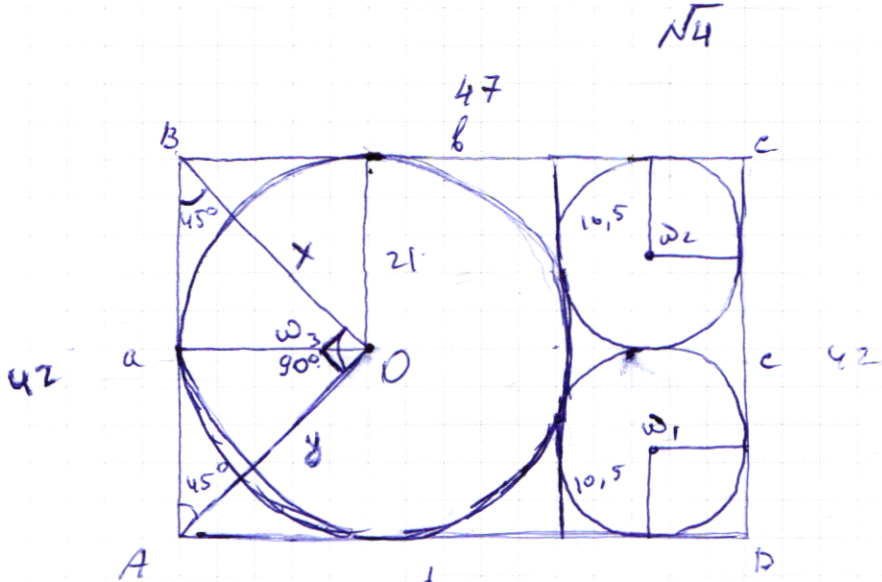
ШИФР

11-023

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120° ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.
3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
 - в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB .
5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.
7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



б) т.к. сторона AO делит четырёхугольник пополам
 Ответ: $\angle AOB = 90^\circ$

б) $AO \cdot BO = 42$ сторона $AB = 42$
 $AO = x$ $\begin{cases} x \cdot y = 42 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases} \Rightarrow a^2 = 1764$
 $BO = y$ $\begin{cases} x \cdot y = 42 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases} \Rightarrow a^2 = 42$

а) $AB = BC$ значит $BC = 42$. отсюда $r_3 = 21$
 $42 = 42$ $AB = 47$. $r_2 = 10,5$
 $r_1 = 10,5$

$\sqrt{5}$

$$\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) \geq 1$$

$$\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) \geq \log_{\sqrt{x+3}-x} (\sqrt{x+3}-x)$$

$$x+5 \geq \sqrt{x+3}-x$$

$$2x+5 \geq \sqrt{x+3}$$

$$4x^2+20x+25 \geq x+3$$

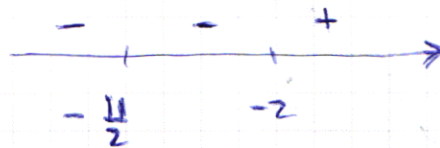
$$4x^2+19x+22 \geq 0$$

$$D = 9^2$$

$$x_1 = -\frac{11}{2}$$

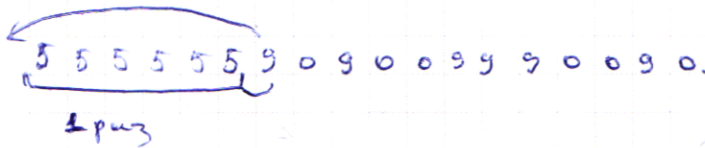
$$x_2 = -2$$

\Rightarrow



$$x \in [-2; +\infty)$$

$\sqrt{3}$



О.Д.З.

$$\sqrt{x+3}-x \geq 0$$

$x \neq -5$

$$\sqrt{x+3} \geq x$$

$$x+3 \geq x^2$$

$$x^2-x-3 \leq 0$$

$$D = \sqrt{13}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

2) $\overbrace{555555}^{\text{1 раз}} 90909990090$

3) $90\overbrace{555555}^{\text{3 раз}} 9009990090$

4) $909\overbrace{555555}^{\text{3 раз}} 009990090$

(Ответ: 13 чисел.)

Ответ: $13 \cdot 180 = 2340$ чисел.

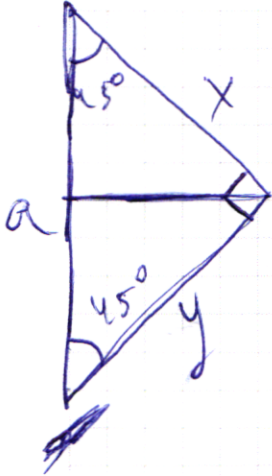
1404 чисел

13) $909009990090\overbrace{555555}^{\text{13 чисел}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5099955059999505500

555555909900900990



$xy = 42$
 $x^2 + y^2 = a^2$

18
16
108
18
288

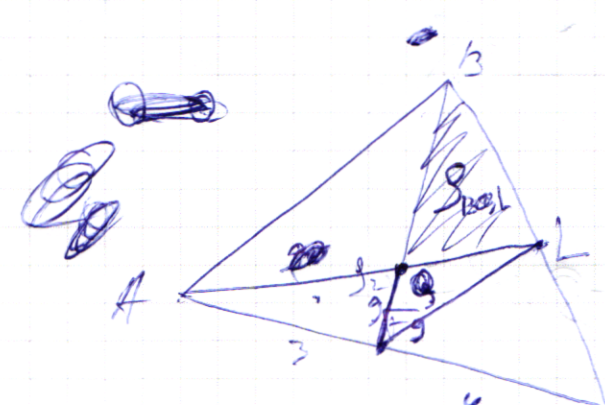
26
120

180
13
540
18
2340

$(x+5) \geq \sqrt{x+3} - x$

12 >
19 > 50

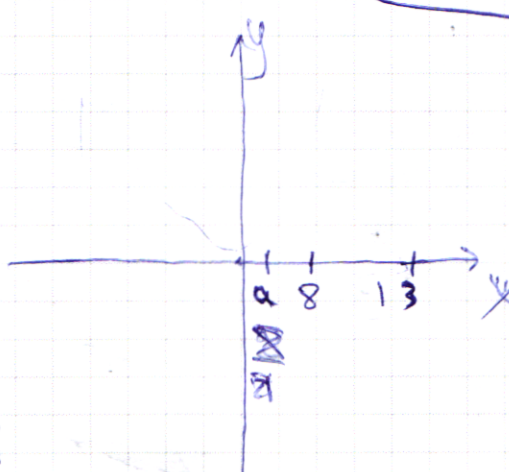
31 > 4



$S_{BQL} : S_{BAC} = 1:16$

$AF : FC = 3 : 4$

$\frac{5}{105} = \frac{x}{100\%}$
 $x = \frac{500}{105}$
 $x = \frac{100 - 169}{21} = \frac{64}{105}$



$a = \frac{8}{21}$

$a = \frac{100}{21} \cdot 8 \cdot \frac{1}{100} = a$

$169 - 64 = a$
 $13 - 8 = b$
 $\frac{c}{b} = a$
8 — 100%
a — $\frac{100}{21}\%$

$33 - 5 - 25$ $7 + \frac{35}{2} + 35 + 70 + 175$
 $70 - 4 - 24$
 $105 - 3 - 23$
 $140 - 2 - 22$
 $175 - 1 - 21$

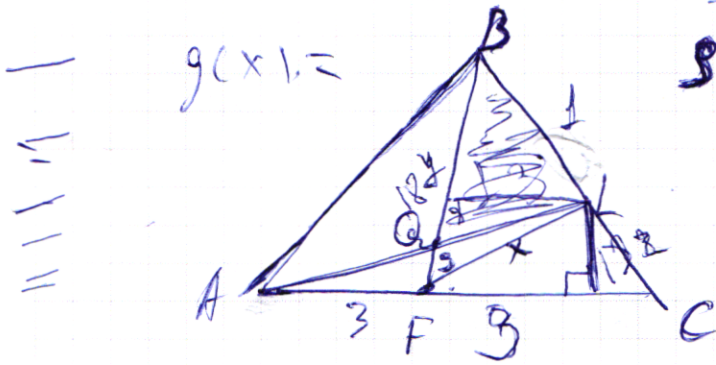
$187 + 35$
 $204 | 35$

240
 (210)

12
 9
 108
 13
 324
 108
 1404

$35 - 175 - 1$

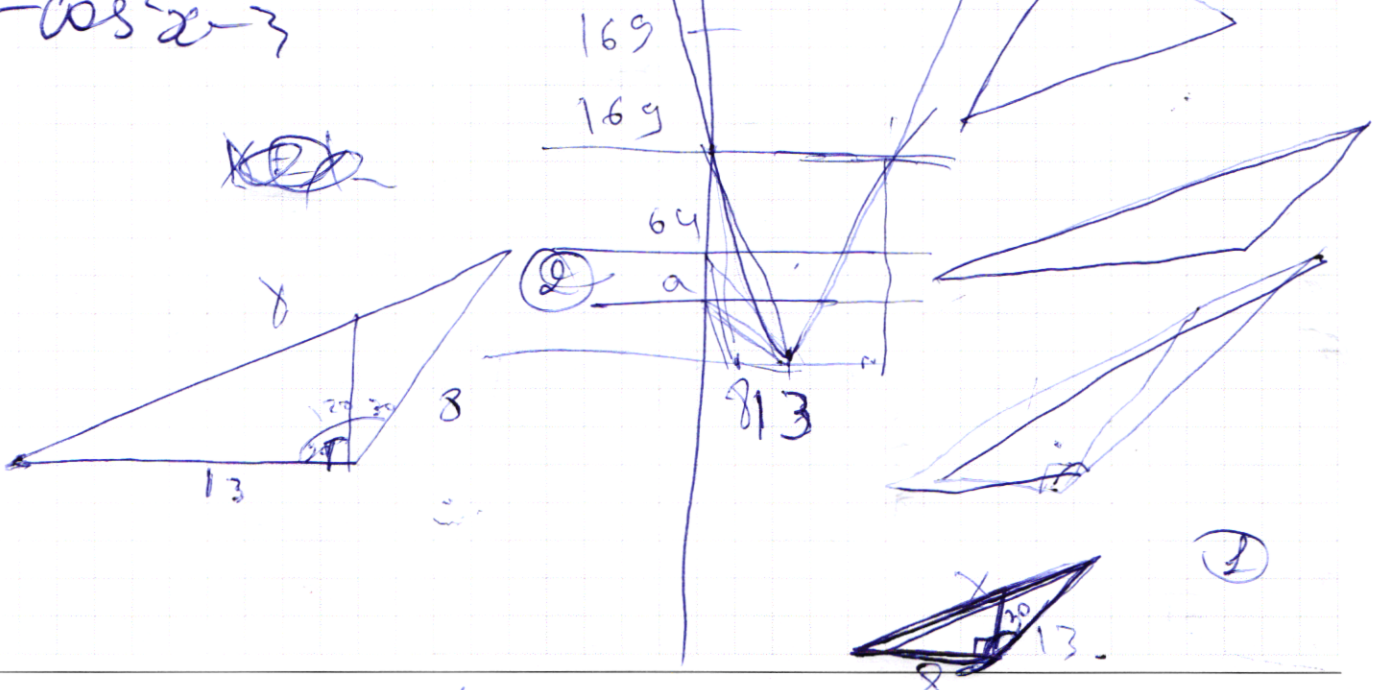
178
 $\sqrt{6}$



$S = \frac{1}{2} ah$

18
 13
 144
 18
 $324 + 9$
 $\sqrt{333}$

$= 3 \sin 5x \cdot \sin 9x + 8 \sin^2 7x$
 $- \cos^2 x - 3$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) \geq 2$ $\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) \geq 2$

$\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) \geq \log_{\sqrt{x+3}-x} (\sqrt{x+3}-x)$
 $x+5 \geq \sqrt{x+3}-x$
 $x+5 \geq \sqrt{x+3}-x$
 $2x+5 \geq \sqrt{x+3}$

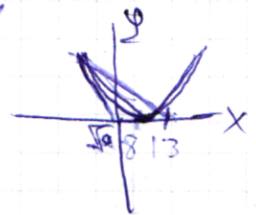
$4x^2 + 20x + 25 \geq x+3$

$4x^2 + 19x + 22 \geq 0$

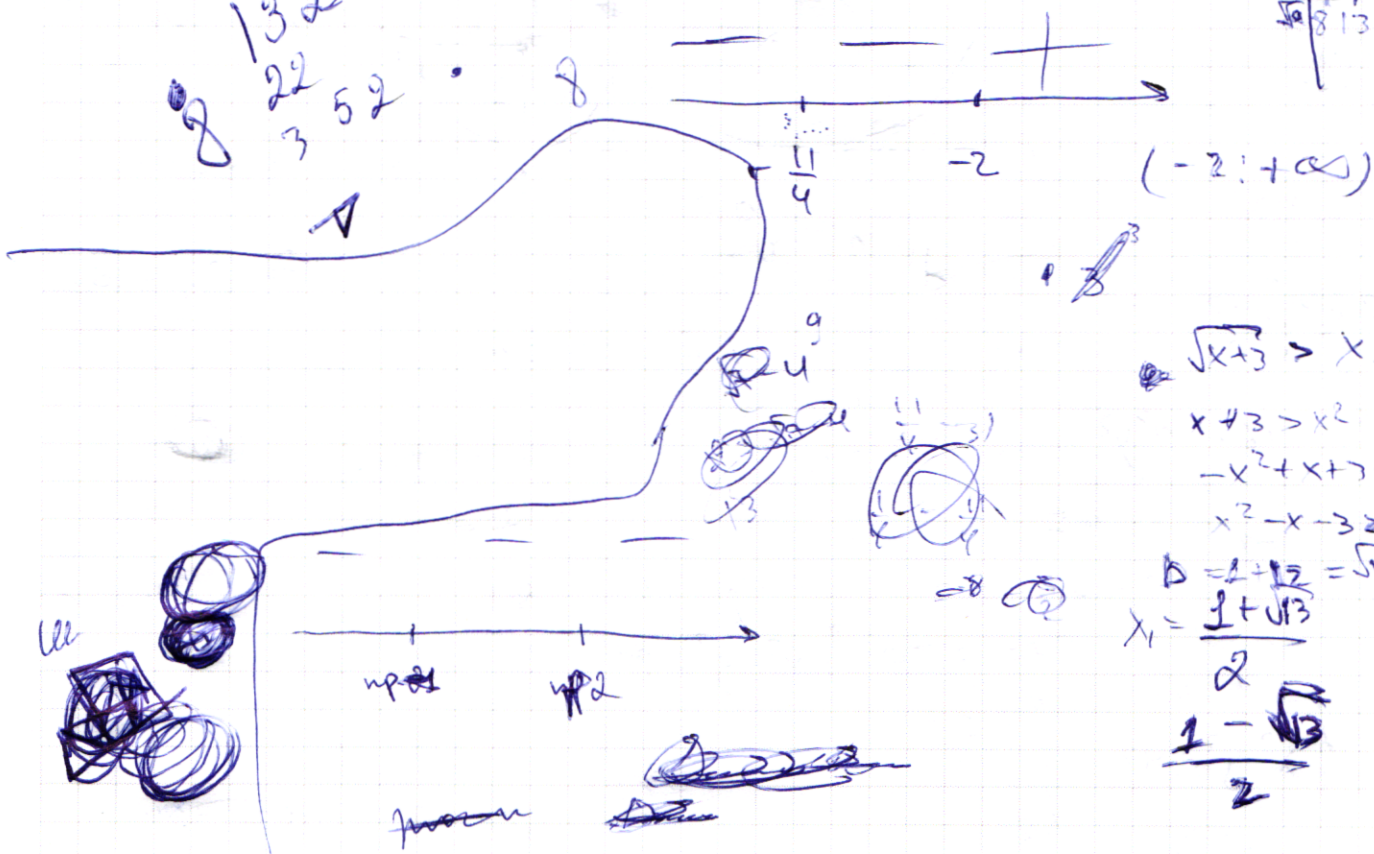
$D = 361 - 352 = 9 = 3^2$

$x_1 = \frac{-19-3}{8} = -\frac{22}{8} = -\frac{11}{4}$

$x_2 = \frac{-19+3}{8} = -2$



Handwritten calculations and scribbles on the left side of the page, including vertical divisions and various symbols.



$\sqrt{x+3} > x$
 $x+3 > x^2$
 $-x^2 + x + 3 > 0$
 $x^2 - x - 3 < 0$
 $D = 1+12 = \sqrt{13}$
 $x_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$
 $x_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$

$$\sqrt{x+3} - x \geq 0$$

$$x+3 > x^2$$

$$x^2 - x - 3 < 0$$

$$D = 1 + 12 = \sqrt{13}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x \in \left[-2; \frac{1 + \sqrt{13}}{2}\right)$$

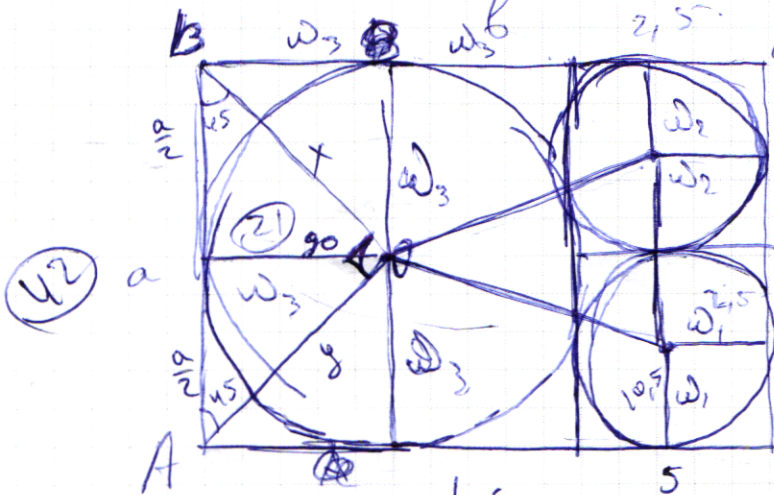
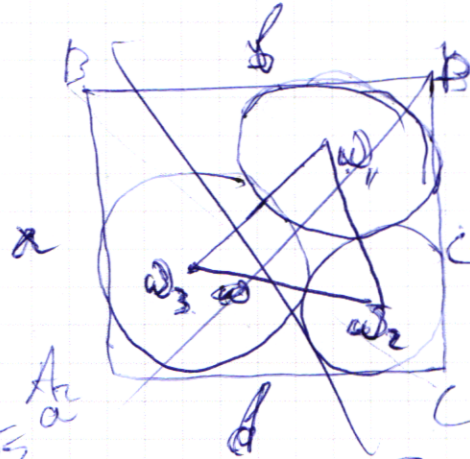
2nd log $\sqrt{6-3} (8) \geq 1$

$$8 \geq \sqrt{6-3}$$

$$11 \geq \sqrt{6}$$

~~$$x+3 \geq 0$$~~

$$(x+5) \geq \sqrt{x+3} - 3$$



$$\begin{cases} x \cdot y = 42 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

$$x = \frac{42}{y}$$

$$\frac{1764}{y^2} + y^2 = a^2$$

$$y^4 + 1764 = a^2 y^2 = 2\omega_3 + 2\omega_2$$

$$a =$$

$$d + b - 42 - 42 = 10$$

$$d + b - 84 = 10$$

$$\begin{cases} x \cdot y = 42 \\ x^2 - y^2 = 42 \end{cases} \quad d + b = \frac{94}{2}$$



47

$$\begin{cases} x - y = 42 \\ x^2 \cdot y^2 = a^2 \end{cases}$$

$$\frac{1764}{y^2} \cdot y^2 = a^2$$

$$a = 42$$

$$42 \omega_3 = 4 \omega_2$$

$$10 \omega_3 = 4 \omega_1$$

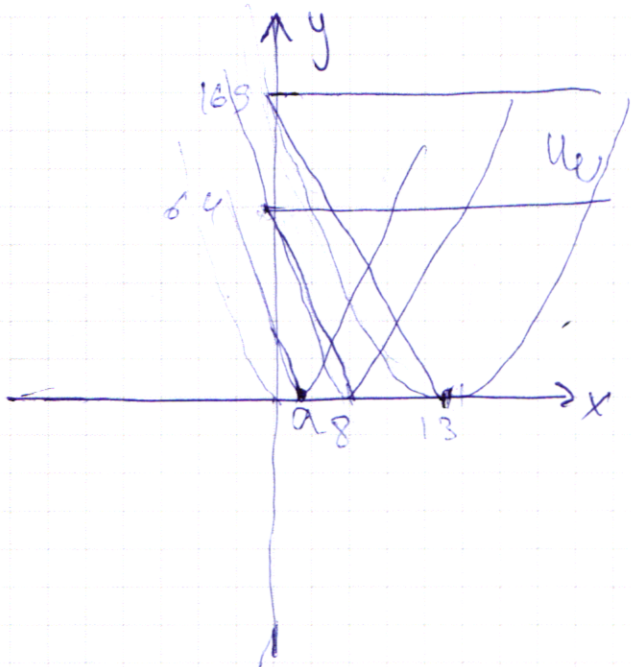
$$\omega_2 = \omega_1$$

$$x = \frac{42}{y}$$

$$\frac{1764}{y^2} + y^2 = 1764$$

$$a = 42$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



210

$\frac{8}{21}$ +



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)