МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2 ШИФР 12 СС2

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.

3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x + 5) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.

7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

12-002

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

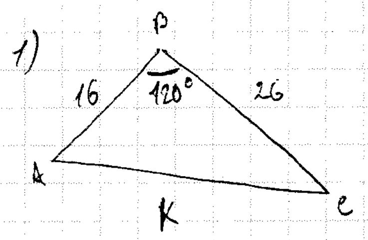
$y = x^2$ ~~Подставим $x^2=169$~~, значит при $y=169$ $x=\pm 13$;

при $y=64$ $x=\pm 8$

Причем отрезки будут равны {при $y=169$: $l=26$;

при $y=64$: $l=16$

1)



По т. косинусов:

$AC^2 = AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos\alpha$ ~~$AC=2\sqrt{2}\cdot a$~~

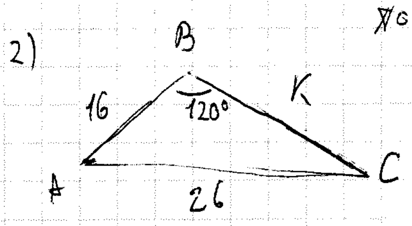
K^2

$\cancel{(2x)}^2 = 16^2+26^2+2\cdot 16\cdot 26\cdot\frac{1}{2} = 4(8^2+13^2+4\cdot 26)=$

$\cancel{(2x)}^2 = 4\cdot 337$

$K = 2\cdot\sqrt{337}$ $\boxed{a=337}$

2)



По т. косинусов

$AC^2=AB^2+BC^2+2AB\cdot BC\cdot\cos\alpha$

$BC=K$ $BC^2=AC^2-AB^2+2AB\cdot BC$

$BC^2 = 26^2-16^2-16BC$

$k^2+16k-4\cdot 105=0$

$D = 16^2+16\cdot 105 = 16\cdot 121$

$k_1 = \frac{-16+4\cdot 11}{2} = \frac{28}{2} = 14$ $\boxed{a=49}$

$k_2 = \frac{-16-44}{2}$ — не удовл. условиям

Ответ: $a=337$; $a=49$

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№2 $g(x) = \sin 5x \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

$g'(x) = (\sin' 5x)(\sin 9x) + (\sin' 9x)\sin 5x - 2\cdot 7 \sin 7x \cos 7x + 2\cos x \sin x = 0$

$5\cos 5x \cdot \sin 9x + 9\cos 9x \cdot \sin 5x - 14 \sin 7x \cos 7x + 2\sin x \cos x = 0$

$\frac{5}{2}\sin 14x + \frac{5}{2}\sin 4x - \frac{9}{2}\sin 4x + \frac{9}{2}\sin 14x - 24\sin 14x + \sin 2x = 0$

$-17\sin 14x + \cancel{\frac{5}{2}}\ 2\sin 4x + \sin 2x = 0$

Видно, что выражение равно 0 только при

$$\begin{cases} \sin 14x = 0 & x = \frac{\pi n}{14} \\ \sin 4x = 0 & x = \frac{\pi n}{4} \\ \sin 2x = 0 & \boxed{x = \frac{\pi n}{2}} \end{cases}$$

при $n = 1$, и всех нечетных

$\sin \frac{5\pi}{2} \sin \frac{9\pi}{2} - \sin^2 \frac{7\pi}{2} - \cos^2 \frac{\pi}{2} - 3 = 1 - 1 - 0 - 3 = \boxed{-3}$

при $n = 2$, и всех четных

$\sin 5\pi \sin 9\pi - \sin^2 7\pi - \cos^2 \pi - 3 = -1 - 3 = \boxed{-4}$

Ответ: $\boxed{-3}$ - максимальное знач., $\boxed{-4}$ - минимальное знач.

№5

$\log_{\sqrt{x+3} - x}(x+5) \geq 1$

ОДЗ: $x > -5$

$x \geq -3$

$\sqrt{x+3} - x > 0$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+3 > x^2 \\ x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+3 > 0 \\ x \leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

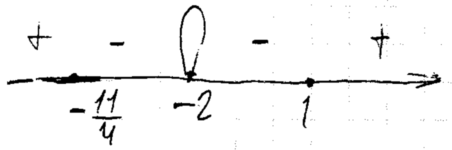
$\sqrt{x+3} - x \neq 1$

Прорационализируем:

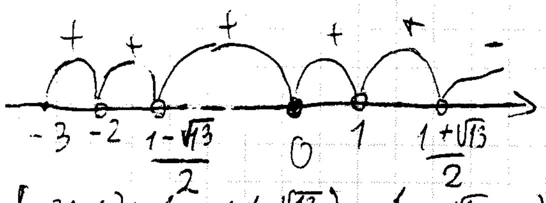
$(\sqrt{x+3} - x - 1)(x + 5 - \sqrt{x+3} + x) \geq 0$

$(x^2 + x - 2)(4x^2 + 19x + 22) \leq 0$

$(x+2)(x-1)(x+2)(x + \frac{11}{4}) \leq 0$



$x \in [-\frac{11}{4}; -2] \cup (-2; 1]$



$x \in [-3; -2) \cup (-2; \frac{1-\sqrt{13}}{2}) \cup (\frac{1-\sqrt{13}}{2}; 0)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

1.2 - cc.2

ШИФР

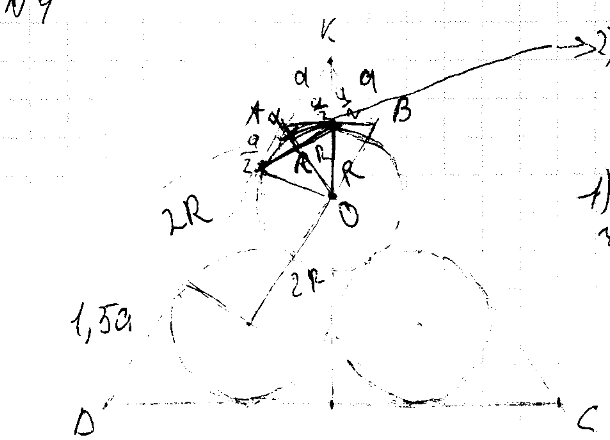
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Сопоставим с ОДЗ; $\cup [0;1) \cup (1; \frac{1+\sqrt{13}}{2})$

Ответ: $k \in [-\frac{11}{4}; -2) \cup (-2; \frac{1-\sqrt{13}}{2}) \cup (\frac{1-\sqrt{13}}{2}; 0] \cup (0; 1)$

№4



~~2) $R^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + 2a^2\cos\alpha$ (по т. косинусов)~~

1) Если достроить BC и AD, и обозначить точку пересечения K, то DKC - равносторонний треугольник (KC = KD = DC ~~= 6k~~ касательные к окружностям с равными радиусами)

Пусть KB = AK = a, тогда

2) $R^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - 2a^2\cos\alpha$ ($\alpha = 120°$)

$AD + BC - AB - CD = 2(2a + 2R) - a - 3a - R =$

$= 4a + 4R - a - 3a - R = 10$

$R = a\sqrt{\frac{3}{2}}$

$a = R \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{10}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$

$3R = 10$

$\boxed{R = \frac{10}{3}}$

$tg\frac{AOB}{2} = \frac{a}{2R} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$

$\boxed{\angle AOB = 2arctg\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} + 2\pi n}$

3. Вариантов расставления „5-ок" - 13

все остальные цифры будут кодироваться 2^{10} вариантов (учитывая, что 1 цифра из 2-ух оставшихся обязательно должна быть в числе и первая цифра не „0")

Значит $2^{10} + 13 = 1024 + 13 = 1037$ вариантов

Ответ: 1037 чисел

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

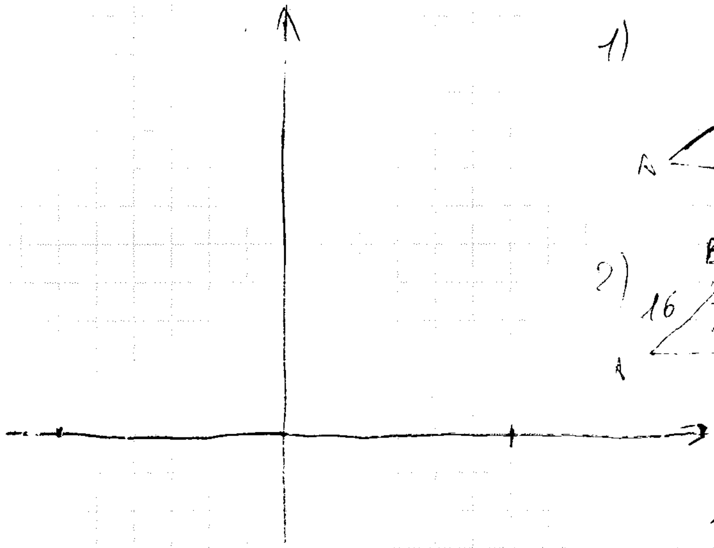
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

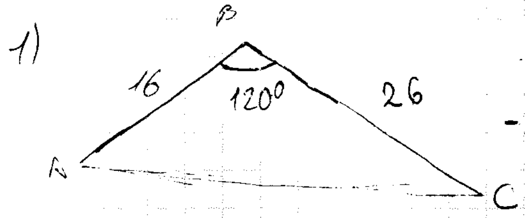
15-002

ШИФР

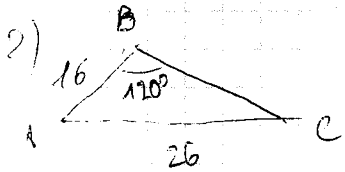
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\,BC \cdot \cos\alpha$



$AC^2 = 16^2 + 26^2 -$

$+ 2 \cdot 16 \cdot 26 \cdot \frac{1}{2} -$

$4(8^2 + 13^2 + \cancel{16} \cdot 26) =$ $\cancel{416}$

$= 4(64 + 169 + \cancel{104}) =$

$\cancel{= 4(1768 + 169)} =$

$\cancel{180 + 169 = 3}$

$\cancel{= 4 \cdot 337}$ $4(480 + 169)$

$\cancel{AC = 2\sqrt{337}}$ $4(649)$

$$\begin{array}{r} 26 \\ 16 \\ \hline 156 \\ 26 \\ \hline 416 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 168 \\ 169 \\ \hline \cancel{11\,64}7 \\ 33 \end{array}$$

2) ~~BC~~ $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\alpha$

$BC^2 = AC^2 - AB^2 + 2AB\,BC$

$BC^2 = 26^2 - 16^2 - \cancel{2} \cdot 16 \cdot BC$

$BC(BC + 16) = 4(169 - 64) - 16 \cdot BC$

$BC^2 = 4 \cdot (105 - 16BC$

$x^2 + 16x - 4 \cdot 105 = 0$

$D = 16^2 + 16 \cdot 105 = 0$

$D = 16(16 + 105) = 16 \cdot (121$

$x_1 = \frac{-16 + 4 \cdot 11}{2} = \frac{44 - 16}{2} = \frac{28}{2} = 14$

$$\begin{array}{r} 27 \\ 27 \\ \hline 189 \\ 54 \\ \hline 729 \end{array}$$

$AC = 2\sqrt{649}$

$\boxed{a = \sqrt{649}}$

649

$\boxed{a = 7}$ 49

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

2) $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

$g'(x) = (\sin 5x)' \sin 9x + (\sin 9x)' \sin 5x - 2 \cdot 7 \sin 7x \cdot \cos 7x + 2\cos x \cdot \sin x =$

$= 5\cos 5x \cdot \sin 9x + 9\cos 9x \cdot \sin 5x - 14 \sin 7x \cos 7x + 2\sin x \cos x =$

$=$

$\sin\alpha + \cancel{\cos} \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\frac{\alpha+\beta}{2} = 9x \quad \frac{\alpha-\beta}{2} = 5x \qquad \alpha+\beta = 18 \quad \alpha - \beta = 18$

$\alpha = 18 + \beta$

$\alpha + \beta = 18x \quad \alpha - \beta = 10x \quad 18 + 2\beta = 0$

$\alpha = 10 + \beta \qquad \beta = -4 \quad \alpha = 14$

$2\beta = 8x$

$\beta = 4x \quad \alpha = 14x$

$\frac{14}{2}$

$\cancel{10}: \frac{5}{2}\sin 14x + \frac{5}{2}\sin 4x + \frac{9}{2}\sin(-4x) + \frac{9}{2}\sin 14x - 24\sin 14x +$

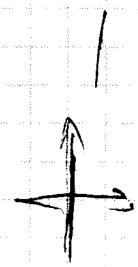
$+ \sin 2x =$

$= 7\sin 14x + 2\sin 4x + \sin 2x - 24\sin 14x =$

$= -17\sin 14x - 2\sin 4x + \sin 2x = 0$

$17\sin 14x + 2\sin 4x - \sin 2x$

$\begin{cases} \sin 14x = 0 \\ \sin 4x = 0 \\ \sin 2x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 14x = \pi n \\ 4x = \pi n \\ 2x = \pi n \end{cases} \quad x = \frac{\pi n}{14} \quad x = \frac{\pi n}{4} \quad \boxed{x = \frac{\pi n}{2}}$



-3

$g(x) = \sin\frac{5\pi n}{2}\sin\frac{9\pi n}{2} - \sin^2\frac{7\pi n}{2} - \cos^2\frac{\pi n}{2} - 3$

~~$17\sin 14x + 4\sin 2x\cos 2x - \sin 2x = 0$~~

$17\sin 14x + \sin 2x(4\cos 2x - 1) = 0$

~~$\sin 2x(8\cos^2 x - 4 - 1) + 17\sin 14x = \sin 2x(8\cos^2 x - 5)$~~

$\beta \cdot 0$

-4

$g(x) = 1 - 1 - 0 - 3 = \boxed{-3}$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

12-002

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

x x x x x x x x x x x x x

2 3 3 2 2 2 2 2

$18-6=12-5=7$

13 б.+ раст. 5 ок.

а ост.

$2^{12} \approx 2^5$

$2^{10}+13$

$19 \cdot 19 = 171$, $19 \cdot 19 = 361$

$16 \cdot 22 = 32$, 32, 352

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$

ОДЗ: $x \geq -5$

$x \geq -3$ $\quad \sqrt{x+3}-x>0$

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) - \log_{\sqrt{x+3}-x}(\sqrt{x+3}-x) \geq 0$

$\sqrt{x+3}-x>0 \quad \sqrt{x+3}-x \neq 1$

$(\sqrt{x+3}-x-1)(x+5-\sqrt{x+3}+x) \geq 0$

$\left[\begin{cases} x+3-x^2>0 \\ x>0 \end{cases}\right.$
$x+3>0$
$x \leq 0$

$x+3-x^2>0$

$x^2-x-3<0$

$D=1+12=13$

$x_{12}=\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$

$(x^2+x-2)(x+3-$

$2x+5 \geq \sqrt{x+3}$

$4x^2+20x+25-x-3 \geq 0$

$4x^2+19x+22 \geq 0$

$D=361-352=9$

$x_1=\frac{-19-3}{8}=-\frac{22}{8}=$

$=-\frac{11}{4}$

$x_2=-\frac{16}{8}=-2$

$-3 \quad -2 \quad \frac{1-\sqrt{13}}{2} \quad 1 \quad \frac{1+\sqrt{13}}{2}$

$+ \quad - \quad +$

$+ + + + + -$

$-3 \quad -2 \quad \frac{1-\sqrt{13}}{2} \quad 1 \quad 0 \quad \frac{1+\sqrt{13}}{2}$

$x+3-x^2-2x-1 \neq 0$

$x^2+x-2 \neq 0$

$x \neq -2 \quad x \neq 1$

$x \in [-3;-2) \cup (-2; \frac{1-\sqrt{13}}{2}) \cup (\frac{1-\sqrt{13}}{2}; 1) \cup [0,1] \cup$
$\cup (1; \frac{1+\sqrt{13}}{2})$

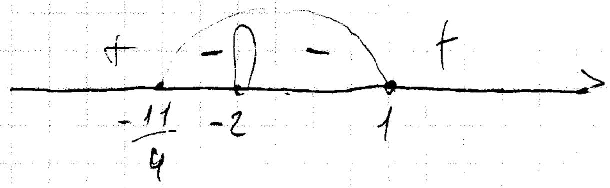
☒ черновик ☐ чистовик

Страница №__

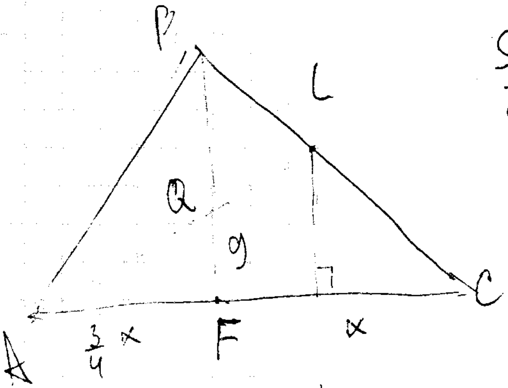
(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

$(x+2)(x-1)(x+2)(x+\frac{11}{4}) \le 0$



$$\boxed{[-\frac{11}{4}; -2) \cup (-2; \frac{1-\sqrt{13}}{2}) \cup (\frac{1-\sqrt{13}}{2}; 0] \cup (0; 1)}$$



$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{1}{16}$

$R =$

$\frac{a^2}{2} + 2a^2 \frac{1}{2}$

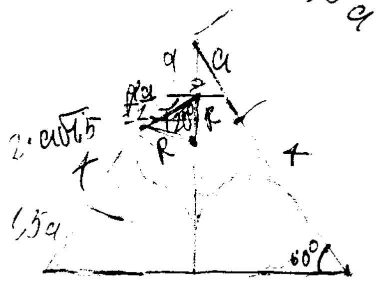
$\frac{a^2}{2} + a^2$

$1{,}5a$

$1{,}5a^2 = R$

$R = a\sqrt{1{,}5}$

$a\sqrt{\frac{3}{2}}$



$\cancel{1{,}5a+}$

$7a - a - 4{,}5a = 10$

$1{,}5a = 10$

$a = \frac{10}{1{,}5} \cdot 10^2 = \frac{20}{3}$

$a = \frac{20}{3}$

$-17\sin 14x - 2\sin 4x + 2\sin 2x$

$-34\sin 2x \cos 7x - 2\sin 4x + 2\sin 2x = 0$

$-1 \le \sin 14x \le 1$

$-17 \le -17\sin 14x \le 17$

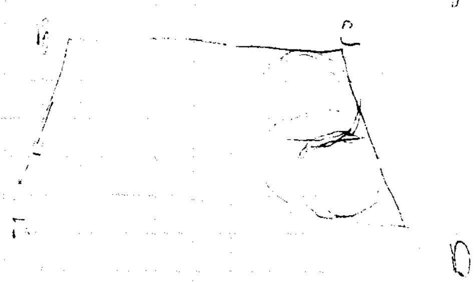
$\frac{a^2}{2} + 1{,}5a^2 = R^2$

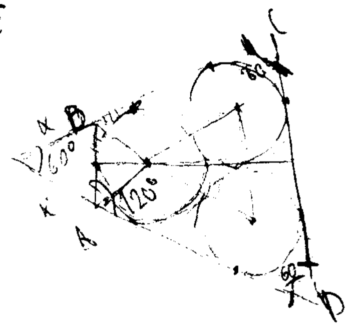
$R = a\sqrt{\frac{3}{2}}$

$R = \frac{20}{3} \cdot 2\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{40}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}$

$AD + BC - AB - CD = 10$

$x - 2a = 10$





$2a - x + a - x = 10$

$3a - x = 10$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

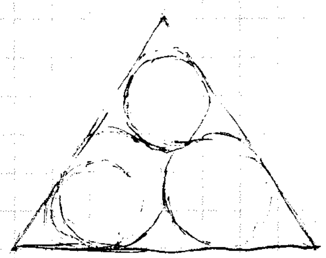
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

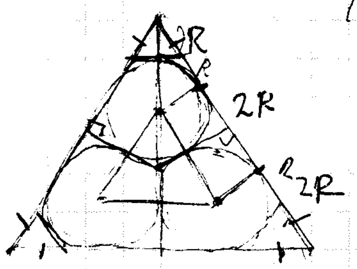
12-002

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$10R - 8R = R = 10$

$4R$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)