

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО  
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1

ШИФР

6-006

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола  $y = 2x^2$  пересекает прямые  $y = 98$ ,  $y = 18$  и  $y = a$ , высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра  $a$  из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом  $120^\circ$ ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$ .
3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник  $ABCD$ . Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ , причём  $\omega_1$  касается сторон  $AD$  и  $DC$ ,  $\omega_2$  касается сторон  $DC$  и  $CB$ , а  $\omega_3$  касается сторон  $CB$ ,  $BA$  и  $AD$ .
  - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что  $AD + BC - AB - CD = 12$ .
  - б) Найдите угол  $AOB$ , где  $O$  – центр окружности  $\omega_3$ .
  - в) Пусть дополнительно известно, что  $AO \cdot BO = 58$ . Найдите  $AB$ .
5. Решите неравенство  $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$ .
6. Точки  $F$  и  $L$  лежат на сторонах  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  соответственно, причём  $AF : FC = 2 : 5$ . Отрезки  $BF$  и  $AL$  пересекаются в точке  $Q$ ; площади треугольников  $BQL$  и  $BAC$  относятся как  $5 : 12$ . Найдите расстояние от точки  $L$  до прямой  $AC$ , если расстояние от точки  $Q$  до прямой  $AC$  равно 6.
7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка  $[1; 45]$ ,  $[46; 90]$ ,  $[91; 135]$ ,  $[136; 180]$ ,  $[181; 225]$ . Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Найдём точки пересечения параболы и прямой:

$$x_1 = x_2, y_1 = y_2 \Rightarrow 2x^2 = y, \quad x = \pm \sqrt{\frac{y}{2}}$$

1.  $A(7; 98)$ ,  $A'(-7; 98)$  — с прямой  $y = 98$

2.  $B(3; 18)$ ,  $B'(-3; 18)$  — с прямой  $y = 18$

3.  $C(\sqrt{\frac{a}{2}}; a)$ ,  $C'(-\sqrt{\frac{a}{2}}; a)$  — с прямой  $y = a$

Найдём длины отрезков  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$

$$\vec{AA'}(14; 0) \Rightarrow |AA'| = 14$$

$$\vec{BB'}(6; 0) \Rightarrow |BB'| = 6$$

$$\vec{CC'}(\sqrt{2a}; 0) \Rightarrow |CC'| = \sqrt{2a}$$

Составив из этих трёх отрезков треугольник с углом  $120^\circ$ , применим теорему косинусов. Угол  $120^\circ$  — тупой, а значит — наибольший в данном треугольнике. Против большего угла лежит большая сторона, а значит существует 2 случая:

1. Против угла  $120^\circ$  лежит отрезок  $CC'$ :

$$|CC'|^2 = |AA'|^2 + |BB'|^2 - 2|AA'||BB'| \cos 120^\circ$$

$$2a = 196 + 36 - 2 \cdot 6 \cdot 14 \cdot (-\frac{1}{2})$$

$$a = 98 + 18 + 42$$

$$a_1 = 158$$

2. Треугольник угла  $120^\circ$  делит отрезок  $A'A^*$ :

$$|\vec{A'A}|^2 = |\vec{B'B}|^2 + |\vec{C'C}|^2 - 2|\vec{B'B}||\vec{C'C}|\cos 120^\circ$$

$$196 = 36 + 2a - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 6 \cdot \sqrt{2a}$$

Отбрасываем  $\sqrt{2a} = k$

$$k^2 + 6k - 160 = 0$$

$k_1 = -16$  — не подходит, т.к.  $\sqrt{2a} \geq 0$

$k_2 = 10$        $\sqrt{2a} = 10$

$$a_2 = 50$$

Ответ:  $a_1 = 158, a_2 = 50.$

$\sqrt{2}$ .

$$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$$

$$\sin 3x \cdot \sin 7x = -\frac{1}{2}(\cos 10x - \cos 4x)$$

$$4 - \sin^2 x = 3 + \cos^2 x$$

$$\cos^2 5x = \frac{1}{2} \cos 10x + \frac{1}{2}$$

$$g(x) = -\frac{1}{2} \cos 10x + \frac{1}{2} \cos 4x + \cos^2 x + \frac{1}{2} \cos 10x + 3,5$$

$$\frac{1}{2} \cos 4x = \frac{1}{2} \cos^2 2x - \frac{1}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2}$$

$$g(x) = \cos^2 2x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} + 3,5 = \cos^2 2x + \frac{1}{2} \cos 2x + 3,5$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 2x = k, \quad k \in [-1; 1], \quad g(x) \equiv f(k)$$

~~$$g(x) = f(x)$$~~

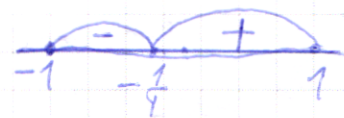
$$f(k) = k^2 + 0,5k + 3,5$$

$$f'(k) = 2k + 0,5$$

$$k_0 = -\frac{1}{4}, \quad k \neq k_0$$

$$k > k_0, \quad f'(k) > 0$$

$$k < k_0, \quad f'(k) < 0$$



$f(k_0)$  — минимум

$$f(-1) = 1 - 0,5 + 3,5 = 4$$

$$f(1) = 1 + 0,5 + 3,5 = 5$$

}  $f(1)$  — максимум,  $x_i = \pi k$

$$f(k_0) = \frac{1}{16} - \frac{1}{8} + 3\frac{1}{2} = 3\frac{3}{8} = 3,375, \quad x_0 = \pm \frac{1}{2} (\arccos(-\frac{1}{4})) + \pi k$$

Ответ:  ~~$f(\pi k) = 5$~~   $g(\pi k) = 5$  — максимум,  $g(x_0) = 3\frac{3}{8}$  — минимум.

№3.

В семнадцатом значном числе Фигур 8, а значит оставшиеся 10 знаков мы заменим либо 0, либо 7.

Рассмотрим два случая:

1. Число начинается с цифры 7:

Оставшиеся девять знаков мы заполняем цифрами 0 и 7, исключая вариант 9 семёрок, т.к. по условию каждая цифра встречается хотя бы раз.

$k_1$  — число вариантов первого случая

$a_1$  — число вариантов заполнения 9 ячеек (знаков)

$b_1$  — число вариантов размещения 7 восьмёрок, ~~тогда~~ для первого случая

$$k_1 = a_1 \cdot b_1$$

$$a_1 = 2^9 - 1$$

$b_1 = 11$  (последняя восьмёрка из восьми занимает места с 0 до 10, т.к. на ~~11~~ ~~не~~ если она стоит на  $n$  месте, первая цифра — 8)

$$k_1 = (2^9 - 1) \cdot 11$$

2. Число начинается с цифры 8 (с нуля оно, очевидно, начинаться не может):

Оставшиеся 10 знаков мы заполняем цифрами 0 и 7, исключая 10 семёрок и 10 нулей.

$k_2$  — число вариантов второго случая

$a_2$  — число вариантов заполнения 10 ячеек (знаков)

$b_2$ , очевидно, равно 1.

$$k_2 = 2^{10} - 2$$

$k$  — общее кол-во чисел, удовлетворяющих условию задачи.

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$k = k_1 + k_2 = (2^9 - 1) \cdot 11 + 2 \cdot (2^9 - 1) = 13 \cdot (2^9 - 1)$$

$$k = 6643 \text{ тысяч}$$

Ответ: 6643 тысяч.

№5.

$$\log_{\sqrt{x+7}-x} (x+4) \geq 1$$

ОДЗ: 1.  $x+4 > 0$ ,  $x \neq -4$

2.  $\sqrt{x+7} - x > 0$

$$\sqrt{x+7} > x$$

2.1.  $x \leq 0$ ;  $x \geq -7$ ,  $\sqrt{x+7} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x+7} > x$ ,  $x \in [-7; 0]$

2.2.  $x > 0$ ,

$$x^2 < x+7$$

$$x^2 - x - 7 < 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+28}}{2}$$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{29}}{2}$$

$$x_2 = \frac{1 - \sqrt{29}}{2}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\sqrt{29}-1}{2} < x < \frac{\sqrt{29}+1}{2} \\ x > 0 \end{array} \right. \Rightarrow x \in (0; \frac{\sqrt{29}+1}{2})$$

3.  $\sqrt{x+7} - x \neq 1$

$$x^2 + 2x + 1 \neq x + 7; x > -7$$

$$x^2 + x - 6 \neq 0$$

$$x_1 \neq -3 \quad x_2 \neq 2$$

ОДЗ:  $x \in (-4; -3) \cup (-3; 2) \cup (2; \frac{\sqrt{29}+1}{2})$



$$\log_{\sqrt{x+7}-x} (x+9) \geq 1$$

$$1. \sqrt{x+7}-x \leq 1$$

$$\sqrt{x+7} < x+1, x > -1$$

$$x+7 < x^2+2x+1$$

$$x^2+x-6 > 0$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -3) \cup (2; +\infty) \\ x > -1 \end{cases} \Rightarrow x \in (2; +\infty) \quad x > 2$$

$$x+9 \leq \sqrt{x+7}-x$$

$$2x+9 \leq \sqrt{x+7}$$

$$\text{1.1. } x \text{ н.к. } x > 2, 2x+9 > 0$$

$$4x^2+16x+10 \leq x+7$$

$$4x^2+15x+3 \leq 0$$

$$x_1 = \frac{-15 + \sqrt{225-144}}{8} = -\frac{3}{4}$$

$$x_2 = \frac{-15 - \sqrt{81}}{8} = -3$$

$$\begin{cases} x \in [-3; -\frac{3}{4}] \\ x > 2 \end{cases} \Rightarrow x = \emptyset$$

$$2. \sqrt{x+7}-x > 1$$

$$\sqrt{x+7} > x+1$$

$$2.1. x \leq -1, x+1 \leq 0, \sqrt{x+7} > 0, x \in \mathbb{R}$$

$$2.2. x > -1$$

$$x+7 > x^2+2x+1$$

$$x^2+x-6 < 0$$

$$x \in (-3; 2)$$

$$\begin{cases} x \in (-3; 2) \\ x > -1 \\ x \leq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-1; 2) \\ x \leq -1 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty; 2)$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x+4 \geq \sqrt{x+7} - x$$

$$2x+4 \geq \sqrt{x+7}$$

$$\Leftrightarrow 1. \quad \cancel{x \leq \frac{1}{2}}, \quad 2x+4 \leq$$

$$x > -\frac{1}{2}$$

$$9x^2 + 16x + 16 \geq x + 7$$

$$9x^2 + 15x + 9 \geq 0$$

$$\begin{cases} x \geq -\frac{3}{4} \\ x \leq -3 \\ x < 2 \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x \in \left[-\frac{3}{4}; 2\right)$$

$$\text{OAB: } x \in (-4; -3) \cup (-3; 2) \cup \left(2; \frac{\sqrt{29}+1}{2}\right)$$

$$x \in \left[-\frac{3}{4}; 2\right)$$

$$\text{Ответ: } x \in \left[-\frac{3}{4}; 2\right)$$

$\sqrt{7}$

\* Представим каждое число, выбранное Тимохеем в виде

$$a = 95n + k + 1, \quad \text{где } n = 0 \text{ для первых } 6 \text{ чисел}$$

$$k \in [0; 49]$$

$$k \in \mathbb{Z}, k \neq$$

$$n = 1 \text{ для вторых } 6 \text{ чисел}$$

...

$$n = 4 \text{ для пятых } 6 \text{ чисел.}$$

Очевидно, что разность двух чисел делится на 95, если их остатки при делении на 95 равны.

Значит, для каждого из 30 чисел остатки это разное.

Сумма чисел будет равна

$$\sum a = 0 \cdot 6 \cdot 95 + 1 \cdot 6 \cdot 95 + 2 \cdot 6 \cdot 95 + 3 \cdot 6 \cdot 95 + 4 \cdot 6 \cdot 95 + \sum (k+1)$$

$$\sum a = 40 \cdot 950 \cdot 6 + \sum (k+1)$$

Сумма будет минимальна, если  $\sum (k+1)$  будет минимальна, причём  $\sum (k+1)$  — сумма тридцати различных чисел от 1 до 95.

$\sum (k+1)$  будет минимальна, если взять минимальные 30 значений  $k$

$$k \in [0; 29]$$

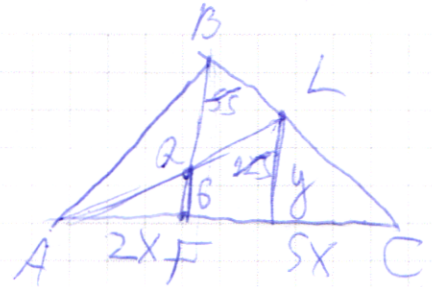
$$\sum (k+1) = \sum_{k=1}^{30} k = \frac{30 \cdot 31}{2}$$

$$\sum a = 180 \cdot 95 + 31 \cdot 95 = 211 \cdot 95 = 3165$$

Ответ: 3165.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.  $A(7; 98) \quad A'(-7; 98)$   
 $B(3; 18) \quad B'(-3; 18)$   
 $C(\sqrt{\frac{a}{2}}; a) \quad C'(-\sqrt{\frac{a}{2}}; a)$



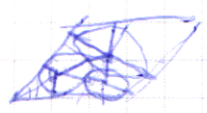
~~$ABC \quad AB'C \quad A'BC \quad A'B'C$~~   
 ~~$ABC' \quad AB'C' \quad A'BC' \quad A'B'C'$~~

~~$\vec{AB} \quad \vec{BA}(9; 80)$~~   
 ~~$\vec{BC} \quad (3\sqrt{\frac{a}{2}}; \sqrt{\frac{a}{2}} - 3; a - 18)$~~   
 ~~$\vec{AC} \quad (\sqrt{\frac{a}{2}} - 7; a - 98)$~~

$2 \cdot 35x - 6x + \frac{5}{12}S = \frac{5}{7}S$   
 $3 \cdot 35x - 6x = \frac{60-35}{84}S$   
 $S = 2 \cdot 35xH$   
 $7y - 12 = \frac{25H}{12}$

$\vec{A'A} \quad (14; 0)$   
 $\vec{B'B} \quad (6; 0)$   
 $\vec{C'C} \quad (\pm\sqrt{2a}; 0)$

$|A'A| = 14$   
 $|B'B| = 6$   
 $|C'C| = \sqrt{2a}$



$CC'^2 = A'A^2 + B'B^2 - 2A'A \cdot B'B \cdot \cos 120^\circ$

$2a = \frac{196+36}{20} - 168 \cdot -\frac{1}{2}$

$2a = 196 + 36 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 6$   
 $98 + 18 + 42$

~~$a = 98 + 18 + 84$~~

$a_1 = 158$

~~$a_1 = 200$~~   
 $k + 6k - 160 = 0$   
 $k_1 = 10 \quad \frac{a-50}{2}$

$2a \cdot a + 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{a} - 150 = 0$   
 $a = \frac{-3\sqrt{2} \pm \sqrt{18 + 670}}{2}$

$196 = 2a + 36 + 7 \cdot 6 \sqrt{2a}$



$$\cos^2 5x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cos 10x$$

$$g(x) = (\sin 3x \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4)$$

$$g(x) = -\frac{1}{2}(\cos 10x - \cos 4x) - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$$

$$\cos x - \cos \frac{\pi}{2} = -2 \sin\left(\frac{\pi+x}{2}\right) \sin\left(\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}\right) = 0$$

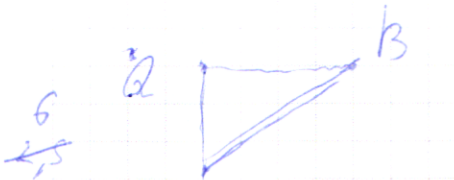
15  
314

$$g'(x) = 5 \sin 10x - 2 \sin 4x - 2 \sin x \cos x - 5 \sin 5x \cos 5x$$

$x = 0 + 2\pi k$   
 $x = \pi$   
 $x = \frac{3\pi}{2}$   
 $x = \frac{\pi}{5}$   
 $\frac{3\pi}{5}, 10, 7, 5\pi$   
 $\frac{2}{2}(2 \cos^2 2x + \cos 2x - 1)$

$0, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{2}, \dots, \frac{3\pi}{5}, \pi$   
 $\sqrt{3}$

8888888 7 6 5 4 3 2 1 0

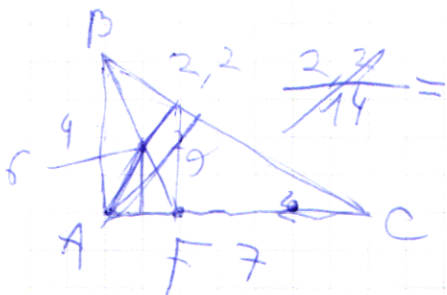


$$2^{10} - 2^9 = 2^9 - 1$$

$$(2^9 - 1) \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$12 \cdot (2^9 - 1)$$

$$\frac{5,5\pi}{2}$$

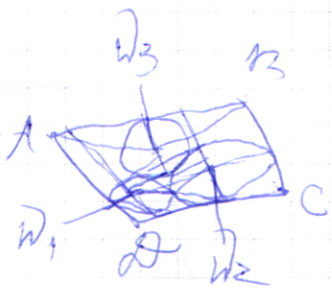


$\sqrt{4}$

$$\frac{7}{2} < \frac{11}{2}$$

$$\frac{11}{7} < \frac{5}{2}$$

$$13,2 < 35$$



$$\begin{array}{r} \times 511 \\ 13 \\ \hline 1533 \\ 511 \\ \hline 5643 \end{array} \Bigg| \begin{array}{r} 13 \\ 511 \end{array}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

√5

$$\log_{\sqrt{x+7}-x} (x+4) \geq 1$$

3,25

~~1,75~~

3,25

1.  $x \geq -7$      $\sqrt{x+7}-x > 0$      $\sqrt{x+7}-x \neq 1$      $x \geq -4$

2.  $x \geq 0$

3.  $\sqrt{x+7} \neq x+1$  &

$2x+4 = \sqrt{x+7}$

$x+7 > x^2$

$x+7 \neq x^2+2x+1$

$x^2-x-7 < 0$

$x^2+x-6 \neq 0$

~~9~~

$x = -3$

$(x-4)(x+3) < 0$

$x_1 \neq -3$

$x \in (-3; 4)$

$x_2 \neq 2$

$x \in [0; 4)$

$x \in [-7; -3) \cup (-3; 2) \cup (2; 4)$

3.  $x < 0, x \geq -7$

если

$\sqrt{x+7}-x \leq 1$

$\sqrt{x+7} \leq x+1$

$x+7 \leq x^2+2x+1$

$x^2+x-6 \geq 0$

$x \geq 2; x \leq -3$

$x+4 \geq \sqrt{x+7}-x$

$4x^2+16x+16 \geq x+7$

$\Rightarrow 4x^2+15x+9 \geq 0$

$x \geq 2$

$x_1 = \frac{-15 \pm \sqrt{225-144}}{8}$

$x_1 = -3 \quad x_2 = -0,75$

если &

$\sqrt{x+7}-x \geq 1$

$\sqrt{x+7} \geq 1+x \quad x \leq -1$

$x+7 \geq x^2+2x+1$

$x^2+x-6 \leq 0$

$-3 \leq x \leq 2$

$x+4 \leq \sqrt{x+7}-x$

$2x+4 \leq \sqrt{x+7} \quad x \leq -2$

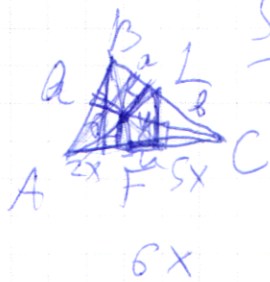
$4x^2+16x+16 \leq x+7$

$4x^2+15x+9 \leq 0$   
 $x \in (-1; -0,75]$

$x \in (-4; -3) \cup$   
 $\cup [-1; -0,75]$

н.с.

$$\frac{y}{5x-u} = H$$



$$\frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{5}{12}$$

$$\frac{u+2x}{2x} = \frac{y}{5}$$

$$y = \frac{(2.5H+5)}{3.5}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 7xy$$

$$x \cdot H - 6x$$

$$S_{\triangle ABF} =$$

н.с.

$$\frac{1}{2} \cdot 7xy + S_{\triangle ABF} = \frac{7}{12} S_{\triangle ABC}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 7xy + (H-6)x = \frac{7}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 7x \cdot H$$

$$3.5y \cdot x = \frac{49}{24} H - H + 6$$

3.5y

$$\begin{array}{r} 3165 \overline{) 15} \\ 76 \overline{) 211} \\ \underline{75} \phantom{0} \\ 211 \phantom{0} \\ \underline{211} \\ 0 \end{array}$$

$$95n + a$$

$$a \quad 0, 1, 2, 3, \dots \quad 29$$

$$n = 0, 1, 2, 3, 4.$$

$$\frac{29 \cdot 30}{2}$$

$$15 \cdot 29$$

$$\begin{array}{r} \times 211 \\ 15 \\ \hline 1055 \\ 211 \\ \hline 3165 \end{array}$$

$$0 \cdot 95 \cdot 6 + 1 \cdot 95 \cdot 6 + 2 \cdot 95 \cdot 6 + 3 \dots$$

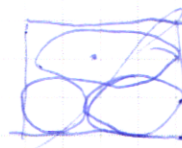
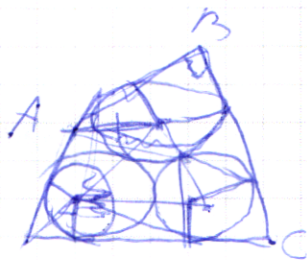
$$10 \cdot 95 \cdot 6 + 15 \cdot 29 = (180 + 29) \cdot 15$$

$$\frac{29 \cdot 30}{2}$$

$$\frac{31 \cdot 30}{2}$$

$$15 \cdot 29 \quad 15 \cdot 31$$

н.с.



$$x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}k$$

$$\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 4$$

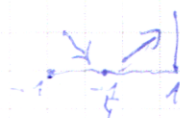
$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 4$$

$$-3.5$$

н.с.

$$2a^2 + a - 18$$

$$4a + 1 = c$$



$$a_0 = -\frac{1}{4} \quad a > a_0, y' > 0$$

$$a_1 = 1$$