

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

9 класс

БИЛЕТ 5

ШИФР

12 - 011

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 3x^2$ пересекает прямые $y = 147$, $y = 75$ и $y = a$, отсекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?
2. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD . Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 30$.
3. Чиполлино наклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 22 марки на каждый лист, то все его марки в альбом не поместятся, а если по 26 марок на каждый лист, то по крайней мере один лист останется пустым. Если преподнести Чиполлино в подарок точно такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 21 марке, то у него станет ровно 700 марок. Сколько марок сейчас у Чиполлино? (Все марки имеют один и тот же размер.)
4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax - 3a| \leq \sqrt{x - 1}$ является отрезок длины 4?
5. Найдите количество 19-значных чисел, содержащих только цифры "2", "5" и "7" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "7" ровно восемь, и они идут подряд.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $4 : 25$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 12.
7. Пиноккио выбрал по 5 чисел из каждого промежутка $[1; 25]$, $[26; 50]$, $[51; 75]$, $[76; 100]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 25. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати выбранных Пиноккио чисел?



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание № 5.

Всего в данном числе ~~9~~ будет записано 19 символов, т.е. число 19-значное, 8 из которых будут «7», идущие подряд. Т.к. указано, что цифра «7» ровно 8, и они идут подряд, то различные комбинации чисел с «7» могут появляться лишь при перестановке этого какого числа «х» (назовём так число, образованное ~~восемью~~ ^{восемью} «7» подряд) внутри числа «у» (назовём так ^{19ти-значное} число, данное в условии). Последняя цифра числа «х» может находиться на 12ти разных позициях (1ый разряд, 2ой, 3ий... 12ий разряд), а, значит, кол-во заданных 19-значных чисел не меньше 12. На оставшихся «местах» в числе «у» может находиться 1 из 2х цифр (5 или 7). Но т.к. сказано, что каждая цифра повторяется не менее 10го раза, то в двух случаях ~~в~~ ^в одном из разрядов будет содержаться лишь 1 возможная цифра. А значит, количество всех возможных вариантов различных 19-значных чисел равняется: $2^{10} \cdot 1 = 2^{10}$

Получается, общее кол-во 19ти-значных чисел составляет: $12 \cdot 1024 (2^{10}) = 12288$

Ответ: 12288

Задание № 7

Числа, составляющие 20й промежуток: $1 \cdot 25 + 1$,
 $1 \cdot 25 + 2$, $1 \cdot 25 + 3$, $1 \cdot 25 + 4$... $1 \cdot 25 + 24$, 25 .

Числа, составляющая 3ий промежуток: $2 \cdot 25 + 1$,
 $2 \cdot 25 + 2$, $2 \cdot 25 + 3$... $2 \cdot 25 + 24$, $3 \cdot 25$.

Числа, составляющие 4ий промежуток: $3 \cdot 25 + 1$,
 $3 \cdot 25 + 2$, $3 \cdot 25 + 3$... $3 \cdot 25 + 24$, $4 \cdot 25$.

А числа, составляющие 5ий промежуток - это остатки от деления на 25 в каждом промежутке.

Поэтому чтобы разность каких двух выбранных чисел не делилась на 25, нужно брать числа, остатки от деления на 25 которых не совпадают. Чтобы сумма выбранных Пиноккио чисел была наименьшей, то сумма остатков тоже должна быть наименьшей возможной. А, значит, она будет равна: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 +$
 $+ 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 21 \cdot 10 =$
 $= 210$. Тогда вся сумма будет равна:

$$5 \times (3 \cdot 25) + 5 \times (2 \cdot 25) + 5 \times (1 \cdot 25) + 210 = 910$$

Ответ: 910.

Задание № 3

Пусть x - кол-во листов в альбоме Чинполино,
а y - кол-во марок, которые есть у Чинполино

По условию, $\frac{y}{22} > x$, а $\frac{y}{26} < x$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{y}{22} > x \\ \frac{y}{26} < x \end{cases}$$

Известно также, что $x \cdot 21 + y = 700 \Rightarrow$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y = 700 - 21x$$

$$\begin{cases} \frac{y}{22} > x + 22 \\ \frac{y}{26} < x + 26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > 22x \\ y < 26x \end{cases}$$

Подставив найденное значение y , получим:

$$\begin{cases} 700 - 21x > 22x \\ 700 - 21x < 26x \end{cases}$$

Получаем систему из 2х уравнений с 1м неизвестным, которую легко решить:

$$\begin{cases} 22x + 21x < 700 \\ 26x + 21x > 700 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 43x < 700 \\ 47x > 700 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 16 \frac{12}{43} \\ x > 14 \frac{42}{47} \end{cases}$$

$x \in \left(14 \frac{42}{47}; 16 \frac{12}{43} \right)$ Так. кол-во страниц - это целое число, то из данного промежутка

выбираем целые числа. Это 15 и 16.

Если в альбоме 15 листов, то, по условию, $y = 700 - 21 \cdot 15 = 385$.

Тогда если Чипполино будет клеить по 26 марок на ~~каждый~~^{каждый} лист, то $(26 \cdot 15 = 390)$ у него останется место ещё под 5 марок $(390 - 385)$, а в условии было сказано, что хотя бы 1 лист будет пуст, а 1 лист - это место под 26 марок \Rightarrow в альбоме не ~~15~~^{15 листов}, а строго 16.

Неточности в ответе были вызваны тем, что изначально не было указ^{ан}о, что $\frac{y}{26} = x - 26 - a$, где a - некое число, отличное от "0".

Ответ: 16 листов.

Задача № 4.

$$|ax - 3a| \leq \sqrt{x-1}$$

По свойствам модуля:

$$\left\{ \begin{array}{l} ax - 3a \leq \sqrt{x-1} \\ ax - 3a \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ax - 3a > \sqrt{x-1} \\ ax - 3a < 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ax - 3a \leq \sqrt{x-1} \\ ax - 3a < 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ax - 3a > \sqrt{x-1} \\ ax - 3a \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ax - 3a \leq \sqrt{x-1} \\ ax - 3a \geq 0 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ax - 3a \leq \sqrt{x-1} \\ ax - 3a \geq 0 \end{array} \right.$$

нет корней

$$\sqrt{x-1} \geq 0. \text{ Если}$$

$$ax - 3a < 0, \text{ то}$$

$$ax - 3a \neq \sqrt{x-1} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ax - 3a \leq \sqrt{x-1} \\ ax - 3a \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ax - 3a \leq \sqrt{x-1} \\ ax - 3a \geq 0 \end{array} \right.$$

$$ax - 3a \leq \sqrt{x-1}$$

$$a(x-3) \leq \sqrt{x-1}$$

$$(a(x-3))^2 \leq (\sqrt{x-1})^2$$

$$a^2(x-3)^2 \leq x-1$$

$$a^2x^2 - 6a^2x + 9a^2 - x + 1 \leq 0$$

Пусть $y = a^2x^2 - 6a^2x + 9a^2 - x + 1$, тогда

$y = a^2x^2 - 6a^2x + 9a^2 - x + 1$ - квадратичная

функция, ветви которой направлены
вверх (ведь коэффициент при x^2 всегда больше
или равен 0).

$$a^2x^2 - 6a^2x + 9a^2 - x + 1 = 0$$

$$D = (6a^2 + 1)^2 - 4a^2(9a^2 + 1) = 36a^4 + 12a^2 + 1 - 36a^2 - 4a^2 = 8a^2 + 1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$26x$ ~~$\frac{y}{26} < x$~~ $\frac{y}{26} < x$ $\frac{y}{22} > x$

По принципу Дирихле

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times 29 \\ \hline 320 \\ + 36 \\ \hline 336 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{y}{26} < x \\ \frac{y}{22} > x \\ 22x + y = 700 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y < 26x \\ y > 22x \\ 22x + y = 700 - 21x \end{array} \right.$$

$$700 - 21x < 26x$$

$$700 - 21x > 22x$$

$$700 - 336 = 364$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 26x + 22x > 700 \\ 22x + 21x < 700 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 47x > 700 \\ 43x < 700 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > \frac{700}{47} \\ x < \frac{700}{43} \end{array} \right.$$

$x > \frac{700}{47}$

$$\begin{array}{r} 700 / 47 \\ - 47 \\ \hline 230 \\ - 188 \\ \hline 42 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times 47 \\ \hline 98 \\ + 560 \\ \hline 42658 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - 700 / 43 \\ - 43 \\ \hline 270 \\ - 258 \\ \hline 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 21 \\ \hline 300 \\ + 315 \\ \hline 315 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 22 \\ \hline 300 \\ + 300 \\ \hline 330 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 26 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 21 \\ \hline 300 \\ + 315 \\ \hline 315 \end{array}$$

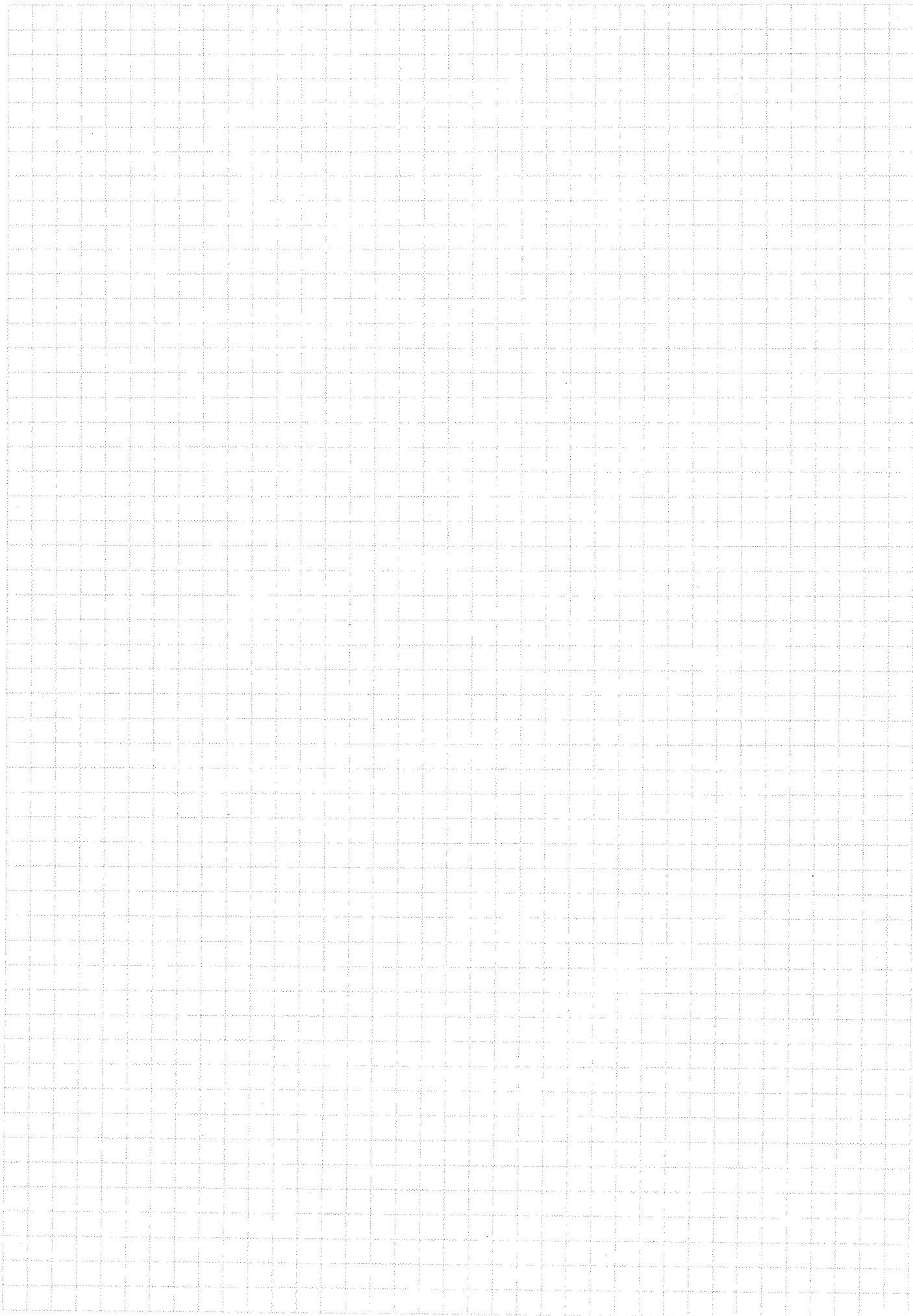
$$\begin{array}{r} 43 \\ \times 16 \\ \hline 258 \\ + 430 \\ \hline 688 \end{array}$$

336

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 22 \\ \hline 320 \\ + 336 \\ \hline 356 \end{array}$$

~~385~~

$$700 - 315 = 385$$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(a(x-3))^2 - x + 1 \leq 0$$

$$a^2(x^2 - 6x + 9) - x + 1$$

$$(a(x-3))^2 \leq x + 1$$

$$y = x + 1$$

$$y = (a(x-3))^2$$

$$-6a^2x - x = -6a^2(x+1)$$

$$x(-6a^2 + 1)$$

$$a^2x^2 - 6ax^2 + 9 - x + 1 \leq 0$$

$$(a^2x^2 - 6ax + 1)(x) + 8 \leq 0$$

~~$$a^2x^2 - 6ax + 1(x) + 8 \leq 0$$~~

~~$$D = 36a^2x$$~~

$$D = (6ax + 1)^2 - 32a^2 = 36a^2x^2 + 12ax + 1 - 32a^2 =$$

$$= 4a^2(9x^2 + 3x - 8)$$

$$4a^2(9x^2 - 8) + 12ax + 1$$

$$a^2x^2 - 6a^2x + 9a^2 - x + 1 = 0$$

~~$$a^2x^2 - 6a^2x$$~~

$$a^2x^2 - (6a^2 + 1)x + 9a^2 + 1 = 0$$

$$D = (6a^2 + 1)^2 - 4(9a^2 + 1) =$$

~~$$= 36a^4 + 12a^2 + 1 - 36a^2 - 4a^2 =$$~~

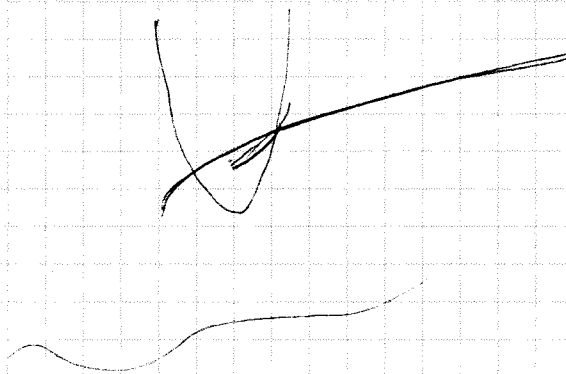
$$= 8a^2 + 1$$

$$|a(x-3)| \leq \sqrt{x-1}$$

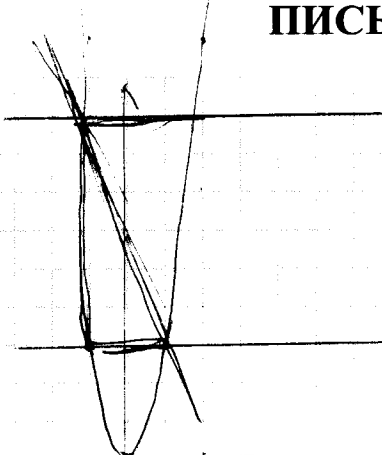
$$|a(x-3)| = \sqrt{x-1}$$

$$a^2(x-3)^2 = x-1$$

$$|ax - 3a| = \sqrt{x-1}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\begin{array}{r} \times 22 \\ \times 35 \\ \hline 770 \\ + 220 \\ \hline 330 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 26 \\ \times 15 \\ \hline 390 \\ + 260 \\ \hline 390 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 22 \\ \times 16 \\ \hline 352 \\ + 220 \\ \hline 572 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 26 \\ \times 16 \\ \hline 416 \\ + 260 \\ \hline 416 \end{array}$$

m - k - 60 км.
n - k - 60 з.

если n > m, то

$$\begin{array}{r} + 00 \\ - 43 \\ \hline 270 \\ - 258 \\ \hline 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 43 \\ \hline 16 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 700 \\ - 47 \\ \hline 230 \end{array} \quad \begin{array}{r} 47 \\ \hline 1 \end{array}$$

(385) (369)

22 м на к.п.
↓
на н.

26 м на к.п.
↓

1 н. ост. цвет.

21 м на к.п.

x + y = 700 м.

26

все метры авто.

x - кол-во метров в автомобиле!

y - все м.

$$\begin{cases} x \cdot 22 = y - \text{ост.}_1 \\ x \cdot 26 = y + \text{ост.}_2 \\ x \cdot 21 + y = 700 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \cdot 22 = 700 - x \cdot 21 - \text{ост.}_1 \\ x \cdot 26 = 700 - x \cdot 21 + \text{ост.}_2 \\ y = 700 - x \cdot 21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 43x = 700 - \text{ост.}_1 \\ 47x = 700 + \text{ост.}_2 \\ \text{ост.}_2 \geq 26 \end{cases}$$

$$x = \frac{700 - \text{ост.}_1}{43}$$

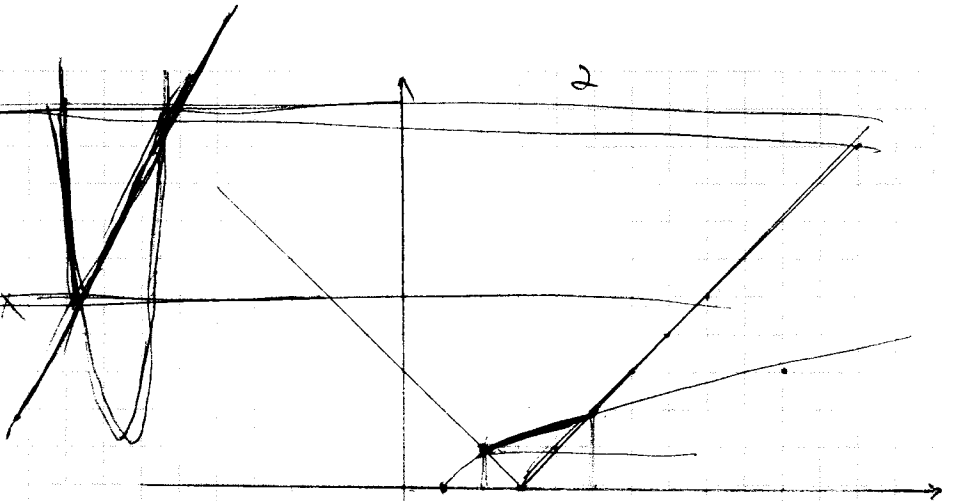
$$|ax - 3a| \leq \sqrt{x-1}$$

$$|a(x-3)| \leq \sqrt{x-1}$$

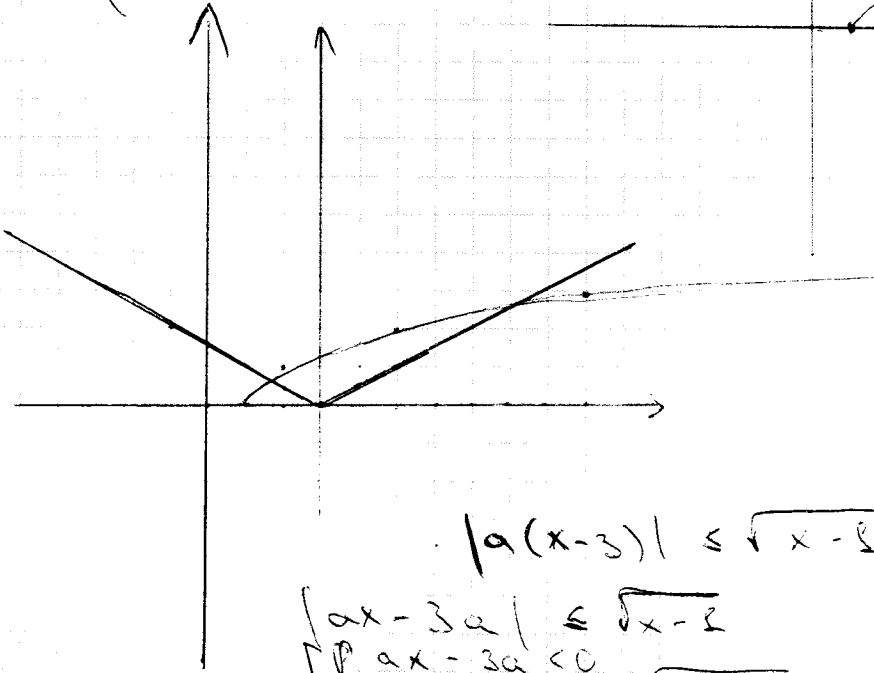
$$y = 3x$$

$$y = 3x^2$$

$$y = (3x)^2$$



$$(x^2 + y^2) = 2c^2$$



$$|a(x-3)| \leq \sqrt{x-1}$$

$$\begin{cases} |ax - 3a| \leq \sqrt{x-1} \\ ax - 3a < 0 \\ 3a - ax \leq \sqrt{x-1} \\ ax - 3a \geq 0 \\ ax - 3a \leq \sqrt{x-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax - 3a < 0 \\ 3a - ax \leq \sqrt{x-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax - 3a \geq 0 \\ ax - 3a \leq \sqrt{x-1} \end{cases}$$

$$\boxed{x-1 \geq 0} \Rightarrow a \in \mathbb{R}$$

$$3a - ax < \epsilon$$

$$ax - 3a - \text{число, которое} \geq 0. \quad |a(x-3)| \leq \sqrt{x-1}$$

$$ax - 3a \geq 0 \quad a(x-3) \geq 0$$

$$a(x-3)$$

$$a \geq 0$$

$$x-3 \geq 0$$

$$(a(x-3))^2 \leq x-1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7 7 7 7 7 7 7 | 1 1 цифр

и цифра, которая может занимать 1 из 12 мест
прежде остальных 12 цифр могут быть либо

2, либо 5

Значит

$$2^{10} : 12 = \frac{1024}{12} = 85 \frac{4}{3}$$

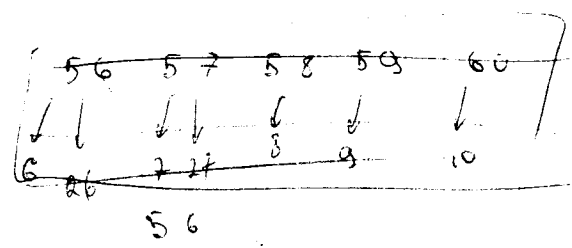
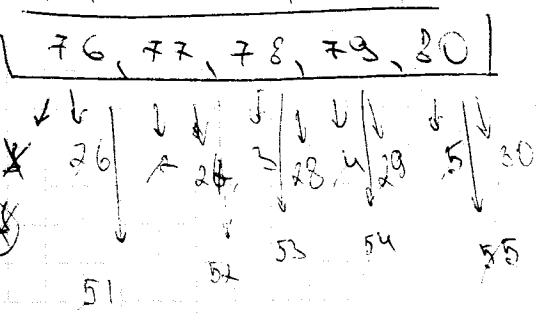
ответ к задаче 5

$$\begin{array}{r} 2288 \\ - 1 \\ \hline 2028 \\ - 1 \\ \hline 1828 \\ - 1 \\ \hline 1668 \\ - 1 \\ \hline 1508 \\ - 1 \\ \hline 1348 \\ - 1 \\ \hline 1188 \\ - 1 \\ \hline 1028 \\ - 1 \\ \hline 868 \\ - 1 \\ \hline 708 \\ - 1 \\ \hline 548 \\ - 1 \\ \hline 388 \\ - 1 \\ \hline 228 \end{array}$$

- [1; 25] [26; 50] [51; 75] [76; 100]

Если разность каких-либо двух выбранных чисел не делится на 25, то значит, что эти числа не делятся на 25, либо их разность меньше 25.

~~1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10~~



разность не

$$\frac{3a^2 + 1}{2a^2} = 3 + \frac{1}{2a^2}$$

31, 32, 33, 34, 35

$$\begin{array}{r} 182 \\ \times 5 \\ \hline 910 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20 \\ \times 5 \\ \hline 100 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 375 \\ + 250 \\ \hline 625 \end{array}$$

50, 12, 13, 14, 15

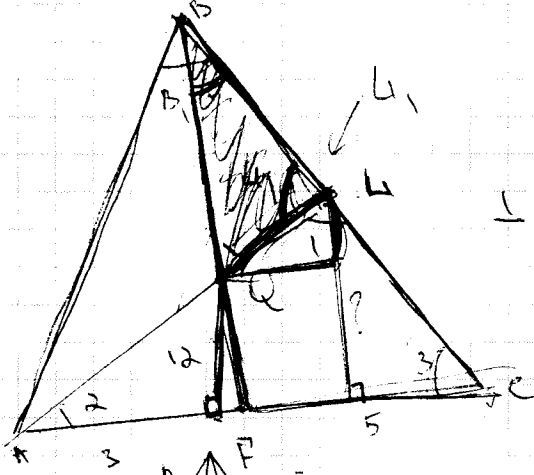
$$\begin{array}{r} 50 \\ \times 5 \\ \hline 250 \end{array}$$

91.5 + 91.5 = 182

5(182) = 910

$$1 \cdot 25 + 1; \quad 1 \cdot 25 + 2,$$

$$2 \cdot 25 + 1, \quad 3 \cdot 25 + 2$$



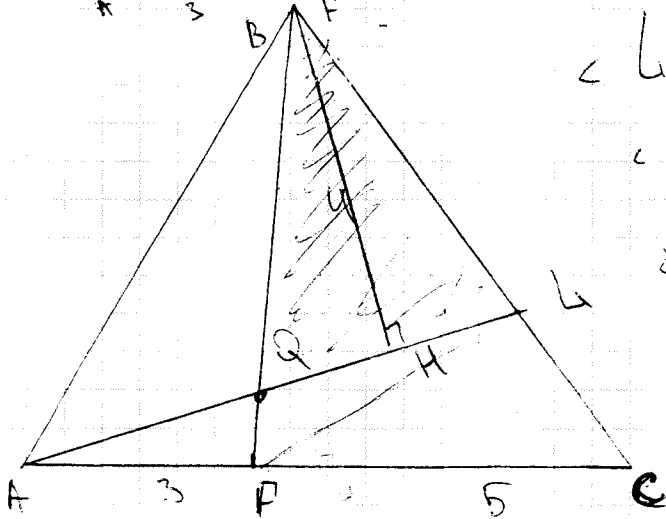
$$AP:PC = 3:5$$

$$3 \cdot 25 + 1 \dots$$

$$S_{ABQL} : S_{BAC} = 4:25$$

\perp or L go AP

$$\text{or } Q \text{ go } AP = 1.2$$



$$\angle L_1 = 180 - \angle 1$$

$$\angle 1 = 180 - \angle 2 - \angle 3$$

$$\angle L_1 = 180 - \angle 2 - \angle 3$$

$$\angle L_1 = \angle 2 + \angle 3$$

$$(BH = QL) \cdot 0,16 =$$

$$\frac{BH}{QL} =$$

$$\frac{BH \cdot QL}{BH_1 \cdot AC} = \frac{4}{25}$$

$$BH \cdot QL \cdot 25 = 4 \cdot BH_1 \cdot AC$$

$$BH \cdot QL \cdot 25 = 4 \cdot BH_1 \cdot 1,6 \cdot PC$$

$$\frac{BH \cdot QL}{BH_1 \cdot 1,6 \cdot PC} = 0,16 = 0,16^2 \cdot 0,16$$

$$a^2 = |a|^2$$

$$a(x-3)^2$$

$$|ax - 3a| \leq \sqrt{x-1}$$

$$(ax - 3a)^2 \leq x - 1$$

$$a^2 x^2 - 6a^2 x + 9a^2 \leq x - 1$$

$$a^2 x^2 - 6a^2 x + 9a^2 - x + 1 \leq 0$$

$$x(a^2 x - 6a^2 - 1) - x(6a^2 - a^2 x + 1)$$

$$(a(x-3))^2 - x + 1 \leq 0$$

$$AC =$$

$$\begin{array}{r} 40 \cdot 25 \\ - 25 \cdot 16 \\ \hline 150 \\ - 150 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\frac{AP}{PC} = \frac{3}{5}$$

$$5AP = 3PC$$

$$AP + PC = AC$$

$$AP = \frac{3}{5} PC$$

$$AP = \frac{3}{5} PC + PC = 1,6 PC$$