

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

БИЛЕТ 6

ШИФР

12 - 012

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 5x^2$ пересекает прямые $y = 125$, $y = 80$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?
2. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD . Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 28$.
3. Чиполлино наклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 15 марок на каждый лист, то все его марки в альбом не поместятся, а если по 17 марок на каждый лист, то по крайней мере один лист останется пустым. Если преподнести Чиполлино в подарок точно такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 22 марки, то у него станет ровно 900 марок. Сколько марок сейчас у Чиполлино? (Все марки имеют один и тот же размер.)
4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax - a| \leq \sqrt{x - 3}$ является отрезок длины 2?
5. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "3", "5" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "3" ровно шесть, и они идут подряд.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 4 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 25$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 12.
7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 40]$, $[41; 80]$, $[81; 120]$, $[121; 160]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 40. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати четырёх выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.

$$y = 5x^2$$

$$y = 125$$

$$y = 80$$

$$y = a$$

График Параболы $y = 5x^2$ пересекает
прямую $y = 125$ в точках:

$$125 = 5x^2$$

$$x^2 = 25$$

$$x = \pm 5$$

$(5; 125)$ и $(-5; 125)$
Расстояние по оси ~~x~~ между этими
точками равно $5 + 5 = 10$

$$\text{Отрезок}_1 = 10$$

Парабола также пересекает прямую
 $y = 80$ в точках:

$$80 = 5x^2$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm 4$$

$(4; 80)$ и $(-4; 80)$
Расстояние между ними равно $4 + 4 = 8$

$$\text{Отрезок}_2 = 8$$

Правильный треугольник образуется
из отрезков, подчиняющихся теореме
Пифагора; где $c^2 = a^2 + b^2$, где
 c - гипотенуза и соответственно
большая сторона

Рассмотрим ситуацию, где $\text{Отрезок}_1 = 10$
это гипотенуза по т. Пифагора:

$$10^2 = b^2 + 8^2$$

$$100 = 64 + b^2$$

$$b^2 = 36$$

$$b = 6$$

Значения ~~даны~~ расстояния между
двумя точками равно 6, си-но
корабля $y = 5x^2$ пересекает вертикаль
 $y = a$, ~~и~~ ~~значит~~ когда $x = 3$ и $x = -3$

$$y = 5 \cdot 3^2;$$

$$y = 45, \text{ значения}$$

$$a = 45$$

Рассмотрим ситуацию когда веревка
является гипотенузой:

$$c^2 = 10^2 + 8^2$$

$$c^2 = 164$$

$$c = 2\sqrt{41}$$

Значения расстояния между точками
равно $2\sqrt{41}$, си-но, корабля пересекает
вертикаль ~~дана~~ $y = a$, когда $x = \sqrt{41}$ и $x = -\sqrt{41}$

$$y = 5 \cdot (\sqrt{41})^2;$$

$$y = 5 \cdot 41;$$

$$y = 205, \text{ значения}$$

$$a = 205$$

Ответ: при $a = 45$ и $a = 205$

7.

Чтобы сумма квадратов четырех выд-
ранных чисел была наименьшей
каждое в числе из промежутков
должно быть наименьшим из
возможных.

Таким образом число из первого
промежутка может быть только:

1; 2; 3; 4; 5; 6.

А из второго:

47; 48; 49; 50; 51; 52; Ответ:

$41+6$; $42+6$; $43+6$; $44+6$; $45+6$; $46+6$.

Таким образом, чтобы ни одно из
разностей двух чисел не равнялось
на 40 нужно подобрать числа

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Сумма чисел 1-ого промежутка:

$$1+2+3+4+5+6=21$$

Сумма ч. 2-ого промеж.:

~~$$40 \cdot 6 + 6 \cdot 6 + 21 = 6$$~~

$$40 \cdot 6 + 6 + 1 + 6 + 2 + 6 + 3 + 6 + 4 + 6 + 5 + 6 + 6 =$$
$$= 40 \cdot 6 + 6 \cdot 6 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 40 \cdot 6 + 6 \cdot 6 + 21$$

Сумма чисел 3-его промежутка:

$$80 \cdot 6 + 12 \cdot 6 + 21 ;$$

Сумма чисел 4-ого промежутка:

$$120 \cdot 6 + 18 \cdot 6 + 21$$

Сумма всех чисел:

$$21 + 40 \cdot 6 + 6 \cdot 6 + 21 + 80 \cdot 6 + 12 \cdot 6 + 21 + 120 \cdot 6 + 18 \cdot 6 +$$

$$+ 21 = 21 \cdot 3 + 6 (40 \cdot 6 + 80 + 12 + 120 + 18) =$$

$$= 63 + 6 (30 + 120 + 120 + 6) =$$

$$63 + 6 \cdot 276 = 1719$$

$$\begin{array}{r} \times 276 \\ \quad 6 \\ \hline 1656 \end{array} \quad \begin{array}{r} \quad 1656 \\ \quad \quad 63 \\ \hline 1719 \end{array}$$

Ответ: 1719

3.

x - кол-во листов в альбоме

y - марки ценой

ценой

$$15x < y$$

$$17(x-1) \geq y$$

$$y + 22x = 900$$

$$y = 900 - 22x$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 15x < 900 - 22x \\ 17(x-1) \geq 900 - 22x \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 37x < 900 \\ 17x - 17 \geq 900 - 22x \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 37x < 900 \\ 39x \geq 917 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} 900 \overline{) 37} \\ \underline{74} \\ 160 \\ \underline{148} \\ 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 917 \overline{) 39} \\ \underline{78} \\ 137 \\ \underline{117} \\ 20 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x < 24 \frac{12}{37} \\ x \geq 23 \frac{20}{39} \end{array} \right.$$

Так как количество сигарет — это целое число, значит $x = 24$, следовательно:

$$y = 900 - 22 \cdot 24$$

$$y = 900 - 528$$

$$y = 372 \text{ (марки)}$$

Ответ: 372 марки

$$\begin{array}{r} + 22 \\ \underline{24} \\ 88 \\ \underline{48} \\ 528 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overline{) 900} \\ \underline{528} \\ 372 \end{array}$$

4.

$$|ax - a| \leq \sqrt{x-3}$$

$$|x-3| \geq (ax-a)^2$$

$$a^2x^2 - 2a^2x + a^2 \leq |x-3|$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2x^2 - 2a^2x + a^2 \leq x-3 \\ a^2x^2 - 2a^2x + a^2 \leq 3-x \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2x^2 - 2a^2x(a^2+1) + a^2+3 \leq 0 \\ a^2x^2 - 2a^2x(a^2-1) + a^2-3 \leq 0 \end{array} \right.$$

$$D_1 = 4(a^2+1)^2 - 4a^2(a^2+3) =$$

$$= 4(a^4 + 2a^2 + 1 - a^4 - 3a^2) = 4(a^2+1) - 5a^2$$

$$x_{1,2} = \frac{+2(a^2+1) \pm \sqrt{4(a^2+1)}}{2a^2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x_{1,2} = \frac{42(\sigma^2 + 1) \pm 2\sqrt{(\sigma^2 + 1)}}{2\sigma^2}$$

$$\sigma^4 + \sigma^2 - 1 = 0$$

$$x_1 = \frac{-(\sigma^2 + 1) + \sqrt{1 - \sigma^2}}{\sigma^2}$$

$$\sigma^2 = 1$$

$$x_2 = \frac{-(\sigma^2 + 1) - \sqrt{1 - \sigma^2}}{\sigma^2}$$

$$\sigma^2 = 1 + 4 = 5$$

$$4(\sigma^2 + 1) + \sqrt{1 - \sigma^2} + (\sigma^2 + 1) + \sqrt{1 - \sigma^2} = 2$$

$$\frac{2\sqrt{1 - \sigma^2}}{\sigma^2} = 2 \quad \sigma^2$$

$$\frac{2\sqrt{1 - \sigma^2}}{\sigma^2} = 2$$

$$\frac{\sqrt{1 - \sigma^2}}{\sigma^2} = 1$$

$$1 - \sigma^2 = \sigma^4 \quad \sigma^4$$

$$\frac{\sqrt{1 - \sigma^2}}{\sigma^2} = 1$$

$$\sigma^2 = 0$$

$$\sigma = 0$$

$$\sqrt{1 - \sigma^2} = \sigma^2$$

$$1 - \sigma^2 = \sigma^4$$

$$D_2 = 4(\sigma^2 - 1)^2 - 4\sigma^2(\sigma^2 - 3) =$$

$$= 4(\sigma^4 - 2\sigma^2 + 1 - \sigma^4 - 3\sigma^2) = 4(-6\sigma^2 + 1) =$$

$$= 4(1 - 6\sigma^2)$$

$$x_{1,2} = \frac{2(\sigma^2 - 1) \pm 2\sqrt{-6\sigma^2 + 1}}{2\sigma^2}$$

#5.

333333... (12 чисел цифр 548)

Существует 12 комбинаций расстановки
ки и точек под ней у 18 цифр в
числе.

Необходимо определить сколько существует возможных номеров - темпостей восьмерок и четверок.

<u>двухзначн.</u>	<u>тризначн.</u>	<u>четырёхзначн.</u>
58	588 855	5888 8555
85	585 858	5588 8855
<u>2 кода.</u>	558 885	5585 8858
	<u>6 кодов.</u>	5558 8885
<u>четырёхзначн.</u>	<u>четырёхзначн.</u>	<u>8 кодов.</u>
	5888 5855	
	5588 5858	
	5582 5885	
	5558	
	<u>14 кодов.</u>	

+ 2 (с 8)

Выяснилось, чтобы получить кол-во комбинаций первого разряда одного из разрядов к числу кол-ву предыдущего разряда прибавили 1, и умножили на 2. $a_{n+1} = 2(a_n + 1)$
 $a_{18} = 2(a_{17} + 1)$ Исследование начинается начиная с двухзначного числа (a_2), число комбинаций которых - 2. Если 17 раз проведём операцию $+1; \cdot 2$ с числом 2, то мы получим кол-во комбинаций чисел 5 и 8. Ответ: $12 \cdot a_{18}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y = 5x^2$$

$$y = 125$$

$$x^2 = 25$$

$$y = 80$$

$$x = 5$$

$$y = a$$

$$\text{Отрезок}_1 = 10$$

$$16 = x^2 = x = 4$$

$$\text{Отрезок}_2 = 8$$

$$100 = 64 + 36$$

$$6^2$$

$$\text{Отрезок}_3 = 6$$

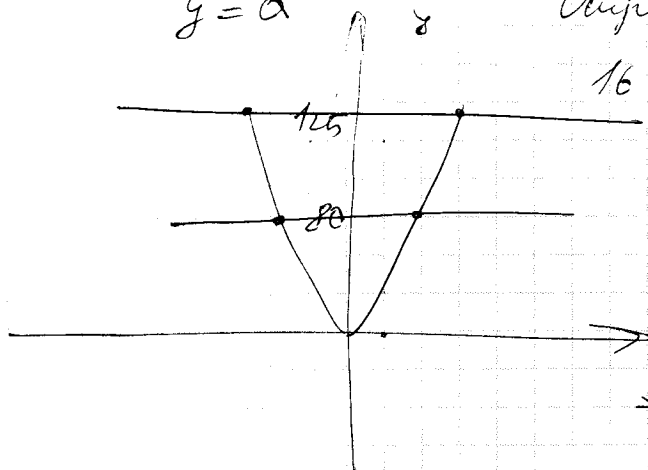
$$x = 3$$

$$y = 5 \cdot 9$$

$$y = 45$$

$$a = 45$$

$$a = 40000$$



$$x^2 = 100 + 64$$

$$x^2 = 164$$

$$x = \sqrt{164}$$

$$x = 2\sqrt{25 \cdot 16}$$

$$x = 10\sqrt{5 \cdot 16}$$

$$x = 40\sqrt{5 \cdot 4}$$

$$x = 40\sqrt{20}$$

$$\text{Отрезок}_3 = 40\sqrt{20}$$

$$x = 20\sqrt{20}$$

$$y = 5 \cdot (20 \cdot \sqrt{20})^2$$

$$y = 5 \cdot 400 \cdot 20 = 100 \cdot 400 = 40000$$

№3

15 x - кол-во машин

$$15x < y$$

y - кол-во марок всего

$$17x =$$

$$17(x-1) = y$$

$$17(x-1) + 22x = 300 \text{ марок}$$

$$17x - 17 + 22x = 300$$

$$39x = 317$$

$$\begin{array}{r|l} 39 & 317 \\ \hline 78 & 23 \\ \hline 137 & \\ -117 & \\ \hline 20 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 39 \\ 23 \\ \hline 187 \\ \hline 78 \\ \hline 887 \end{array}$$

№4

$$|ax - a| \leq \sqrt{x-3} \quad \text{гипотеза 2}$$

$$(ax - a)^2 \leq |x - 3|$$

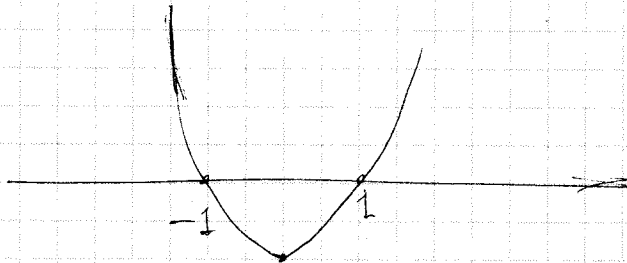
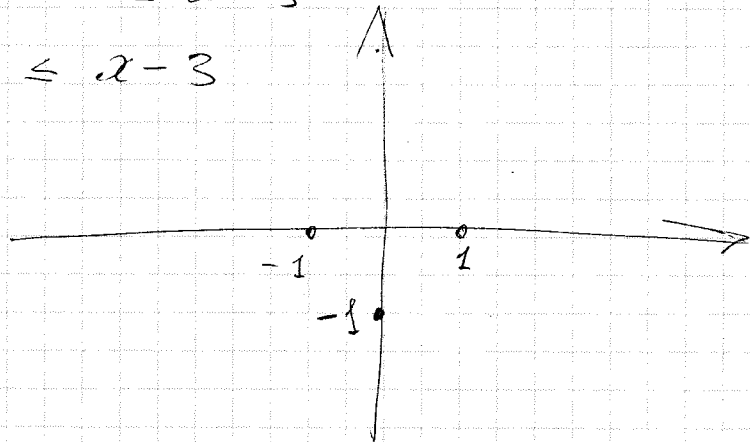
$$a^2x^2 - 2a^2x + a^2 \leq x - 3$$

$$a^2(x-1)^2 \leq x-3$$

$$(x-1)^2$$

$$x^2 - 1 > 0$$

$$(x-1)(x+1) > 0$$



$$(x-1)^2 \leq \frac{x-3}{a^2}$$

$$(x-1)^2 \geq \frac{x-3}{a^2}$$

$$(x-1)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1 + 2 + 3 + \dots + 5 + 6 = 21$$

$$21 + 40 \cdot 6 + 6 \cdot 6 + 21$$

~~$$21 + 6 \cdot 46 + 21$$~~

$$(21) + (40 \cdot 6) + 6 \cdot 6 + 21 + 80 \cdot 6 + 12 \cdot 6 + 21 +$$

~~$$6 \cdot 2 + 120 \cdot 6 + 18 \cdot 6 + 21$$~~

$$3 \cdot 21 + 6 (40 + 6 + 80 + 12 + 120 + 18) =$$

$$= 63 + 6 (30 + 120 + 120 + 6) =$$

$$= 63 + 6 (276) =$$

$$\begin{array}{r} 276 \\ \times 6 \\ \hline 1656 \end{array}$$

1656

№5

333333 ... 12 чисел 548

12 комбинаций

$$2(2 \cdot 2 + 2) + 2$$

$$4 \cdot 2 + 2$$

$$2(2(n+1) + 2)$$

$$12(2^{18} +$$

$$2(2(n+1) + 1))$$

$$4(n+1) + 2$$

$$4n + 4 + 2$$

$$4n + 6$$

$$4n + 7$$

$$8n + 14$$

$$|ax - a| \leq \sqrt{x-3}$$

$$x_1 = u$$

$$x_2 = u+2$$

$$x_1 + x_2 = u + u + 2$$

$$x_1 \cdot x_2 = u(u+2)$$

$$x^2 + x(2u)$$

$$x^2 + 2x(u+1) + u(u+2) = 0$$

<

$$(ax - a)^2 \leq |x-3|$$

$$a^2(x-1)^2 \leq |x-3|$$

$$\begin{cases} x-3 \geq a^2(x-1)^2 \\ x-3 \leq -a^2(x-1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2x^2 - 2a^2x + a^2 \leq x-3 \\ -a^2x^2 + 2a^2x - a^2 \geq x-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2x^2 - 2x(a^2+1) + a^2+3 \leq 0 \\ -a^2x^2 + 2x(a^2-1) - a^2+3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2x^2 - 2x(a^2+1) + a^2+3 \leq 0 \\ a^2x^2 - 2x(a^2-1) + a^2-3 \leq 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 2x \cdot \frac{a^2+1}{a^2} + \frac{a^2+3}{a^2}$$

$$u+1 = \frac{a^2+1}{a^2}$$

$$u^2+2u = \frac{a^2+3}{a^2}$$

$$u+1 = 1 - \frac{1}{a^2}$$

$$u^2+2u = 1 - \frac{3}{a^2}$$

$$x^2 + 26x + 8 = 0$$

$$x^2 + 6x + 8 = 0$$

$$D = 36 - 32 = 4$$

$$\sqrt{D} = 2$$

$$x_1 = \frac{-6 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = -4 \quad x_2 = -2$$

$$x_1 x_2 = 8$$

$$x_1 + x_2 = -6$$

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 x_2 = q$$

$$e^4 - e^2 + 1 = 0$$

$$\left(-\frac{1}{e^2}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{e^2}\right) - 1 = -\frac{3}{e^2}$$

$$\rightarrow \frac{1}{e^4} - \frac{2}{e^2} - 1 = -\frac{3}{e^2}$$

$$D = 1 + 4 = 5$$

$$u+1 = u = -\frac{1}{a^2}$$

$$\frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^2} - 1 = 0$$

$$\frac{1+a^2-a^4}{a^4} = 0$$

$$u^2+2u-1 = -\frac{3}{a^2}$$

$$u^2+2u-1 = -3u$$

$$u^2-u-1 = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

y - все морщи x - кол-во мешков

$$15x < y$$

$$17(x-1) \geq y$$

$$y + 22x = 900$$

$$y = 900 - 22x$$

$$y = 15x$$

$$y = 17x - 17$$

$$15x < 900 - 22x$$

$$17x + 17 \geq 900 - 22x$$

$$37x < 900$$

$$39x \geq 883$$

$$x < 24 \frac{12}{37}$$

$$x \geq 23 \frac{12}{23}$$

$$x = 24$$

$$24x + 22x = 900$$

$$46x = 900$$

$$y + 22 \cdot 24 = 900$$

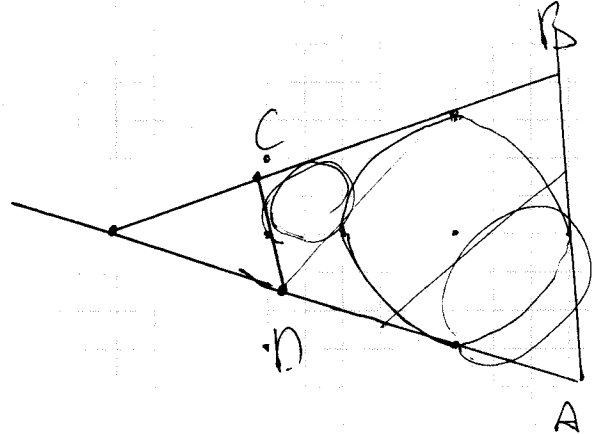
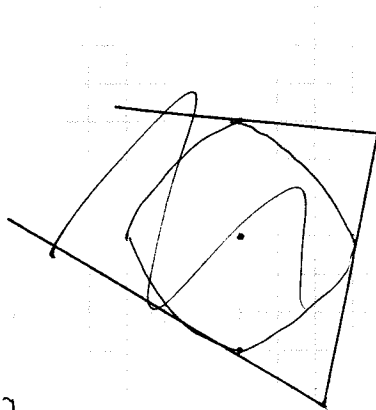
$$y + 528 = 900$$

$$y = 372$$

$$24 \times 15$$

$$\begin{array}{r} \times 24 \\ \times 15 \\ \hline 120 \\ 24 \\ \hline 360 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 17 \\ \times 23 \\ \hline 81 \\ 34 \\ \hline 421 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 800 \overline{) 37} \\ \underline{74} \\ 160 \\ \underline{148} \\ 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 800 \overline{) 39} \\ \underline{78} \\ 120 \\ \underline{108} \\ 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 22 \\ \times 24 \\ \hline 88 \\ 44 \\ \hline 528 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 900 \\ \underline{528} \\ 372 \end{array}$$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

18 знаков число

3 5 8

6 333333

12 число

5 4 8

1×5

411×8

3 ex

2 число 2-ух

2 комбинации

585

585

8

6

3! 2.3

558

558

число

4! 2.3.4

855

~~555~~

5558

858

588

5588

(12!)

5888

$\frac{888}{2(2(2n+2)+2)+2}$

5585 1 4 6

(12 · 12!)

13

18

4

2

3

5558

5855

5

58

588

855 + 2

5588

5858

8

85

585

885

5585

~~5888~~

558

858

~~5888~~ 8

2

(16)

• 2 + 2

$6 \cdot 2 + 4 = 16$

$7 \cdot 2 = 14$

5885

(14) $((2 \cdot 2 + 2) \cdot 2 + 2)$

n

$a_n =$

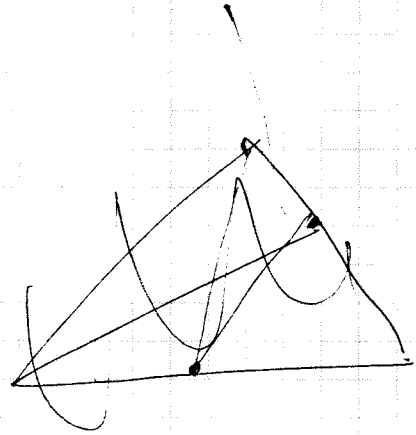
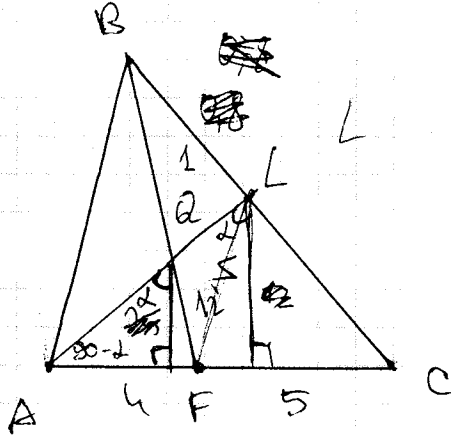
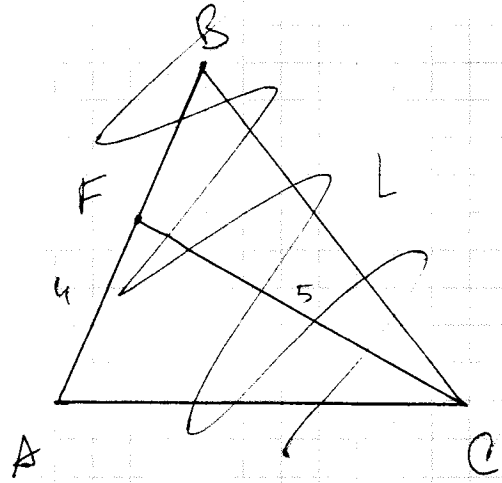
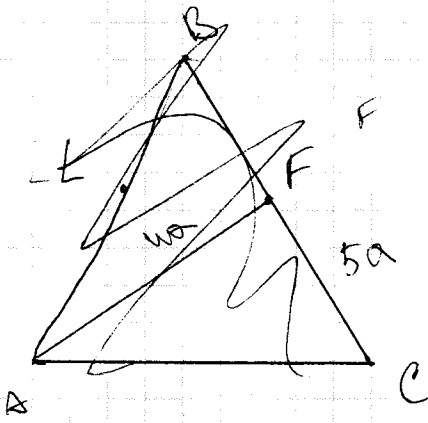
a_n - количество комбинаций

$a_{n+1} = a_n \cdot 2 + 2$

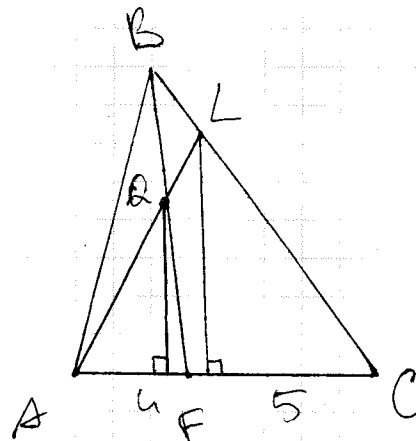
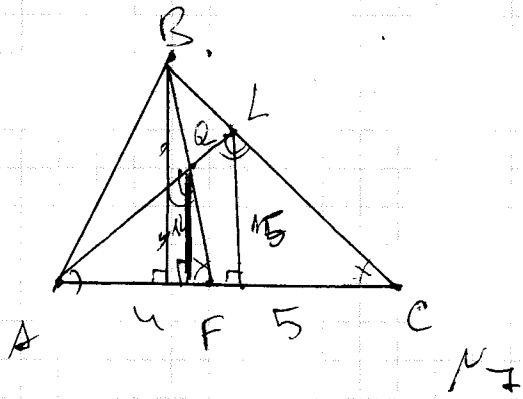
(6)

$6 \cdot 2 + 2 = 14$

№6



$AF:AC = 4:9$



1; 2; 4; 5; 6

41 42 43 44 45 46

7 8 9 10 11 12

47 48 49 50 51 52

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3$

$1+2+3+4+5+6 = 21$

$6 \cdot 6 + 21 = 47$

15 24 34 45 47
 7+8+9+10+11+12
 $6+1+(6) \cdot 2 + (6) \cdot 3 + (6) \cdot 4 + (6) \cdot 5 + (6) \cdot 6$
 16

$6 \cdot 6 + 1+2+3 \dots$

$42 + 48$
 $16 + 1+2+3+4+5$

$6+1+6+2+6+3 \dots$

$6 \cdot 6 + (1+2+3+4+5+6)$
 $36 + 16 = 52$