МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

БИЛЕТ 5 ШИФР 1х-013

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 3x^2$ пересекает прямые $y = 147$, $y = 75$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?
2. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD. Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 30$.
3. Чиполлино наклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 22 марки на каждый лист, то все его марки в альбом не поместятся, а если по 26 марок на каждый лист, то по крайней мере один лист останется пустым. Если преподнести Чиполлино в подарок точно такой же альбом, на каждом листе кторого наклеено по 21 марке, то у него станет ровно 700 марок. Сколько марок сейчас у Чиполлино? (Все марки имеют один и тот же размер.)
4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax - 3a| \leqslant \sqrt{x-1}$ является отрезок длины 4?
5. Найдите количество 19-значных чисел, содержащих только цифры “2”, “5” и “7” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “7” ровно восемь, и они идут подряд.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $4 : 25$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 12.
7. Пиноккио выбрал по 5 чисел из каждого промежутка $[1; 25]$, $[26; 50]$, $[51; 75]$, $[76; 100]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 25. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

12-013

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$y=3x^2$ $y=147$ $y=75$ $y=a$

Найдём точки пересечения графика функции $y=3x$ с прямыми $y=147$ и $y=75$

$3x^2=147$ $3x^2=75$

$x^2=49$ $x^2=25$

$x=\pm 7$ $x=\pm 5$

Найдём длины отрезков, отсекаемых параболой:

$7-(-7)=14$

$5-(-5)=10$

По теореме, обратной теореме Пифагора, если квадрат большей стороны равен сумме квадратов меньших сторон, то такой треугольник прямоугольный. Обозначим отрезок, отсекаемый от $y=a$ $= x$.

$\left[\begin{array}{l}14^2=10^2+x^2\\ x^2=14^2+10^2\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x^2=196-100\\ x^2=196+100\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=\pm 2\sqrt{24}\\ x=\pm 2\sqrt{74}\end{array}\right.$ Т.к. длина больше нуля, то $\left[\begin{array}{l}x=2\sqrt{24}\\ x=2\sqrt{74}.\end{array}\right.$

~~Т.к. ось абцисс является осью симметрии, то график функции $y=3x^2$ пересекает прямую $y=75$ в точках с абсциссами $\pm\sqrt{24}$, а прямую $y=147$~~

Т.к. ось абцисс является осью симметрии, то прямая $y=a$ ~~пересека~~ может пересекаться в точках с абсциссами $x=\pm\sqrt{24}$ и $x=\pm\sqrt{74}$

Найдём ординаты этих точек.

$\left[\begin{array}{l}3\cdot(\pm\sqrt{24})^2=72\\ 3\cdot(\pm\sqrt{74})^2=222\end{array}\right. \Rightarrow \cancel{a} \left[\begin{array}{l}a=72\\ a=222\end{array}\right.$

Ответ: при $a=72$; $a=222$.

№4

$|ax-3a|\leq\sqrt{x-1}$

$(ax-3a)^2\leq x-1$

$a^2x^2-6a^2x+9a^2-x+1\leq 0$

~~$D=$~~ $f(x)=a^2x^2-6a^2x+9a^2-x+1$

$D=(6a^2+1)^2-4(a^2\cdot(9a^2+1))=36a^4+12a^2+1-36a^4-4a^2=8a^2+1$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$$x_{1,2}=\frac{6a^2+1\pm\sqrt{8a^2+1}}{2a^2}$$

$$\frac{6a^2+1+\sqrt{8a^2+1}}{2a^2}-\frac{6a^2+1-\sqrt{8a^2+1}}{2a^2}=4$$

$$\frac{\cancel{6a^2}+\cancel{1}+\sqrt{8a^2+1}-\cancel{6a^2}-\cancel{1}+\sqrt{8a^2+1}-8a^2}{2a^2}=0$$

$$\begin{cases}2\sqrt{8a^2+1}-8a^2=0\\2a^2\neq0\end{cases}$$

$$2\sqrt{8a^2+1}-8a^2=0$$

Обозначим $8a^2=t,\ t\geq0$

$$2\sqrt{t+1}-t=0$$

$$2\sqrt{t+1}=t$$

$$4t+4=t^2$$

$$t^2-4t-4=0$$

$$\frac{D}{4}=4+4=8$$

$$t_{1,2}=2\pm\sqrt{8}$$

Учитывая обозначения,

$$\left[\begin{array}{l}8a^2=2+2\sqrt{2}\\8a^2=2-2\sqrt{2}\end{array}\right.\quad\left[\begin{array}{l}a^2=0{,}25+\sqrt{0{,}125}\\a^2=0{,}25-\sqrt{0{,}125}\end{array}\right.\quad\left[\begin{array}{l}a=\sqrt{0{,}25+\sqrt{0{,}125}}\\a=-\sqrt{0{,}25+\sqrt{0{,}125}}\\a=\sqrt{0{,}25-\sqrt{0{,}125}}\\a=-\sqrt{0{,}25-\sqrt{0{,}125}}\end{array}\right.$$

Ответ: при $a=\sqrt{0{,}25+\sqrt{0{,}125}}$; $-\sqrt{0{,}25+\sqrt{0{,}125}}$; $\sqrt{0{,}25-\sqrt{0{,}125}}$; $-\sqrt{0{,}25-\sqrt{0{,}125}}$

№5.

ı ı ı ı ı ı ı ı ı ı ı ı ı ı ı ı ı ı ı

Если рассматривать комбинации, чтоб чисел „7" было 8 подряд, их наберется 12. Чисел, которые не входят в ряд, где числа „7" идут подряд будут 11. Значит, комбинаций без числа 7 будет 2^{11} $\Longrightarrow$ кол-во чисел, подходящих по условию - $12\cdot2056$

Ответ: $12\cdot2056$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

22 - нет   +1 альбом по 21 марке – итог: 700 марок.
26 - 1 пустой

Обозначим кол-во марок Чиполлино = y, тогда за x обозначим кол-во страниц в подаренном ему альбоме

$$y + 21x = 700$$

$y = \underbrace{700}_{\vdots 7} - \underbrace{21x}_{\vdots 7} \Rightarrow$ число марок Чиполлино кратно 7.

$$\begin{cases} 22x < 700 - 21x \\ 26x > 700 - 21x \end{cases} \begin{cases} x < \frac{700}{43} \\ x > \frac{700}{47} \end{cases} \Rightarrow x \in \left(\frac{700}{47}; \frac{700}{43}\right)$$

В этот промежуток входят натуральные числа 15, 16, 17, 18.

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y=3x^2$ $y=147$ $y=75$ $y=a$

$3x^2=147$ $3x^2=75$

$x^2=49$ $x^2=25$ $7-(-7)=14$

$x=\pm7$ $x=\pm5$ $\Longrightarrow$ $5-(-5)=10$

$74|4$ $\frac{4}{34}$ 1

По теореме, обратной теореме Пифагора, если квадрат большей стороны равен сумме квадратов меньших сторон, то такой треугольник прямоугольный.

Рассмотрим несколько случаев:

$\left[\begin{array}{l}7^2=5^2+\cancel{a}x^2\\ x\cancel{a}^2=7^2+5^2\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x\cancel{a}^2=49-25\\ x\cancel{a}^2=49+25\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x\cancel{a}^2=24\\ x\cancel{a}^2=74\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x\cancel{a}=2\sqrt6\\ x\cancel{a}=\sqrt{74}\end{array}\right.$

$\times\frac{24}{3}$ 72 $\times\frac{74}{3}$ 222

Значит, отрезки могут быть равны $2\sqrt6$ и $\sqrt{74}$ $\Longrightarrow$ от оси OX точки отрезка удалены на $\sqrt6$ и на $\sqrt{74}$ соответственно.

~~$x^2=\sqrt6$~~ $3x^2=\sqrt6$

$x=\sqrt{\frac13}$

$y=3\cdot\left(\sqrt{\frac13}\right)^2=1$

$3x^2=\sqrt{74}$

$x^2=\frac{\sqrt{74}}{3}$

$x=\sqrt{\frac{\sqrt{74}}{9}}$

$y=3\cdot\frac{\sqrt{74}}{3}$

$y=\sqrt{74}$

$296|4$ 24 56 6

~~29~~

$296|4$ 28 16 74 6 14 $|2$ 37

Значит, a может принимать значения $1;\ \sqrt{74}$

$96|4$ 8 16 2

№2

$|ax-3a|\leq\sqrt{x-1}$

$\left[\begin{array}{l}ax-3a\leq\sqrt{x-1}\\ 3a-ax\geq\sqrt{x-1}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}a(x-3)\leq\sqrt{x-1}\\ a(3-x)\geq\sqrt{x-1}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}a^2(x^2-6x+9)\leq x-1\\ a^2(x^2-6x+9)\geq x-1\end{array}\right.$ $\Big[$

$\left[\begin{array}{l}a^2x^2-6a^2x+9a^2-x+1\leq0\\ a^2x^2-6a^2x+9a^2\cancel{\geq x}--x+1\geq0\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}a^2x^2+x(-6a^2-1)+9a^2+1\leq0\\ a^2x^2+x(-6a^2-1)+9a^2+1\overset{\geq}{\leq}0\end{array}\right.$

$D=(-6a^2-1)^2-4(a^2\cdot(9a^2+1))=\cancel{36a^4}+12a^2+1-\cancel{36a^4}-4a^2=2a^2+1$

$(ax-3a)^2 \le x-1$

$a^2x^2-6a^2x+9a^2 \le x-1$

$a^2x^2-6a^2x-x+9a^2+1 \le 0$

$\cancel{D=}\ a^2x^2+x(-6a^2-1)+9a^2+1 \le 0$

$D=\cancel{(-6a^2}\ \ 8a^2+1$

$\cancel{6a^2+1 \pm \sqrt{8a^2+1}}\ \sqrt{\ }$ $\dfrac{6a^2+1+\sqrt{D}}{2a^2}-\dfrac{6a^2+1-\sqrt{D}}{2a^2}=4$

$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{1}$

$\sqrt{\dfrac{2}{16}}=\cancel{\sqrt{\tfrac{1}{4}}}=$

Обозначим $2a^2=t,\ t\ge 0$

$\sqrt{2}\cdot\frac{1}{4}=$

$\sqrt{2\cdot\frac{1}{16}}$

$2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{16}=$

$=$

$\dfrac{\cancel{3t}+\cancel{x}+\cancel{\sqrt{D}}-\cancel{3t}-\cancel{x}+\sqrt{D}+4t}{t}=0$

$\dfrac{+4t}{t}=0$

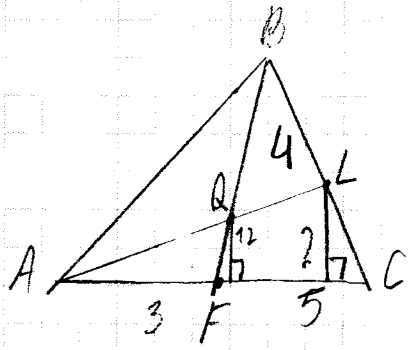
Нет корней Ответ: $a\in\varnothing$

№6

$\frac{1}{4}\sqrt{2}=$

$=\sqrt{\frac{2}{16}}=$

$=\sqrt{\frac{1}{4}}$



Решение

$\dfrac{S_{ABF}}{S_{BFC}}=\dfrac{3}{5}$ $S_{AFQ}=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 3=\cancel{18a}\ 18k$

$\cancel{\dfrac{2}{5}}$

№3

$\begin{array}{r|l} 679 & 7 \\ \underline{63} & \overline{97} \\ 49 & \end{array}$

~~2~~ 2 – нет + 1 альбом по 21 марке – 700 марок.
26 – 1 пустой Сколько марок?

$y+x\cdot 21=700$

$y=\underbrace{700}_{\vdots 7}-\underbrace{21x}_{\vdots 7} \Longrightarrow$ у Читталино ~~ее~~ кол-во марок кратно 7.

Обозначим кол-во марок Читталино за y.

$y=2\cancel{6}\overset{x}{\cancel{2}}+1$ ~~x~~q -кол-во страниц

$26x$

$28\cdot x+21x=700$ Т.к у Читталино больше, чем подаренных

$49x=700$

$7x=100$ Поровну на каждую страницу 1 ~~[illegible]~~ марок расположить не удастся, значит кол-во страниц $\vdots$ 7.

12 013
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№×5

19 чисел „2", „~~3~~", „5", „7"   „7" - восемь,

№7

[1; 25]; [26; 50]; [51; 75]; [76; 100]

1 ………………………

$700-21x=26(x-1)$

$700-21x=26x-26$

$\cancel{5x}$ $47x=726$

$700-21x=26(x-2)$

$700-21x=26x-52$

$47x=752$

$726 : 47 = 15$, 47, 256

16^2

$16 \times 16 = 96 + 16 = 256$

$752 : 47 = 16$, 47, 282

2

2^3

№5

19- значные числа

12

19 − 8 = 11

25

11·1024 ·12

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

~~2~~ $22 \cdot x > y$

~~$22 \cdot x <$~~

~~$62x > y$~~

$$\begin{cases} 22x < y \\ 26x > y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 22x < 700 - 21x \\ 26x \geq 700 - 21x \end{cases} \quad \begin{cases} 43x < 700 \\ 47x \geq 700 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < \frac{700}{43} \\ x > \frac{700}{47} \end{cases} \Rightarrow x \in \left(\frac{700}{47}; \frac{700}{43}\right]$$

$$\begin{array}{r|l} -700 & 43 \\ \underline{43} & 18 \\ -370 & \\ \underline{344} & \\ 26 & \end{array}$$

18

$$\begin{array}{r|l} -700 & 47 \\ \underline{47} & 1 \\ 330 & \end{array}$$

$\frac{700}{47}$ ~~$\frac{700}{47} > 18$~~

$18 < \frac{700}{47} < 19$

$$\begin{array}{r|l} -700 & 43 \\ \underline{43} & 18 \\ -370 & \\ \underline{344} & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -700 & 47 \\ \underline{47} & 14 \\ -230 & \\ \underline{188} & \\ 42 & \end{array}$$

14 - 19

$14 < \frac{700}{47} >$ ~~14~~ 15

12 - 013

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)