

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2

ШИФР

12 - 014

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120° ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.
3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
 - в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB .
5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.
7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2. \quad f(x) = \sin 7x \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 = -\frac{1}{2}(-2 \sin 5x \cdot \sin 9x + 2 \sin^2 7x + 2 \cos^2 x + 6) = -\frac{1}{2}(\cos 14x - \cos 4x + 2 \sin^2 7x + 2 \cos^2 x + 6) = -\frac{1}{2}(\cos^2 7x - \sin^2 7x - \cos 4x + 2 \sin^2 7x + 2 \cos^2 x + 6) = -\frac{1}{2}(\cos^2 7x + \sin^2 7x - \cos 4x + 2 \cos^2 x + 6) = -\frac{1}{2}(2 \cos^2 x - \cos 4x + 7) =$$

$$\cos 4x = (2 \cos^2 x - 1) = 2(2 \cos^2 x - 1)^2 - 1 = 2(4 \cos^4 x - 4 \cos^2 x + 1) - 1 = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 2 - 1 = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1 \Rightarrow -\frac{1}{2}(2 \cos^2 x - (8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1) + 7) = -\frac{1}{2}(-8 \cos^4 x + 10 \cos^2 x + 6) = 4 \cos^4 x - 5 \cos^2 x - 3$$

$= f(x)$

$$f'(x) = 4 \cdot 4 \cos^3 x \cdot (-\sin x) - 5 \cdot 2 \cos x \cdot (-\sin x) = -16 \cos^3 x \sin x + 10 \sin x \cos x = 2 \sin x \cos x (5 - 8 \cos^2 x)$$

$$\sin 2x (5 - 8 \cos^2 x) \Rightarrow \sin 2x = 0 \text{ и } 5 - 8 \cos^2 x \text{ имеют}$$

максимумы и минимумы $\Rightarrow 2x = \pi, 2\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \pi \in \mathbb{Z} \quad 5 - 8 \cos^2 x$

$$x = \frac{3\pi}{2}, 4\pi \in \mathbb{Z} \quad \cos^2 x = \frac{5}{8}$$

$$\cos x = \pm \sqrt{\frac{5}{8}}$$

Периоды $(x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow)$

$$4 \cos^2 \frac{\pi}{2} - 5 \cos^2 \frac{\pi}{2} - 3 = -3$$

$$4 \cdot \frac{25}{64} - 5 \cdot \frac{5}{8} - 3 = \frac{25}{16} - \frac{25}{8} - 3$$

$$\frac{25}{16} - \frac{50}{16} - 3 = \frac{-25}{16} - 3 = \frac{-25 - 48}{16} = -4 \frac{9}{16}$$

максимальная

значим ~~максимальная~~ точка -3 , а ~~минимальная~~

цен $-4 \frac{9}{16}$ ~~минимальная~~ ~~точка~~: минимальная $-4 \frac{9}{16}$

максимальная: -3 .

3. Заметим, что способов составить шесть номеров подряд 13 (Десятизначные, или предельно возможные - 6 и число 12-значное \Rightarrow способов 13). Также заметим, что в каждом числе должны присутствовать и цифры $0^{\text{я}}$ и цифра $9^{\text{я}}$. Рассмотрим случай, когда номера, идущие подряд - это первые 6 цифр. Тогда ~~в~~ ^{среди} вставим ~~се~~ 12 мест мы добавим на 2 у нас цифры поставим нуль и девятку, остальные по логике сложим и $0^{\text{я}}$ и $9^{\text{я}}$ \rightarrow в данном случае кол-во способов перемешивания $\binom{12-2}{2} = 2^{10}$. Рассмотрим случай, когда 6 номеров не идут в первой цифре. Первая цифра определена - она девятка \rightarrow на какое-то из остальных мест поставим нуль \Rightarrow способов в этом случае тоже 2^{10}
 Ответ: $2^{10} \cdot 13$

Ответ: 13 312 ~~чисел~~.

У. Каждый промежуток представим в виде:

- (1) 1; 2 ... 35
- (2) $35+1; 35+2 \dots 35+35$
- (3) $35 \cdot 2+1; 35 \cdot 2+2 \dots 35 \cdot 2+35$
- (4) $35 \cdot 3+1; 35 \cdot 3+2 \dots 35 \cdot 3+35$
- (5) $35 \cdot 4+1; 35 \cdot 4+2 \dots 35 \cdot 4+35$

Заметим, что ~~то~~ ~~выбрал~~ числа ~~иногда~~ не все числа с одинаковыми остатками при делении на 35, и в нашей таблице они не все выбраны числа в 1 столбце. Следовательно, что не имеют значения какие числа они ~~были~~ ^{выбраны} ~~были~~ ^{были} в 1 столбце, и.к. ~~они все равно~~ у каждой группы был -

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

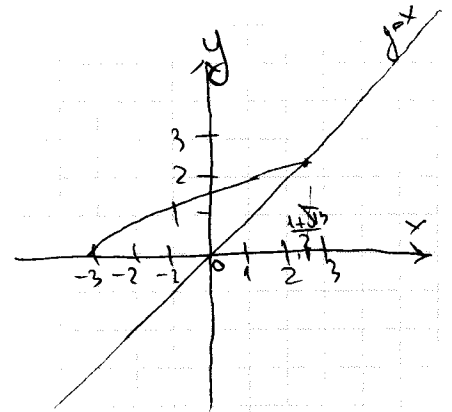
раз по 5 чисел, а прибавка в виде ~~35~~^{35 · (n-1)} где n - это номер группы есть у каждого числа в группе. Конечно формально выбрать наименьшие оставшие числа решили на 35, и 5 числа: 1, 2, ..., 25.

$$(35 \cdot 4 \cdot 5 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5) + (35 \cdot 3 \cdot 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) + (35 \cdot 2 \cdot 5 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15) + (35 \cdot 5 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20) + (21 + 22 + 23 + 24 + 25) = 35 \cdot 5 (4 + 3 + 2 + 1) + (1 + 2 + \dots + 25) = 1750 + \frac{25 \cdot 26}{2} = 1750 + 325 = 2075.$$

Ответ: 2075.

5. $\log_{\sqrt{x+3} - x} (x+5) \geq 1$

ОДЗ: $\begin{cases} \sqrt{x+3} - x > 0 & \sqrt{x+3} > x \\ \sqrt{x+3} - x \leq 1 & x \neq 1 \\ x+5 > 0 & x > -5 \\ x+3 \geq 0 & x \geq -3 \end{cases}$



$\Rightarrow x \in [-3; 1) \cup \left[\frac{1+\sqrt{13}}{2}; +\infty\right)$

заменим, что если $\sqrt{x+3} - x > 1$, то $x^2 - x - 3 < 0$

заметим $\log_{\sqrt{x+3} - x} (x+5) \geq 1$, откуда ~~$x+5 \geq \sqrt{x+3} - x$~~ $x+5 \geq \sqrt{x+3} - x$. Если же $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$; $\frac{1-\sqrt{13}}{2}$

1) $\sqrt{x+3} - x > 0$, то решение не будем (ведь $x+5$ отрицательно больше $(\sqrt{x+3} - x)^n$, где $n \in (0; 1)$). Решим сначала меньшее уравнение $\sqrt{x+3} - x = x+5$

$$\sqrt{x+5} = 2x+5 \quad x+3 = 4x^2 + 20x + 25$$

$$4x^2 + 19x + 22 = 0$$

$$D = 361 - 352 = 9$$

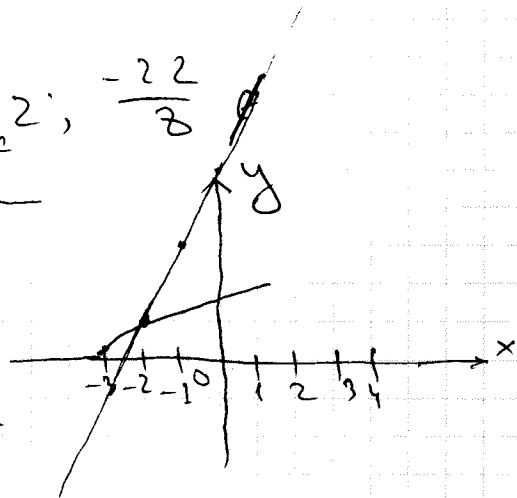
$$x_{1,2} = \frac{-19 \pm 3}{8} = -2; \frac{-22}{8}$$

Решим $x+5 \geq \sqrt{x+5} - x$

$$2x+5 \geq \sqrt{x+5}$$

$x=-2$ — пересечение

$$\Rightarrow x \geq -2, \text{ т.к.}$$



заменим, что $\sqrt{x+5} - x$ ~~уменьшается~~ уменьшается ~~от 0 до 1~~ от 0 до 1 при $x > 1$. Действительно,

верь функцию $y = x$ решим задачу от — от $\sqrt{x+5}$.

\Rightarrow при $x > 1$ решим несл. III к. ОДЗ $x \in [-3; 1)$

$\cup (1; \frac{1+\sqrt{13}}{2}) \Rightarrow$ а решение находится $(-2; \infty)$

ответ: $x \in [-2; 1)$

1. Трапеция имеет стороны 16 и 26 длиной.

$$x^2 = 64$$

$$x = \pm 8 \Rightarrow 8 + 8 = 16$$

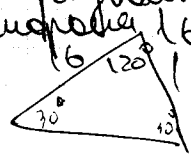
$$x^2 = 169$$

$$x = \pm 13 \Rightarrow 13 + 13 = 26$$

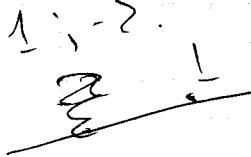
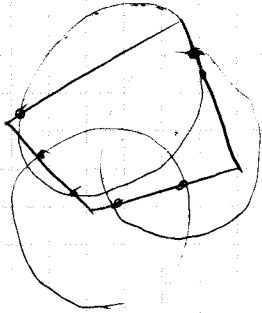
очевидно, что треугольник может быть равнобедренным \Rightarrow вырезал 16 16 $16 \Rightarrow$ а может упростить

уменьше 64

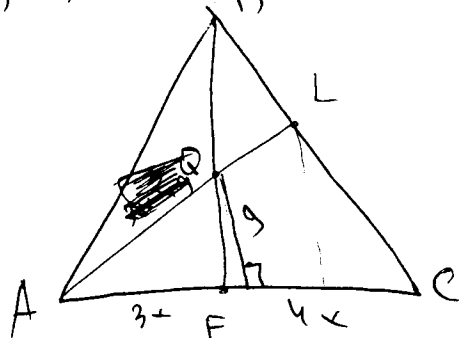
ответ: 64



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$AD + BC - A(BCD) = 10 \quad B$$



$$\cos^2 2x + \sin^2 2x = 1$$

$$\sqrt{9x^2 + 81}$$

$$9(x^2 + 9)$$

$$3\sqrt{x^2 + 9}$$

$$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 = 2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1 = 2(4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1) - 1 = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 2 - 1 = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$$

$$2\cos^2 x - (8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1) + 7 = 0$$

$$2\cos^2 x - 8\cos^4 x + 8\cos^2 x + 6 = -8\cos^4 x + 10\cos^2 x + 6$$

$$\frac{\times 4}{192}$$

$$D = 100 + 144 = 244$$

$$-8t^2 + 10t + 6$$

$$4t^2 - 5t + 3$$

$$4\cos^4 x - 5\cos^2 x + 3 = 0$$

$$D = 25 - 48 = -23$$

$$\frac{1}{2} (8\cos^2 x - 1 - 8\cos^4 x + 2\cos^2 x + 7) =$$

$$-\frac{1}{2} (-8\cos^4 x + 10\cos^2 x + 6) = 4\cos^4 x - 5\cos^2 x - 3$$

$$\cos^2 x (4\cos^2 x - 5) - 3$$

$$D = 25 + 48 = 73$$

$$\cos^2 x = \frac{5 \pm \sqrt{73}}{8}$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$0 \leq \cos^2 x \leq 1$$

$$0 \leq 4\cos^2 x \leq 4$$

$$-5 \leq 4\cos^2 x - 5 \leq -1$$

$$0 \leq \cos^2 x \leq 1$$

$$4\cos^4 x - 5\cos^2 x - 3$$

$$16\cos^3 x \sin x - 10 \cdot \cos x \sin x \cdot 2\cos x \sin x (8\cos^2 x - 5)$$

$$\sin 2x (8\cos^2 x - 5)$$

$$0 \leq 4\cos^4 x \leq 4$$

~~$$0 \leq 5\cos^2 x \leq 5$$~~

~~$$0 \leq 4\cos^4 x \leq 4$$~~

~~$$0 \leq 4\cos^4 x - 5\cos^2 x \leq 1$$~~

$$0 \leq 4\cos^4 x \leq 4$$

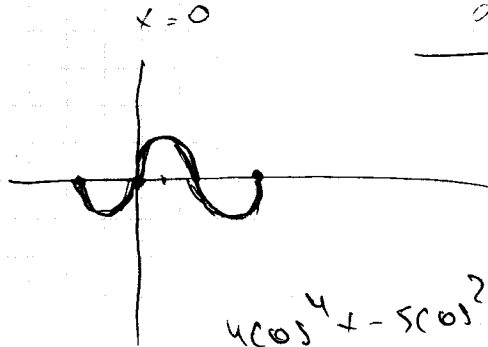
~~$$1 \geq 8\cos^2 x \geq 0$$~~

$$5 \geq 5\cos^2 x \geq 0$$

$$-5 \leq -5\cos^2 x \leq 0$$

$$-5 \leq 4\cos^4 x - 5\cos^2 x \leq 4$$

$$-8 \leq 4\cos^4 x - 5\cos^2 x \leq 1$$



$$4\cos^4 x - 5\cos^2 x - 3$$

$$\frac{2^2}{2^4} - \frac{5}{2^2}$$

~~$$\frac{1}{4} - \frac{5}{4}$$~~

$$\frac{\sqrt{2}}{4^2}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{4}{16} \cdot 4 - 5 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{16} \cdot \frac{1}{8} - \frac{5 \cdot 1}{2}$$

$$\frac{1}{16} - \frac{5 \cdot 1}{2}$$

$$\frac{1}{16} - \frac{5 \cdot 1}{2}$$

$$\frac{1}{16} - \frac{5 \cdot 1}{2}$$

$$\frac{1}{16} - \frac{5 \cdot 1}{2}$$

$$\begin{array}{r} +35 \\ +20 \\ \hline 4+00 \\ \hline 500 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 35 \\ +15 \\ \hline 175 \\ +35 \\ \hline 525 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 35 \\ +50 \\ \hline 100 \\ 175 \\ \hline 1750 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ +13 \\ \hline 38 \\ \hline 25 \\ \hline 325 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1750 \\ +325 \\ \hline 2075 \end{array}$$

$$1+2+3$$

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{25 \cdot 26}{2}$$

$$1+2+3+\dots+25 = 26$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ +48 \\ \hline 73 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 73 \overline{)16} \\ 69 \overline{)4} \\ \hline 9 \end{array}$$

$$4 \frac{16}{9}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$f(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$$

$$- 2 \sin 5x \sin 9x + 2 \sin^2 7x + 2 \cos^2 x + 6$$

$$\int (\cos 14x - \cos 4x + 2 \sin^2 7x + 2 \cos^2 x + 6) = \frac{1}{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x + 2 \sin^2 7x + 2 \cos^2 x + 6) = \frac{1}{2} (7 + 2 \cos^2 x) = 3.5 + \cos^2 x$$

$$\log \sqrt{x+3} - x (x+5) \geq 1$$

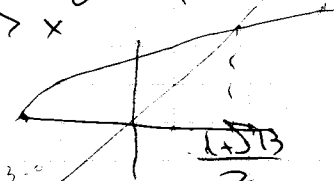
$$\sqrt{a} = x$$

$$0 = x^2$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{32} \times 1024 \\ \sqrt{4} + 3072 \\ 96 \quad 1024 \\ \hline 1024 \quad 3312 \end{array}$$

$$\sqrt{x+3} - x > 0 \quad x+5 > 0 \quad x > -5 \quad \sqrt{x+3} > x$$

$$\sqrt{x+3} - x \neq 1 \quad x \geq -3$$



$$2x - 22 + 23 + 24 + 25$$

$$35 \cdot 1 + 16 + 17 + 18 + 19 + 22$$

$$35 \cdot 2 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15$$

$$35 \cdot 3 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

$$35 \cdot 4 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

$$\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x$$

$$2(\cos^2 2x - 1)^2$$

$$x^2 + x - 3 = 0$$

$$D = 1 + 12 = 13$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\sqrt{x+3} - x = 1$$

$$x+3 = x^2 + 2x + 1$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$D = 1 + 8 = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = 1; -2$$

$$\sqrt{x+3} > x$$

$$\sqrt{x+3} = x$$

$$x \in [-3; 1) \cup (1; \frac{1+\sqrt{13}}{2}]$$

$$\sqrt{x+3} - x \geq 1$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad 64 \quad \dots \quad 17 \quad 18 \\ \hline 5 \quad \dots \quad 9 \quad \dots \quad 11 \quad 12 \\ \hline 9 \quad \dots \quad 4 \quad \dots \quad 5 \quad 12 \end{array}$$

$$\sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{5} = x$$

$$\sqrt{a} = x$$

$$x = 1$$

$$x^2 - x - 5 = 0$$

$$D = 1 + 20 = 21$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$$\sqrt{x+3} - x = x+5$$

$$4x^2 + 19x + 22 = 0$$

$$D = 361 - 352 = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{-19 \pm 3}{8} = -2$$

$$\sqrt{x+3} = 2x+5$$

$$x^2 + 19x + 22 = 0$$

$$x_{1,2} = -2$$

$$x+3 \leq 4x^2 + 20x + 25$$

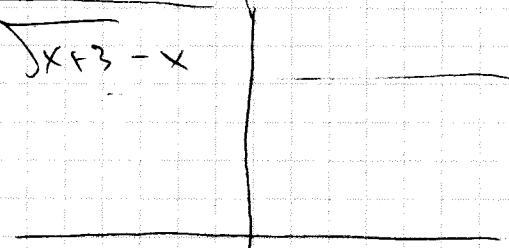


$$x+3 - 2x \sqrt{x+3} + x^2 =$$

$$x+5$$

$$x+5 > \sqrt{x+3} - x$$

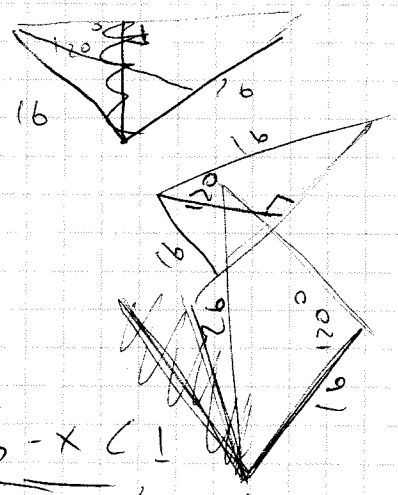
$$2x+5 > \sqrt{x+3}$$



$$x^2 = 64$$

$$x - 8 = 16$$

$$x + 13 = 26$$



$$\sqrt{x+3} - x < 1$$

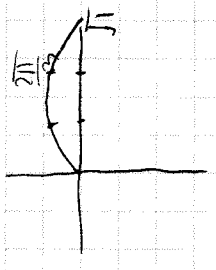
$$\sqrt{x+3} < x+1$$

$$x+3 < x^2 + 2x + 1$$

$$x^2 + x - 2 > 0$$

$$D = 1 + 8 = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = 1, -2$$



$$26 - A = 16 - a + 204 - 1$$

$$26 - A = a(24 - a)$$

$S_{BAC} = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 26 = 208$
 $S_{BAC} = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 26 \cdot \sin 120^\circ = 16 \cdot 26 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 16 \cdot 26 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $16 \cdot 26 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 211 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

12-014

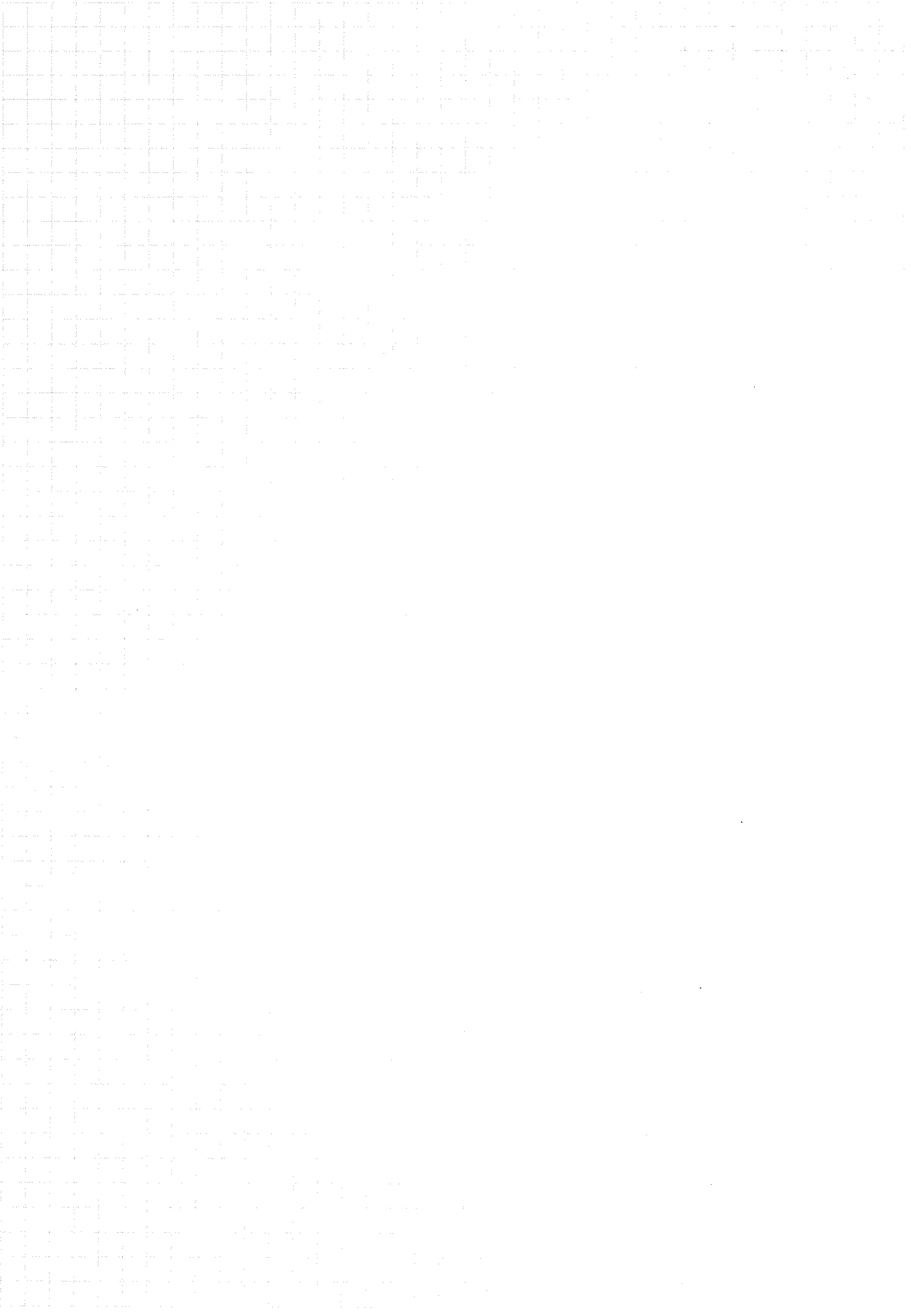
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)