

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО  
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2

ШИФР

12-015

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола  $y = x^2$  пересекает прямые  $y = 169$ ,  $y = 64$  и  $y = a$ , высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра  $a$  из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом  $120^\circ$ ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$ .
3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник  $ABCD$ . Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ , причём  $\omega_1$  касается сторон  $AD$  и  $DC$ ,  $\omega_2$  касается сторон  $DC$  и  $CB$ , а  $\omega_3$  касается сторон  $CB$ ,  $BA$  и  $AD$ .
  - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что  $AD + BC - AB - CD = 10$ .
  - б) Найдите угол  $AOB$ , где  $O$  – центр окружности  $\omega_3$ .
  - в) Пусть дополнительно известно, что  $AO \cdot BO = 42$ . Найдите  $AB$ .
5. Решите неравенство  $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$ .
6. Точки  $F$  и  $L$  лежат на сторонах  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  соответственно, причём  $AF : FC = 3 : 4$ . Отрезки  $BF$  и  $AL$  пересекаются в точке  $Q$ ; площади треугольников  $BQL$  и  $BAC$  относятся как  $1 : 16$ . Найдите расстояние от точки  $L$  до прямой  $AC$ , если расстояние от точки  $Q$  до прямой  $AC$  равно 9.
7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка  $[1; 35]$ ,  $[36; 70]$ ,  $[71; 105]$ ,  $[106; 140]$ ,  $[141; 175]$ . Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

53 Первое число может быть „5“ или „9“.  
Если первое число „5“, то кол-во 18-ых чисел, удовлетворяющих условию задачи, = 24.  
Если первое число 9, тогда кол-во 18-ых чисел, удовлетворяющих условию задачи, составит  $12 \cdot 12 = 144$ . Следовательно общее число всех возможных 18-ых чисел составит  $144 + 24 = 168$ .

Ответ: 168 чисел.

54 Три вычитаемых модных чисел могут быть равны 35, 70, 105 и 140.  
Числа на промежутке [1; 35]: 1, 2, 3, 4, 5.  
Числа на промежутке [36; 70]: 41, 42, 43, 44, 45.  
Числа на промежутке [71; 105]: 81, 82, 83, 84, 85.  
Числа на промежутке [106; 140]: 121, 122, 123, 124, 125.  
Числа на промежутке [141; 175]: 161, 162, 163, 164, 165.

Сумма всех полученных чисел составляет 2075.

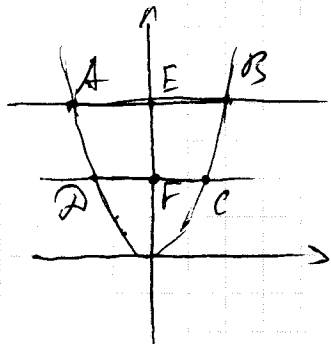
Ответ: 2075.



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)

### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$y = x^2$$

$$y = 169 \quad x = 13 \quad AB = 26$$

$$y = 64 \quad x = 8 \quad CD = 16$$

$$EF = 105$$

$$x^2 = 26$$

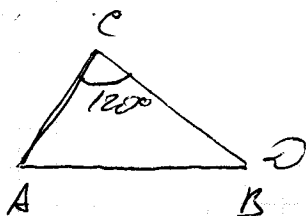
$$676$$

$$x^2 = \frac{676}{y}$$

$$xy = \frac{256}{y}$$

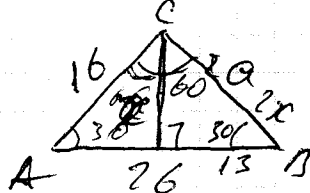
$$x = \frac{26}{\sqrt{y}}$$

$$x = \frac{26}{y^{1/2}}$$



$$AB > CD$$

$$CD = a$$



$$a = 16$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 16 \\ \hline 96 \\ + 160 \\ \hline 256 \\ - 169 \\ \hline 89 \end{array}$$

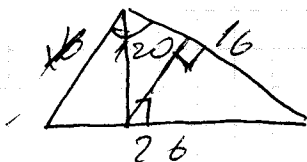
$$\frac{26}{y^{1/2}} \cdot y = \frac{256}{y}$$

$$\frac{26}{y^{1/2}} = \frac{256}{y^2}$$

$$4x^2 = x^2 + 169$$

$$3x^2 = 169$$

$$x^2 = 5$$



$$- 256 - 169 =$$

$$\frac{26}{\sin 120} = \frac{26}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{52}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{array}{r} 52 \quad 16 \\ 48 \quad 3,2 \\ \hline 40 \\ \quad 32 \\ \hline 80 \end{array}$$

$$26y^2 = 256y^{1/2}$$

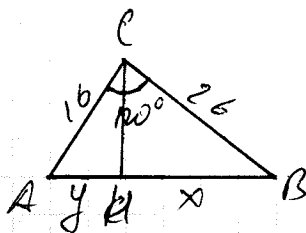
$$13y^2 = 128y^{1/2}$$

$$\frac{52}{\sqrt{3}} = \frac{16}{\sin x}$$

$$16\sqrt{3} = 52 \sin x$$

$$\frac{16\sqrt{3}}{52} = \sin x$$

$$\begin{cases} y = 676/x^2 \\ x \cdot \frac{456976}{2^4} = 256 \end{cases}$$

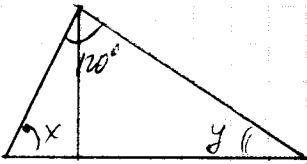


$$\begin{cases} y = 676/x^2; \\ 456976/x^2 = 256; \end{cases}$$

$$\sqrt{xy} \cdot x = 26$$

$$\sqrt{xy} \cdot y = 16$$

$$\begin{cases} xy = 676 \\ xy^2 = 256 \end{cases}$$



$$\sqrt{x+3} - x = \sqrt{x+5} \quad x \neq -3$$

$$\sqrt{x+3} - x = \sqrt{x+5}$$

$$x > y \quad x+y=60^\circ$$

$$\sqrt{x-3} - 2x = 5$$

$x =$

$$x-3 = 4x\sqrt{x-3} + 4x^2 = 25$$

$$5x - 4x\sqrt{x-3} - 28 = 0$$

имеем  $x=5$

5 9

$$x=5$$

$$A \neq 12 = 13 \text{ мес.}$$

9

$$6 \cdot 2! = 12$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10...	12
2!	3!	5	5	5	5	5				

$$2 \cdot 13$$

$$8 \cdot 12$$

$$12 \cdot 2! = 24$$

$$1 \text{ мес.} = 2!$$

$$2 \cdot x \cdot 9$$

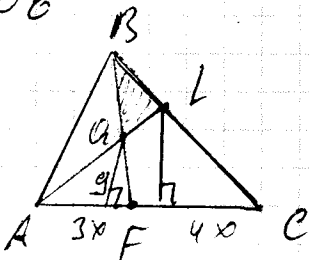
$$2$$

$$2 \text{ мес.} = 3!$$

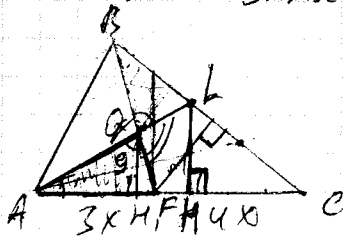
В3 Первое число или "5" или "9". Если первое число "5", то кол-во 18-ых чисел составит 24. Если первое число 9, тогда кол-во 18-ых чисел составит  $12 \cdot 12 = 144$ . Следовательно кол-во 18-ых чисел удовлетворяющих условию задачи составит  $144 + 24 = 168$  мес.

Ответ: 168 мес.

В6



$$S_{ABQ} : S_{ABE} = 1 : 16$$



Доказ

$$S_{BQ} : S_{ABE} = 1 : 16$$

$$AF : FC = 3 : 4$$

$$QH_1 = 9 \text{ см}$$

Каковы

LN - ?

$$\Delta AQH_1 \sim \Delta BQL \sim \Delta ABC$$

**ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА**

Высота  $\triangle ABC$   $\neq$  к  $\text{эков.}$   $AC = 9 \quad 16 = 144$

$S_{\triangle ABC} = 4x \cdot 144 \cdot \frac{1}{2} = 4x \cdot 72 = 504x$

$S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot 9 = 13,5x$

$S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 3x = 13,5x$

$LR \in \triangle ALC$ , где  $AC = 4x$

$S_{\triangle QBL} : S_{\triangle ABC} = 1 : 16$

$BL : AC = 1 : 4$

$BL = 4x : 4 = 1,75x$

$QL : BL = 3 : 1,75$

$\sqrt{4}$

[1; 35] 1, 2, 3, 4, 5

[36; 40] 41, 42, 43, 44, 45

[41; 105] ~~41, 42, 43, 44, 45, 46~~

[106; 140] 111, 112, 113, 114, 115

[140; 175] ~~140, 141, 142, 143, 144~~  
140, 146, 147, 148, 149

1) 1, 2, 3, 4, 5

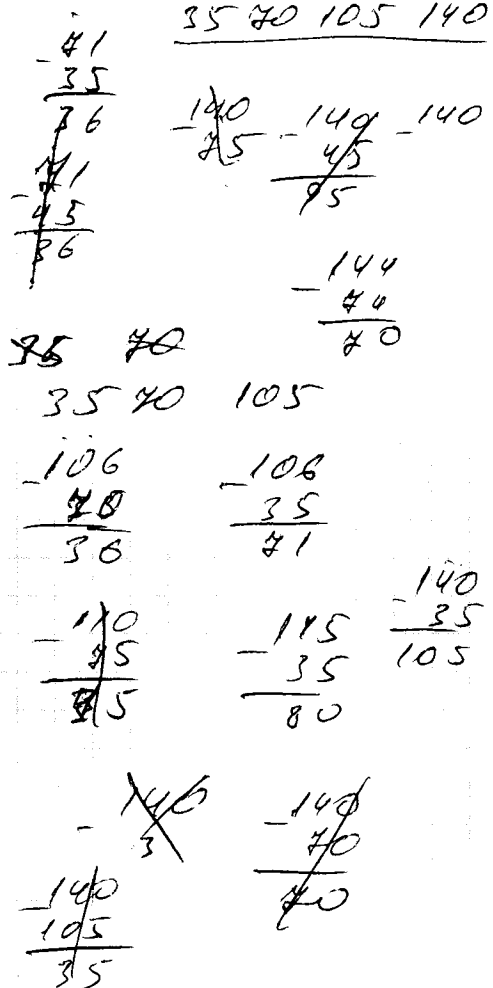
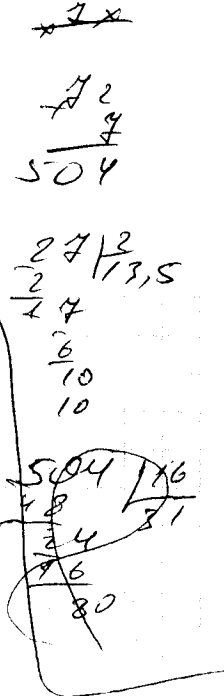
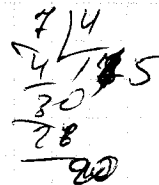
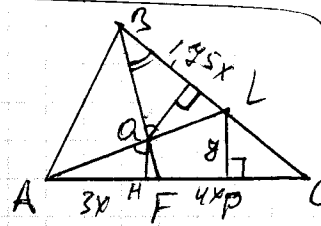
2) 41, 42, 43, 44, 45

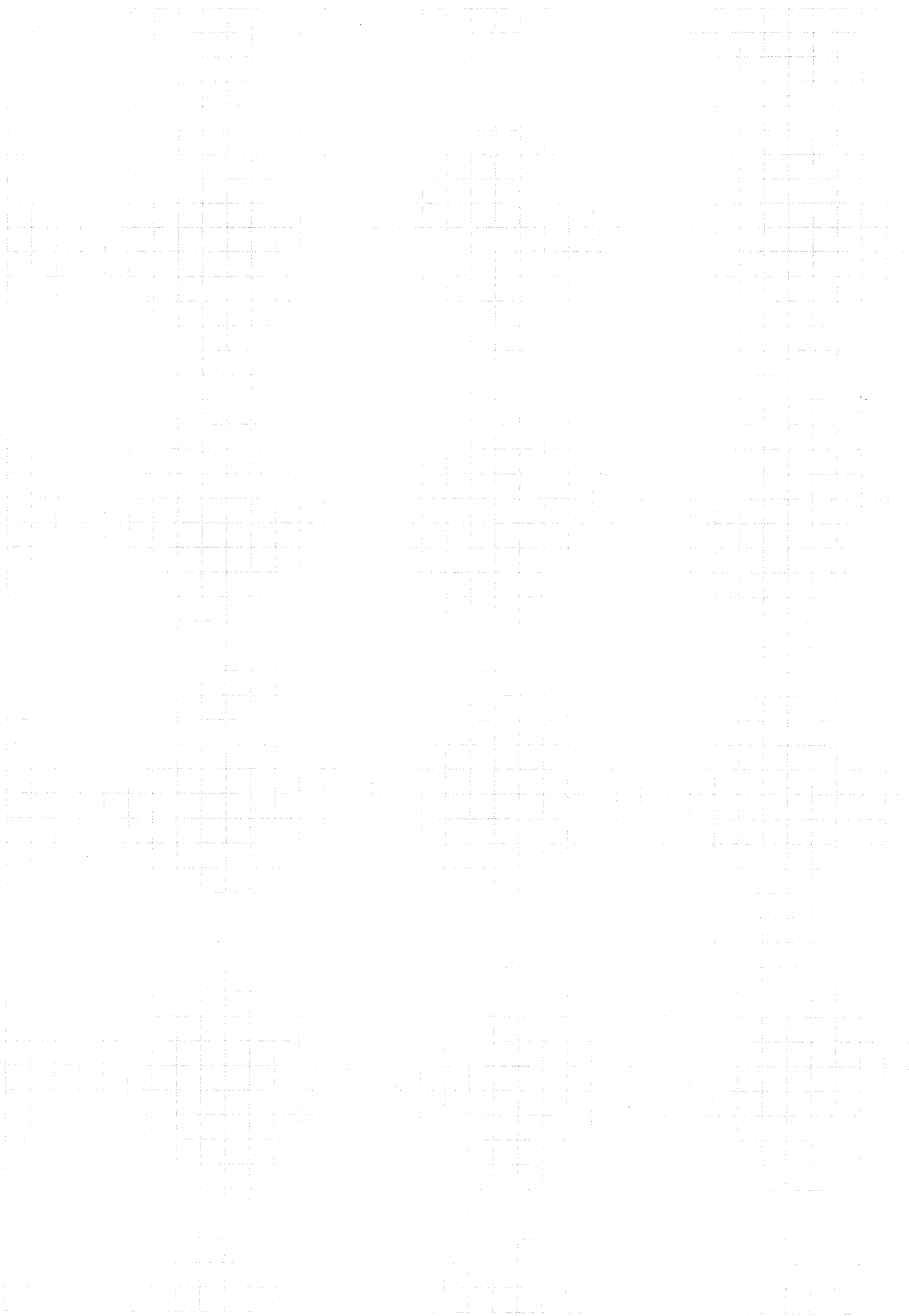
~~46, 47, 48, 49, 50~~

3) 81, 82, 83, 84, 85

4) ~~106~~ 121, 122, 123, 124, 125

5) 161, 162, 163, 164, 165      Ответ: 2045.





черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)





12-015
--------

ШИФР

(заполняется секретарём)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)

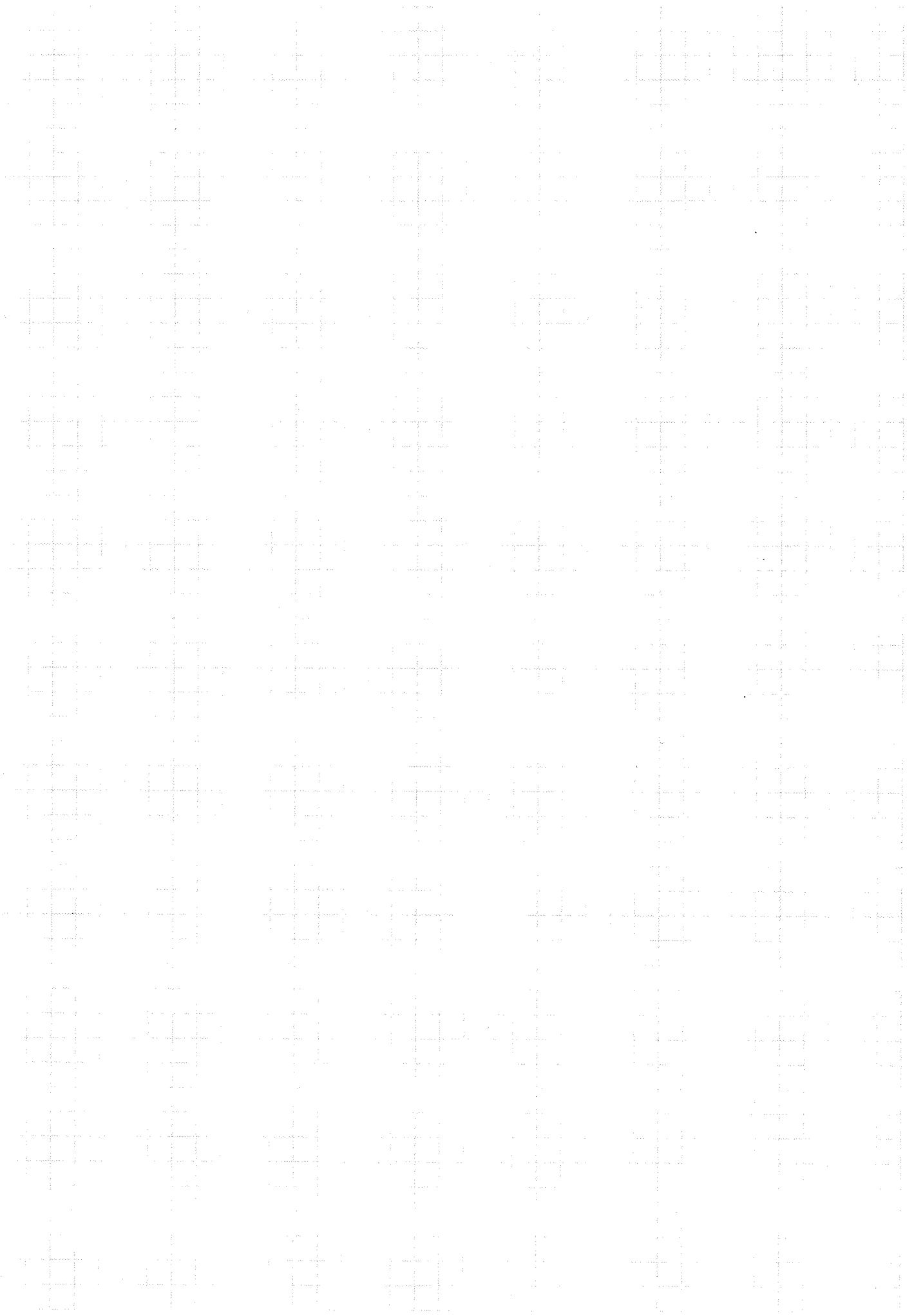


12-015

ШИФР

(заполняется секретарём)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)