

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

10 класс

БИЛЕТ 3

ШИФР

12-016

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2 - 5x + 1$ пересекает прямые $y = -1$, $y = 4$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?
2. Найдите количество 16-значных чисел, содержащих только цифры “3”, “4” и “9” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “9” ровно четыре, и они идут подряд.
3. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 24$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax - 2a| \leq \sqrt{x - 1}$ является отрезок длины 3?
5. Несколько рабочих выполняют работу за 28 дней. Если бы их было на 2 человека больше и каждый работал бы на 1 час в день дольше, то они выполнили бы эту работу за 21 день. Если бы их было ещё на 4 человека больше и они работали бы ещё на 1 час в день дольше, они выполнили бы эту же работу за 15 дней. Сколько было рабочих? (Производительность всех рабочих одинакова.)
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 7 : 3$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $7 : 36$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 3.
7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 30]$, $[31; 60]$, $[61; 90]$, $[91; 120]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 30. Какое наибольшее значение может принимать сумма двадцати четырёх выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание №7

Так как разность любых двух чисел из 24 чисел не должна делиться на 30, то и мы должны получить максимальную их сумму, то мы возьмём из промежутка $[91; 120]$ - первые 6 чисел $[61; 90]$ - от ⁷ до 12 числа $[31; 60]$ - от 13 до 18 числа $[1; 30]$ - от 19 до 24 числа

Примечание: Числа берём с конца (т.е. первые числа с конца)

Взяв эти числа соответственно получим:

$$120 - 1 + 120 - 2 + 120 - 3 + 120 - 4 + 120 - 5 + 120 = \text{для первого случая} \\ = 6 \cdot 120 - 15 \neq -$$

Аналогично для остальных промежутков:

$$\begin{aligned} 6 \cdot 84 - 15 \neq & \text{ - сумма чисел взяток из 2 промежутка} \\ 6 \cdot 48 - 15 \neq & \text{ - сумма чисел взяток из 3 } \\ 6 \cdot 12 - 15 \neq & \text{ - сумма чисел взяток из 4 } \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} 6 \cdot 84 - 15 \neq \\ 6 \cdot 48 - 15 \neq \\ 6 \cdot 12 - 15 \neq \end{aligned}} \right\} \text{ПРОМЕЖУТКА}$$

Представим их в виде суммы выразим:

$$6 \cdot (120 + 84 + 48 + 12) - 15 = 6 \cdot 234 = 1404 - \text{максимальное}$$

значение которое может принимать сумма 24 чисел Пикоккио.

Замечу что разность любых двух не будет делиться на 30

ОТВЕТ: 1404 - сумма чисел Пикоккио

Задача №1

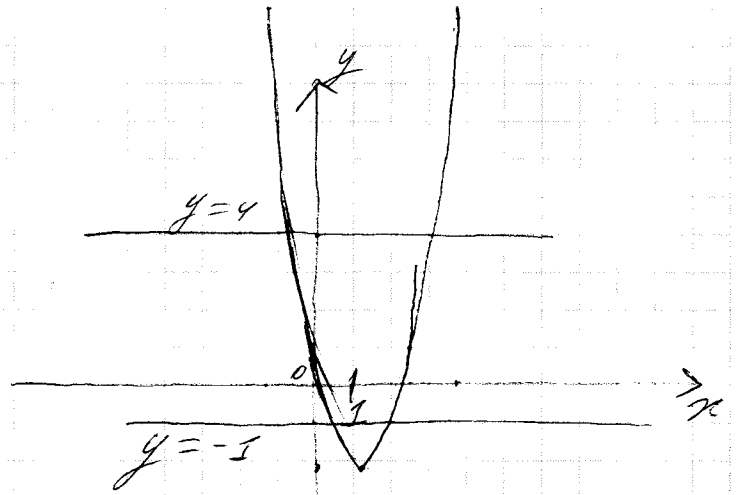
$$y = 2x^2 - 5x + 1$$

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{5}{4} = 1,25$$

$$y_0 = 2 \cdot 1,25^2 - 5 \cdot 1,25 + 1 = 2 \cdot 1,5625 - 6,25 + 1 = 3,125 - 6,25 + 1 = -2,125$$

$$x \neq 0,25$$

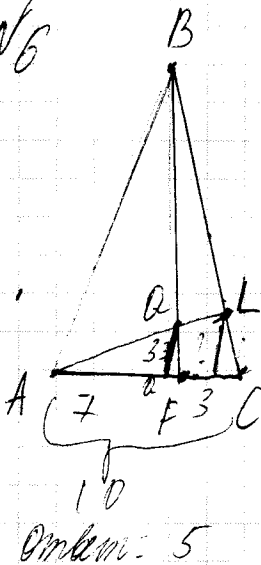
$$y = 1$$



Произведем чертеж по заданию:

т.к. прямые вида $y=a$ ($y=4, y=-1$) параллельны оси x и \Rightarrow друг другу, ~~то~~ ~~с~~ ~~а~~ ~~то~~ ~~не~~ ~~всегда~~ с заданной параболой, ~~каждый~~ ~~прямоугольник~~ не представляется возможным.

№6



$\triangle ABC$

$$\frac{S_{BFL}}{S_{BAC}} = \frac{7}{36} \quad \frac{AF}{FC} = 7:3$$

$$BF \cap AL = G$$

$$AG = 3$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

12-016

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

12 - 016

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

12 - 01E
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

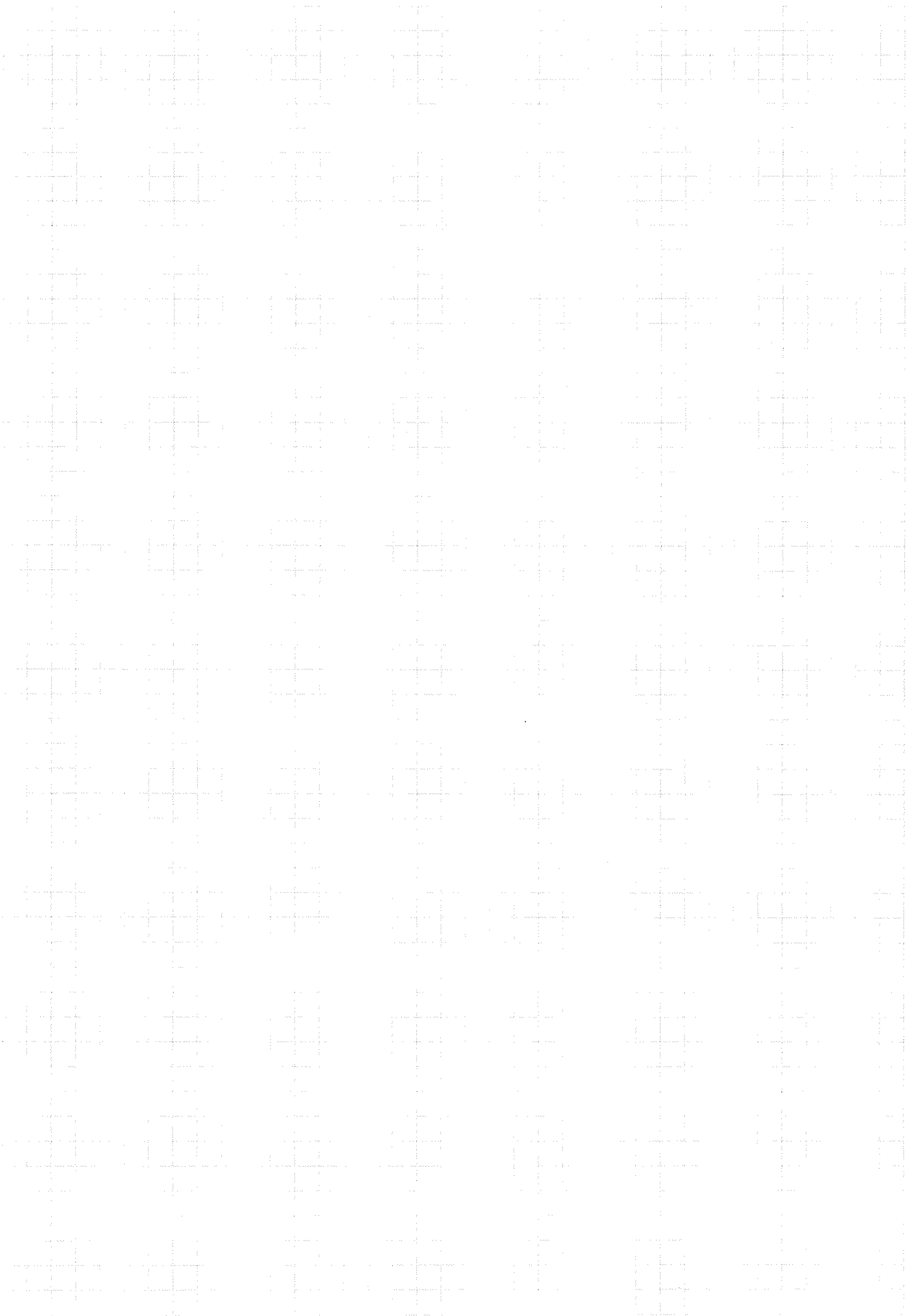


12-016

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)