МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2 ШИФР 12-017

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.

3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.

7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

12 - 011

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin 2x - 4\sin 2x \cos 2x = 0$

$\sin 2x (1 - 4\cos 2x) = 0$

1) $\sin 2x = 0$

$x = \frac{\pi n}{2}, n \in Z$

2) $\cos 2x = \frac{1}{4}$

~~1 - sin~~ $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{4}$

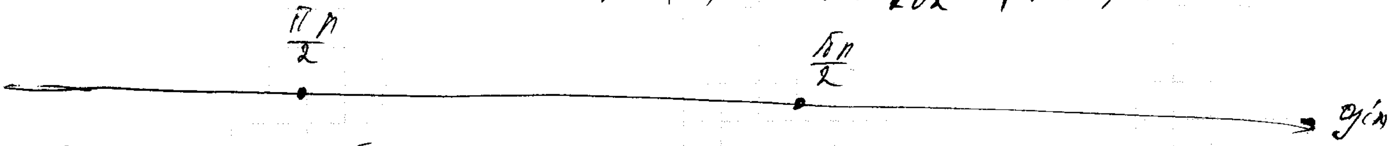
$1 - 2\sin^2 x = \frac{1}{4}$

$2\sin^2 x = \frac{3}{4}$

$\sin^2 x = \frac{3}{8}$

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$x = (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \pi k, k \in Z$



Ответ: $x_{наим} = \frac{\pi n}{2}, n \in Z$

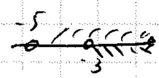
$x_{наиб} = (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \pi k, k \in Z$

№ 5

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$

ОДЗ:

$\begin{cases} \sqrt{x+3}-x>0 \\ x+5>0 \end{cases} \quad \begin{cases} x>-3 \\ x>-5 \end{cases}$



$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5)-1\geq 0$

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5)-\log_{\sqrt{x+3}-x}\sqrt{x+3}-x\geq 0$

$\log_{\sqrt{x+3}-x}\dfrac{x+5}{\sqrt{x+3}-x}\geq 0$

$\sqrt{x+3}-x>0 \quad x\in(-3;+\infty)$

$\cancel{x+3-x^2>0}$

$x>-3$

$\sqrt{x+3}-x\leq x+5$

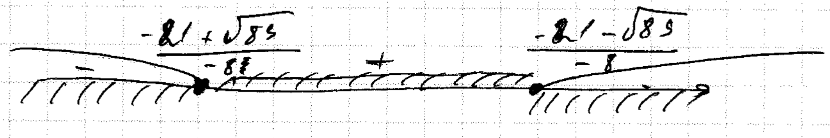
$\sqrt{x+3}\leq 2x+5$

$x+3\leq 4x^2-20x+25$

$-4x^2+21x-22\leq 0$

$D=89$

$x=\dfrac{-21\pm\sqrt{89}}{-8}$



сравним числа -3 и $\dfrac{-21+\sqrt{89}}{-8}$

$9<\sqrt{89}<\cancel{100}\ 10$

$-\frac{3}{4}<\dfrac{-21+\sqrt{89}}{-8}<-\frac{11}{8}$

можно сделать вывод, что $\dfrac{\sqrt{89}-21}{-8}$ входит в ОДЗ

~~Нот~~ Ответ: $x\in\cancel{\left[\frac{-21+\sqrt{89}}{-8}\right.}\ \cancel{\frac{-21-\sqrt{89}}{-8}}]$

$x\in\cancel{[(\frac{-21-\sqrt{89}}{})}$ $\quad x\in\left(-3;\ \dfrac{-21+\sqrt{89}}{-8}\right]\cup\left[\dfrac{-21-\sqrt{89}}{-8};+\infty\right)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

12 - 017

ШИФР

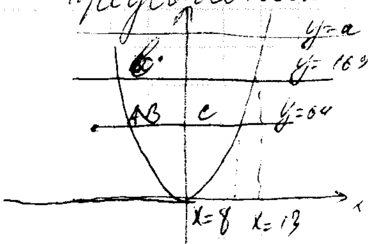
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

① $y=x^2$ $y=169$ $y=64$ $y=a$

Треугольник ABC

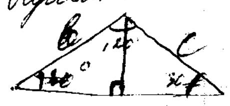


$c=16$

$b=26$

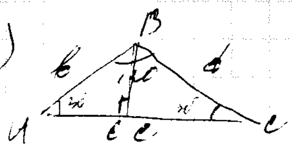
② варианты

а)

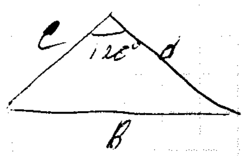


~~угловые~~

б)



в)



Для варианта а)

По теореме cos

$d^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 120^\circ$

$d = \sqrt{b^2 + c^2 + bc} = \sqrt{332 + 416} = \sqrt{\cancel{836}\ 1348}$

Тогда $x = \frac{1}{2}\sqrt{\cancel{836}\ 1348} \Rightarrow a = x^2 - \frac{\cancel{836}\ 1348}{4} = \cancel{209}\ 337$

~~Для варианта б)~~

~~$c^2 = b^2 + d^2 - 2bd\cos 120^\circ$ ОДЗ: $d>0$~~

~~$d^2 + 16d - c^2 + b^2 = 0$~~

~~$d^2 + 16d + 420 = 0$~~

~~$\varnothing$~~

~~Для варианта в)~~

~~$b^2 = c^2 + d^2 - 2dc$~~

Для варианта б)

$c^2 = d^2 + b^2 - 2bd\cos 120°$, $d > 0$

$d^2 + bd + b^2 - c^2 = 0$

$d^2 + 26d + 420 = 0$

$\varnothing$

Для варианта в)

$b^2 = d^2 + c^2 - 2dc\cos 120°$, $d > 0$

$d^2 + 16d - 420 = 0$

$D = 1936 = 44^2$

$d_1 = \frac{-16+44}{2} = \cancel{30}\ 14$

$d_2 < 0$, п.к.

Тогда $x = \cancel{15}\ 7$, $a = x^2 \Rightarrow a = \cancel{225}\ 49$

Ответ: $a = 225$; $a = \cancel{324}\ 49$

№2

$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

$g'(x) = \cancel{5\cos x}\ (\sin 5x)' \sin 9x + \sin 5x (\sin 9x)' - (\sin^2 7x)' - (\cos^2 x)'$

① $(\sin 5x \cdot \sin 9x)' = \cancel{5\sin 9x \cos}\ 5\cos 5x \sin 9x + 9\cos 9x \sin 5x$

② $(\sin^2 7x)' = 14\sin 7x \cos 7x = 7\sin 14x$

① $5\cos 5x \sin 9x + 9\cos 9x \sin 5x = 5\cos\frac{14x - 4x}{2}\sin\frac{14x+4x}{2} + 9\cos\frac{14x+4x}{2}\sin\frac{14x-4x}{2} =$

$= 2{,}5(\sin 14x + \sin 4x) + 4{,}5(\sin 14x - \sin 4x) = 7\sin 14x - 2\sin 4x$

③ $(\cos^2 x)' = 2\cos x \sin x = -\sin 2x$

$g'(x)\ \cancel{7\sin 14x} - 2\sin 4x - \cancel{7\sin 14x} + \sin 2x \cancel{= 4}$

$g'(x) = \sin 2x - 4\sin 2x \cos 2x$

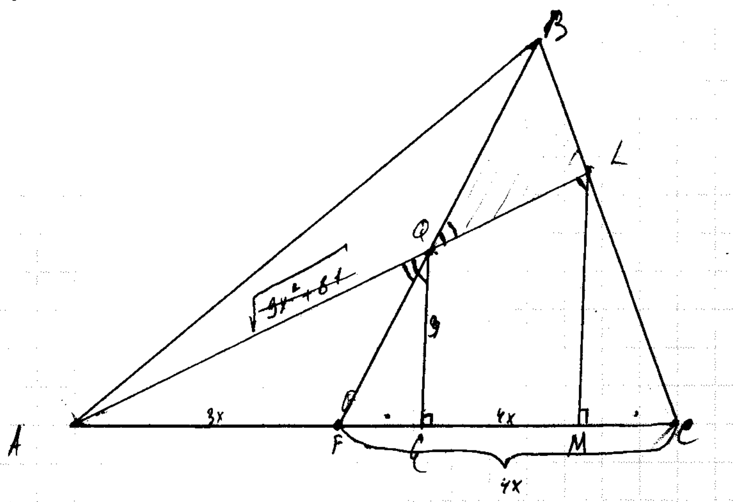
$g'(x) = 0$

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6



Дано:

$\frac{AF}{FC} = \frac{3}{4}$

$\frac{S_{BQL}}{BAC} = \frac{1}{16}$

$QE = 9$

Найти: LM - ?

~~$AQ = 3\sqrt{x^2+9}$~~
ложь!

$\angle BQA = \angle AQF$; $\angle ALM = \angle AQE$ ⟵
т.к. $QE \perp AC$ и $LM \perp AC \Rightarrow QE \parallel LM$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

12-017

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

12 · 017

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)