

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1

ШИФР

12-018
Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120° ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.
3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
 - в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB .
5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.
7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$$98 = 2x^2 \quad x \leq 4 \quad \Rightarrow a = 14$$

(сторона
треугольника)

$$18 = 2x^2 \quad x \leq 3 \quad \Rightarrow b = 6$$

$$a = 2x^2 \quad x \leq \frac{\sqrt{a}}{2} \quad \Rightarrow c = 2\sqrt{\frac{a}{2}}$$

Зная стороны и угол, можем найти a через теорему косинусов

① способ $2a = 196 + 36 - 168 \cdot \cos 120$

$$a = 158 \quad \vee \quad c = 2\sqrt{49}$$

② способ $196 = 2a + 36 + \frac{\sqrt{a}}{2} \cdot 12$

$$80 = a + 6 \cdot \sqrt{\frac{a}{2}} \quad 80 - a = 6\sqrt{\frac{a}{2}} \quad a^2 - 148a + 6400 = 0$$

$$D = 31684 - 25600 = 56084$$

$$a_{1,2} = \frac{148 \pm \sqrt{56084}}{2} = 50 \vee 128$$

$c_1 = 10 \vee c_2 = 16$
(подходит) \emptyset , т.к. $a > c$

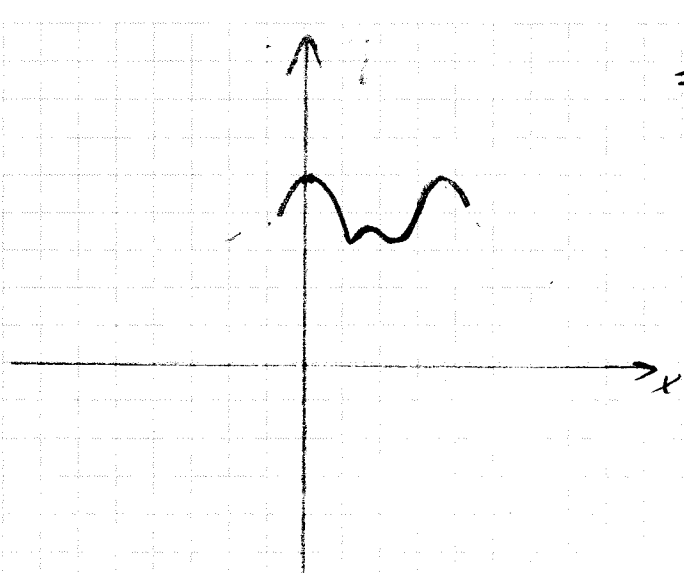
Ответ: 158; 50

№ 2

$$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 4x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4, \quad g(x)_{\max}$$

$$\Rightarrow \sin 3x \leq 1 = \sin 4x \leq \sin^2 x \leq \cos^2 5x \quad (x=0)$$

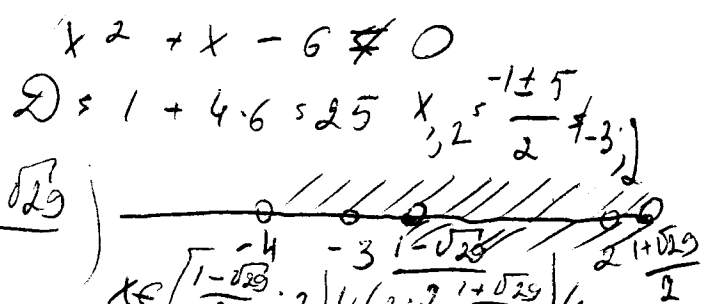
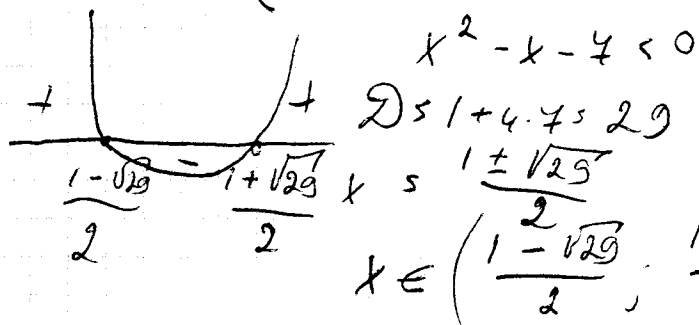
$$1 - 1 + 1 + 4 = 5 \Rightarrow g(x)_{\max} \leq 5$$



$$\Rightarrow g(x)_{\min} = 3,4, x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

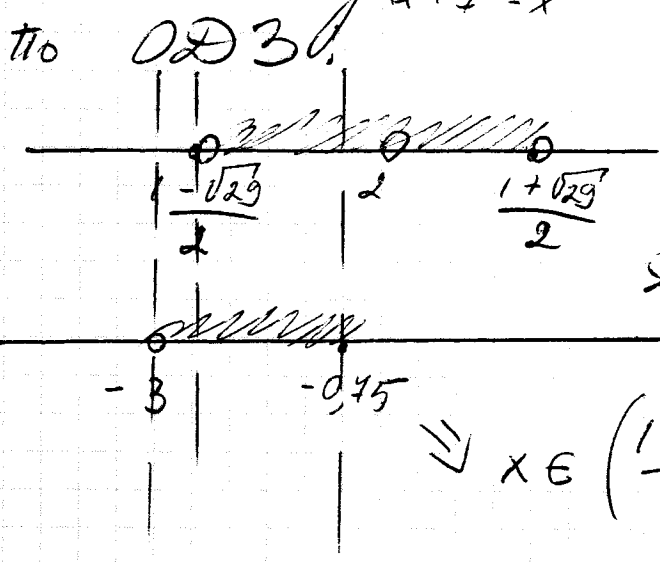
OD3: $\begin{cases} x+4 > 0 \\ \sqrt{x+4} \geq 0 \\ \sqrt{x+\frac{4}{x}} - x \neq 1 \\ \sqrt{x+\frac{4}{x}} - x > 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x > -4 \\ x \geq -4 \\ x + \frac{4}{x} \neq (x+1)^2 \\ x + \frac{4}{x} > x+2 \end{cases}$$



$$\log_{\sqrt{x+4}-x} (x+4) \geq 1$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x+\frac{4}{x}} - x &\leq x+4 \\ \sqrt{x+\frac{4}{x}} &\leq 2x+4 \\ x+4 &\leq 4x^2+16x+16 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 4x^2 + 15x + 9 &\geq 0 \\ D &= 225 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 81 \\ x &\in \left[\frac{-15 \pm 9}{8}, \dots \right] = [-3, -0.75] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x \in \left(\frac{1 - \sqrt{29}}{2}, -0.75 \right] \cup \left(\frac{1 - \sqrt{29}}{2}, -0.75 \right]$$

Ответ: $\left(\frac{1 - \sqrt{29}}{2}, -0.75 \right]$

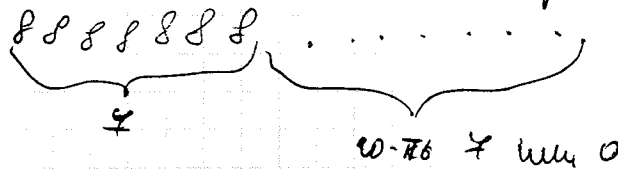
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3

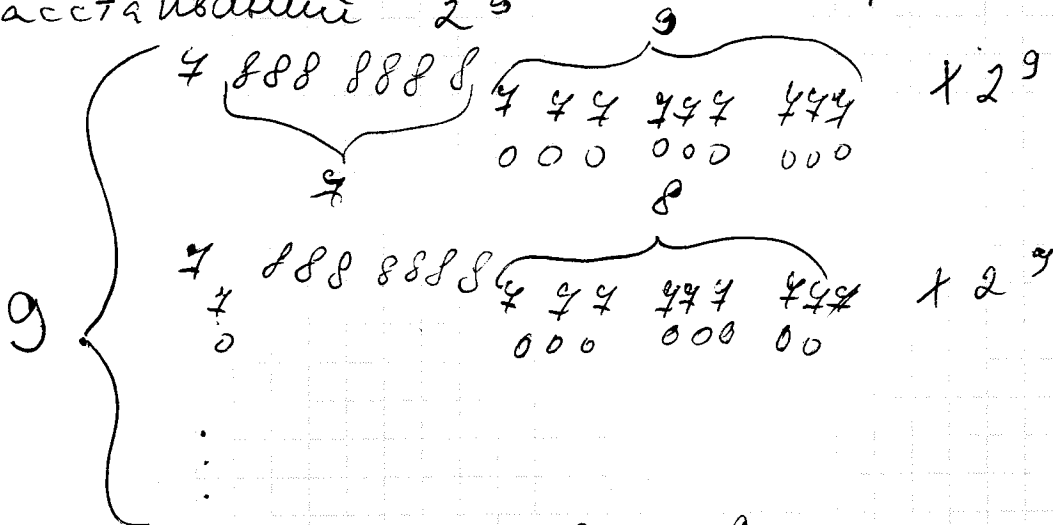
1.) Заметим, что на первом месте в 17-значном числе может стоять 4 или 8

2.) Если 8-ж можно поставить 10 способов так как они стоят все рядом, но уже было

3.) Рассмотрим случаи когда первая цифра это 8, тогда следующие 6 цифер - это тоже 8, оставшиеся 10 чисел ~~не могут~~ могут быть 4 или 0, т.е. 2 варианта и это в коренных - 2¹⁰ способов расставить 8.



4.) Когда первая цифра это 4, то 4 остаётся 10 свободных мест, в итоге, 4 занимает 8. Оставшиеся 9 мест занимают 0 и 4. Всего вариантов расстановки 2⁹



5.) Итого $2^{10} + 9 \cdot 2^9 = 2^9 \cdot 11 = 5632$
 Ответ: 5632

№4

Для того, чтобы разность моды
чисел была не кратна 45, то по
очереди складываем 6-ки из промежутка
[1; 45] - столько первых 6-ки, из
[46; 90] - столько же вторые 6-ки, из
[91; 135] - столько же третьи 6-ки, и т.д.
 $1+2+3+4+5+6+52+53+54+55+56+57 \dots$

$\dots = 3165$
 Ответ: 3165.

№5

$4x^2 + 15x + 9 \geq 0$

$D = 81$ $x_{1,2} = \frac{-15 \pm 9}{8} = -3; -0,75$

но $0,25 x \in (1; 2) \cup (2; \frac{1+\sqrt{29}}{2})$

$\Rightarrow x \in [-0,75; 2) \cup (2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}) \cup$
 $\cup (\frac{1+\sqrt{29}}{2}; +\infty)$

Ответ: $x \in [-0,75; 2) \cup (2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{29}}{2}; +\infty)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

⑤ $\log_{\sqrt{x+4}} -x(x+4) \geq 1$

$\sqrt{x+4} -x \geq x+4$

$\sqrt{x+4} -x -4 \geq 0$

$\sqrt{x+4} -x -4 \geq 0$

$-2x -4 \geq 0$

$-2x \geq 4$

$x+4 \geq 0$

$x \geq -4$

$x \leq -2$

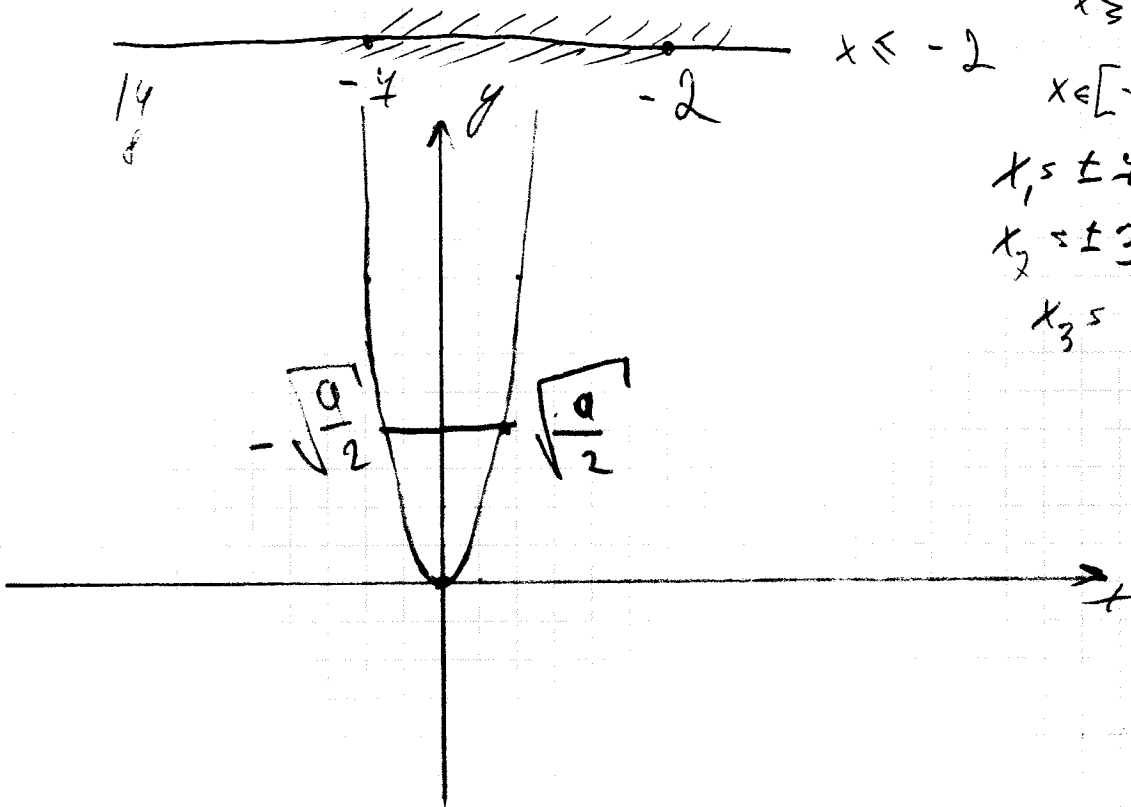
$x \in [-4; -2]$

$x_1 = \pm 4$

$x_2 = \pm 3$

$x_3 = \sqrt{\frac{a}{2}}$

①



$a = 14$

$b = 6$

$c = 2 \cdot \frac{a}{2}$

① $2a = 196 + 36 - 168 = 120$

$a = 158$

③ $36 = 2a + 36 + 14\sqrt{\frac{a}{2}}$

$2196 = 2a + 36 + \sqrt{\frac{a}{2}} \cdot 12$

$80 = a + 6\sqrt{\frac{a}{2}}$

$10 - a = 6 \cdot \frac{a}{2}$

$6400 - 1600 + a^2 = 4,5a$

$$a^2 - 148a + 6400 = 0$$

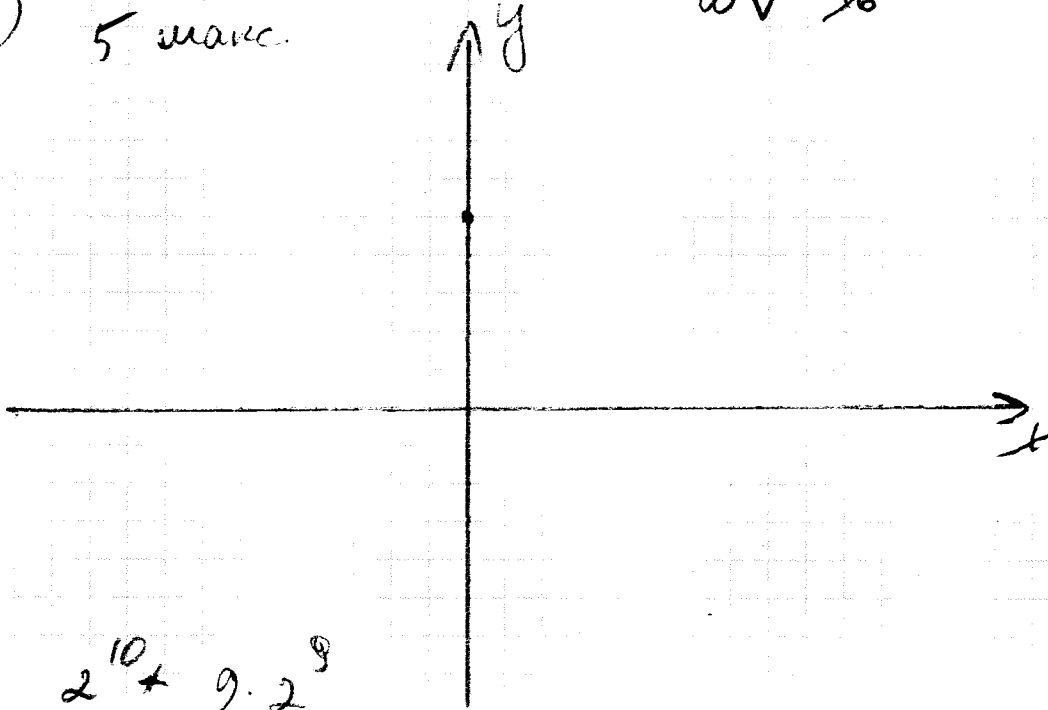
3125

$$D = 31684 - 25600 = 6084$$

$$a_{1,2} = \frac{148 \pm 78}{2} = 50, 128$$

2

5 макс.



3 $2^{10} + 9 \cdot 2^9$

5

$$(\sqrt{x+4} - x)^k \geq x+4, \quad k \geq 5$$

$$\sqrt{x+4} - x \geq x+4$$

$$x+4 \geq 2x+4 \quad |^2$$

$$x \geq -3$$

$$x+4 \geq 4x^2 + 16x + 16$$

$$4x^2 + 15x + 9 \geq 0$$

$$D = 225 - 4 \cdot 9 \cdot 9 = 81$$

$$-15 \pm 9$$

$$x_{1,2} = \frac{-15 \pm 9}{8} = -3; -0,75$$

$$x \in [-3; -0,75]$$

$$x_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$0 - 9,045 \cdot 6 - 0,00023 + 0,94$$

46 47 48 49 50 51 52 + ... 54 55 56 58



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

12-018

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

12 - 018

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)