

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2

ШИФР

12 - 019

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120° ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.
3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
 - в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB .
5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.
7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1.

Решение

$$y = x^2$$

$$y = 169 \Rightarrow x = \pm 13 \Rightarrow \text{длина отрезка} - 2 \cdot 13 = 26$$

$$y = 64 \Rightarrow x = \pm 8 \Rightarrow \text{длина отрезка} - 2 \cdot 8 = 16$$

По теореме косинусов

$$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + bc.$$

m-длина отрезка при прямой $y = a \Rightarrow m = 2\sqrt{a}$

① случай

$$m^2 = 26^2 + 16^2 + 26 \cdot 16.$$

$$m^2 = 676 + 256 + 416$$

$$m^2 = 1348$$

$$4a = 1348 \Rightarrow a = 337$$

② случай

$$26^2 = 16^2 + m^2 + 16m$$

$$m^2 + 16m - 420 = 0$$

$$(m+30)(m-14) = 0$$

$$\text{т.к. } m > 0 \Rightarrow m = 14. \Rightarrow$$

$$2\sqrt{a} = 14 \Rightarrow a = 49.$$

③ случай

$$16^2 = 26^2 + m^2 + 26m$$

$$m^2 + 26m + 420 = 0$$

$$m^2 + 26m + 169 + 251 = 0$$

$$(m+13)^2 = -251 \Rightarrow \emptyset \Rightarrow$$

Ответ: 49; 337.

$$\log_{\sqrt{x+3}} - x(x+5) \geq 1$$

$$\sqrt{x+3} - x \leq x+5$$

$$\sqrt{x+3} \leq x+x+5$$

$$\sqrt{x+3} \leq 2x+5$$

$$x+3 \leq 4x^2+20x+25$$

$$4x^2+20x-x+25-3 \geq 0$$

$$4x^2+19x+22 \geq 0$$

$$4x^2+19x+22=0$$

$$D = 361 - 352 = 9 = 3^2$$

$$x_1 = \frac{-19-3}{8} = -2,75$$

$$x_2 = \frac{-19+3}{8} = -2 \Rightarrow x \in (-\infty; -2,75] \cup [-2; +\infty)$$

Ответ: $(-\infty; -2,75] \cup [-2; +\infty)$

№ 7

Т.к. разность множителей двух чисел (выбранных) не кратна 35 \Rightarrow остатки от деления этих двух чисел на 35 не могут быть одинаковыми.
 \Rightarrow все 25 выбранных чисел должны иметь разные остатки от деления на 35.

Выберем 25 чисел с наименьшими остатками от деления на 35.

Наименьший остаток от деления на 35 — 0, но, если мы возьмем 0, то мы выйдем, максимальное число в промежутке \Rightarrow такой вариант нам не подойдет.

Возьмем 25 остатков и прибавим к ним сумму $(35+70+105+140)$ умноженную на 5, т.к. нам нужно получить сумму всех выбранных 25 чисел.

ОДЗ

$$\begin{cases} \sqrt{x+3}-x > 0 \\ \sqrt{x+3}-x \neq 1 \\ x+5 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x > -5 \\ x \neq -2 \\ x \neq 1 \\ x > -5 \\ x > -3 \end{cases}$$



12 - 019

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1+2+3\dots+25 + (35+75+105+140) \cdot 5 = 26 \cdot 12 + 13 + \\ + 350 \cdot 5 = 2075$$

Ответ: 2075.



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\log \sqrt{x+3} - x (x+5) \geq 1$$

$$(\sqrt{x+3} - x) \leq x+5$$

$$\sqrt{x+3} \leq 2x+5$$

$$x+3 \leq (2x+5)^2$$

$$x+3 \leq 4x^2 + 20x + 25$$

$$4x^2 + 20x + 25 \geq x+3$$

$$4x^2 + 19x + 22 \geq 0$$

$$4x^2 + 19x + 22 = 0$$

$$D = 361 - 352 = 9 = 3^2$$

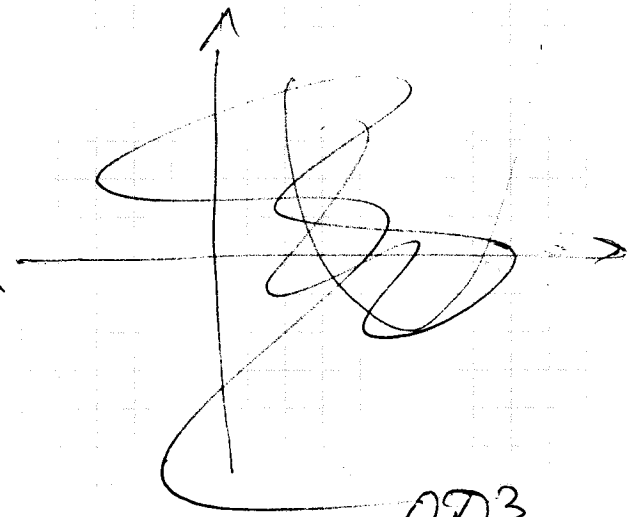
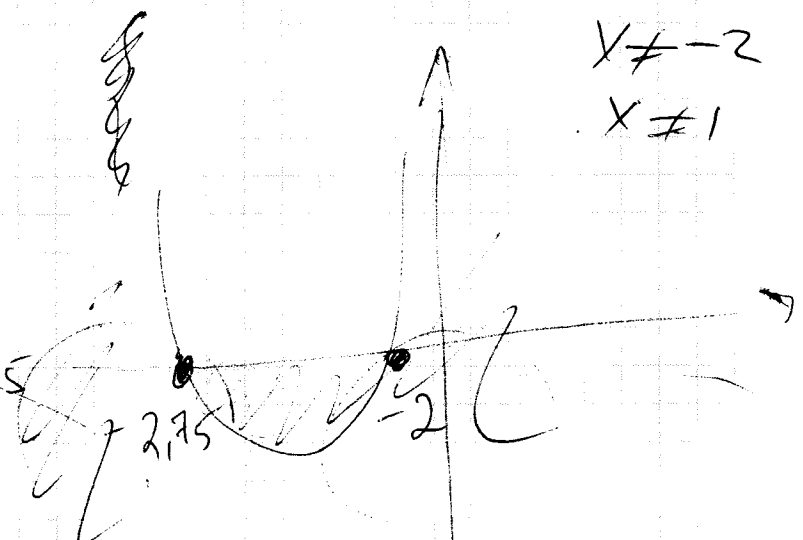
$$x_1 = \frac{-19 - 3}{8} = -2.75$$

$$x_2 = \frac{-19 + 3}{8} = -2$$

$$x \in [-2.75; 2]$$

ОДЗ

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - x > 0 \\ \sqrt{x+3} - x \neq 1 \\ x+5 > 0 \end{cases} \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x \neq -3 \\ x > -5 \end{cases}$$



ОДЗ

$$\begin{cases} x \geq -3 \\ x > -5 \\ x \neq -2 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

ЧЕРНОВИК. $x^2 - x - 32$

N1

$$y = x^2$$

$$y = 169 \Rightarrow x = \pm 13, \text{ длина отрезка } -2 \cdot 13 = -26$$

$$y = 64 \Rightarrow x = \pm 8, \text{ длина отрезка } -2 \cdot 8 = -16$$

$$x = 2\sqrt{a}$$

$$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

⇓

$$a^2 = b^2 + c^2 + bc$$

$$x^2 = 26^2 + 16^2 + 26 \cdot 16$$

$$x^2 = 676 + 256 + 416$$

$$x^2 = 1348$$

$$4a = 1348$$

$$a = 337$$

$$26^2 = 16^2 + x^2 + 16x$$

$$x^2 + 16x - 420 = 0$$

$$(x+30)(x-14) = 0$$

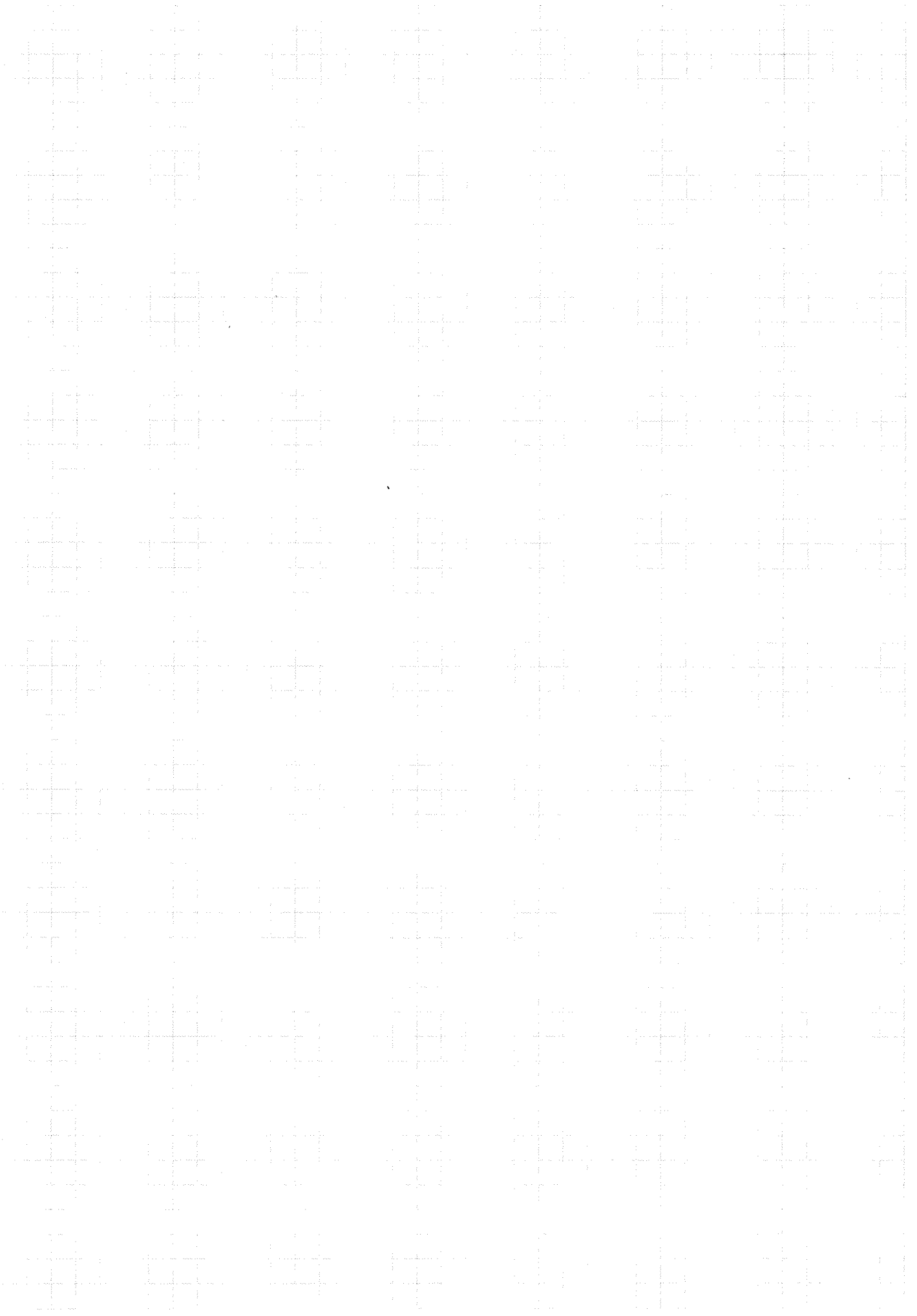
$$x = 14$$

$$2\sqrt{a} = 14$$

$$\sqrt{a} = 7$$

$$a = 49$$

ЧЕРНОВИК



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



12 - 019

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

