МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1 ШИФР 12-020

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x + 4) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка [1; 45], [46; 90], [91; 135], [136; 180], [181; 225]. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Заметим, что при пересечении графиков $y=2x^2$ и $y=98$ образуется отрезок, который равен 14 ($2x^2=98$; $x^2=49$; $x=\pm 7$); аналогично с графиком $y=18$, отсюда отрезок равен 6.

Найдем a по теореме косинусов: $2x^2=a \Rightarrow x=\sqrt{\frac{a}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x=\sqrt{2a}$

$2a=14^2+6^2-2\cdot 6\cdot 14\cdot\cos 120^\circ$ или $14^2=2a+6^2-2\cdot\sqrt{2a}\cdot 6\cdot\cos 120$

$2a=196+36+\cancel{2}\cdot 6\cdot 14$ $\quad$ $196=2a+36-6\sqrt{2a}$

$a=\frac{196+36+\cancel{168}\,84}{2}=158$ $\quad$ $\sqrt{2a}=t$; $t>0$

$t^2-6t-160=0$

$D=36+640=676=26^2$

$t=\frac{-6\pm 26}{2}=10; -16$

-16 не подходит по ОДЗ ($t>0$)

$\sqrt{2a}=10$

$2a=100$

$a=50$

$6^2=14^2+2a-2\cdot\sqrt{2a}\cdot 14\cdot\cos 120^\circ$ — не рассматриваем, т.к. напротив тупого угла лежит большая сторона, что противоречит, т.к. $6<14$.

Ответ: при $a=158$ и $a=50$

№2

Функция $g(x)$ принимает наименьшее значение при $\sin^2 x = 1$:

$\sin^2 x = 1$

$\sin x = 1$

$x = \pm\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

Пусть $n = 0$, $\Rightarrow x = +\frac{\pi}{2}$ и $x = -\frac{\pi}{2}$

$g(\frac{\pi}{2}) = \sin\frac{3\pi}{2} \cdot \sin\frac{7\pi}{2} - \sin^2\frac{\pi}{2} + \cos^2\frac{5\pi}{2} + 4 -$

$g(\frac{\pi}{2}) = (-1)\cdot(-1) - 1 + 0 + 4 = 4$

при $x = -\frac{\pi}{2}$: $g(\frac{\pi}{2}) = \sin(-\frac{3\pi}{2}) \cdot \sin(-\frac{7\pi}{2}) - \sin^2(-\frac{\pi}{2}) + \cos^2(-\frac{5\pi}{2}) + 4$

$g(\frac{\pi}{2}) = 1 - 1 + 0 + 4 = 4$

Ответ: $g_{max} = 5$ $g_{min} = 4$

№3

(1) Заметим, что на первом месте не может стоять 0

(2) По условию, 8 восьмерки стоят друг за другом, значит способов их расстановки 10

(3) Когда в 17-значном числе первые семь - 8-ки, то последующие 10 ~~чисел~~ цифр 7 или 9, значит всего вариантов расстановки 2^{10}

(4) Когда на первом месте стоит 7, то оставшиеся 9 мест занимают 7 и 0 $\Rightarrow$ способов их расстановок - 2^9 и + оставшиеся варианты расстановок семи 8-ок

Таким образом, всего чисел $2^{10} + 9 \cdot 2^9 = 2^9 \cdot 11 = 512 \cdot 11$

Ответ: 5632

№5

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$

ОДЗ:

$\sqrt{x-7} - x > 0$ $x + 4 > 0$ $\sqrt{x+7} - x \neq 1$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

1.2 - 02С
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 (продолжение)

$\sqrt{x+7} > x \nearrow^2$

$x+7>x^2$

$x^2-x-7<0$

$D=1+28=29$

$x=\frac{1\pm\sqrt{29}}{2}=0,5\pm\frac{1}{2}\sqrt{29}$

$x+7>0$

$x>-7$

$\sqrt{x+7}-x\neq 1$

$\sqrt{x+7}\neq 1+x \nearrow^2$

$x+7\neq 1+2x+x^2$

$x^2+x-6\neq 0$

$D=1+24=25$

$x=\frac{-1\pm 5}{2}=-3;2$

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4)\geq 1$

$x+4\geq\sqrt{x+7}-x$

$2x+4\geq\sqrt{x+7} \nearrow^2$

$4x^2+16x+16\geq x+7$

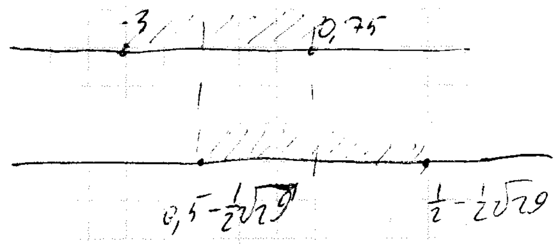
$4x^2+15x+9\geq 0$

$D=225-144=81=9^2$

$x=\frac{-15\pm 9}{8}=-3;\ 0,75$

$x\in[-3;0,75]$

По ОДЗ $x\neq -3;2$, $x>-7$, $x\in(0,5-\frac{1}{2}\sqrt{29};\ 0,5+\frac{1}{2}\sqrt{29})$



Ответ $x\in(0,5-\frac{1}{2}\sqrt{29};\ 0,75]$

№7

Чтобы разность чисел не была кратна 45, нужно брать числа следующим образом: из 1 множества берем первые 6 чисел, из 2 множества не берем первые 6 чисел, а берем последующие 6 чисел и т.д. Таким образом разность 2-ух любых чисел не будет кратна 45, а сумма всех чисел будет минимальна.

$1+2+3+4+5+6+52+53+54+55+56+57+103+104+105+106+107+108+154+$
$+155+156+157+158+159+205+206+207+208+2010+209=21+327+$
$+525+789+1045=2707$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

12 - 020

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y=2x^2$

$49=\cancel{7}$

$x=\pm 7$

$x=\pm 3$

$x=\sqrt{\frac{a}{2}}$

14

86

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha$

$\frac{a}{2}=14^2+6^2-2\cdot 14\cdot 6\cdot\cos 120$

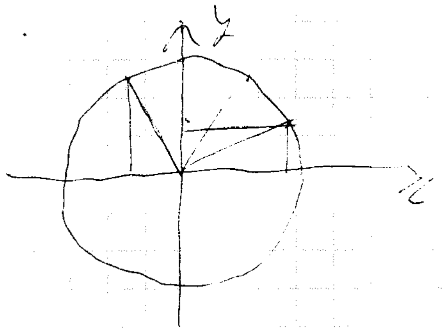
$a=2(14^2+6^2+14\cdot 6)$

$a=2(196+36+64)$

$a=2(260+36)$

$2(316)$

632



$14^2=\frac{a}{2}+b^2+2\sqrt{a}\cdot 6\cdot \cancel{\cos 120}$

$196=\frac{a}{2}+36+6\sqrt{a}$

$\frac{1}{2}t^2+6t-160=0$

$D=36+320=356$

$g(x)=\sin 3x\cdot\sin 7x-\sin^2 x+\cos^2 5x+4$

$g'(x)=3\cos 3x\cdot 7\cos 7x-2\sin x\cdot\cos x+\cancel{2\sin} 5x\cdot$

$-2\cos 5x\cdot\sin 5x\cdot 5$

$g'(x)=3\cos 3x\cdot 7\cos 7x-2\sin x\cdot\cos x-10\cos 5x\cdot\sin 5x$

$21\cos 3x\cdot\cancel{7}\cos 7x-2\sin x\cdot\cos x-10\cos 5x\cdot\sin 5x=0$

-2 $-\frac{1}{2}$

$x=\sqrt{\frac{a}{2}}$ $2\sqrt{\frac{a}{2}}=\sqrt{2a}$

$2a=14^2+6^2+\cancel{2}\cdot 14\cdot 6\cdot 4$

$a=\frac{196+36+84}{2}$

$\boxed{a=158}$

158

79

$14^2=6^2+2a+\sqrt{2a}\cdot 6$

$196-36=2a+\sqrt{2a}\cdot 6$

$160=2a+6\sqrt{2a}$

$2a=t^2$

$t^2+6t-160=0$

$D=36+640=676$

$t=\frac{-6\pm 26}{2}=\begin{matrix}10\\-16\end{matrix}$

$\boxed{a=50}$

☑ черновик ☐ чистовик

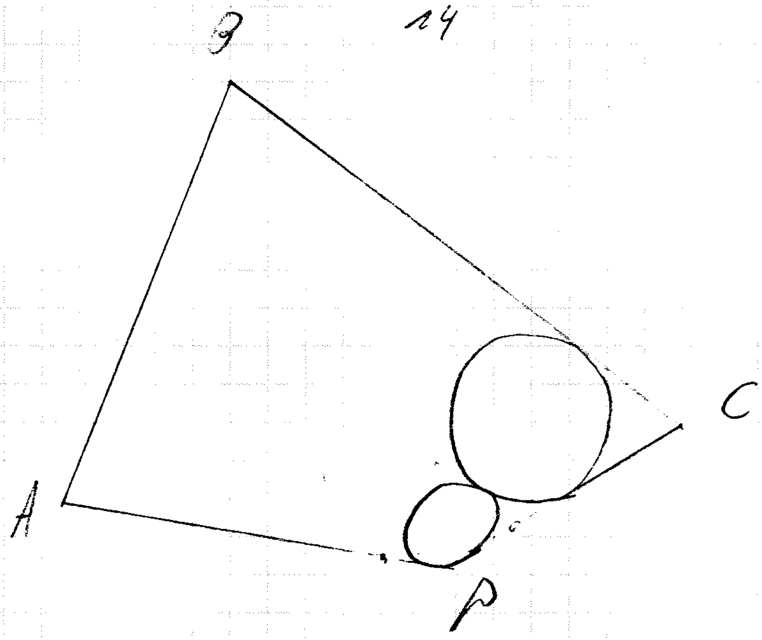
(Поставьте галочку в нужном поле)

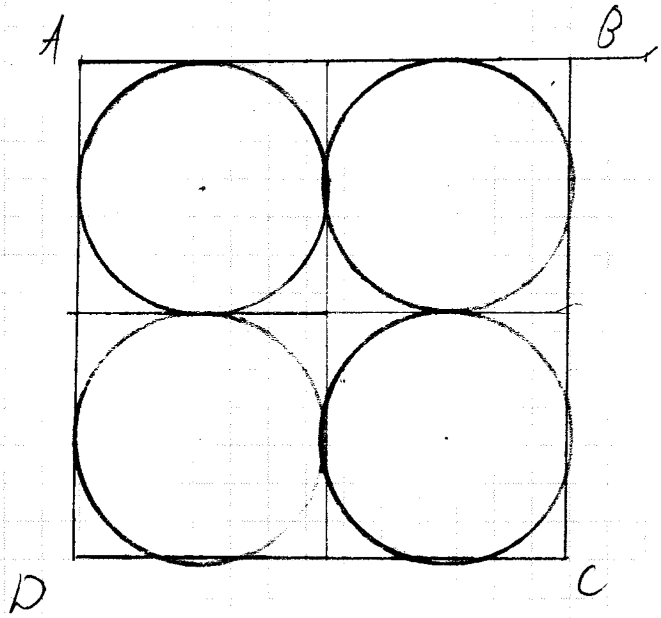
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

8 8 8 8 8 8 0 0 0 0 0 0 0 0 7 10-9! 10!-1

14





МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

12 - 020

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

12-020

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4)\geq 1$

ОДЗ

$\sqrt{x+7}-x\neq 1$

$\sqrt{x+7}-x>0$

$(x+7)>0$

$x>-7$

$x+4\geq\sqrt{x+7}-x$

$2x+4\geq\sqrt{x+7}\ \nearrow^2$

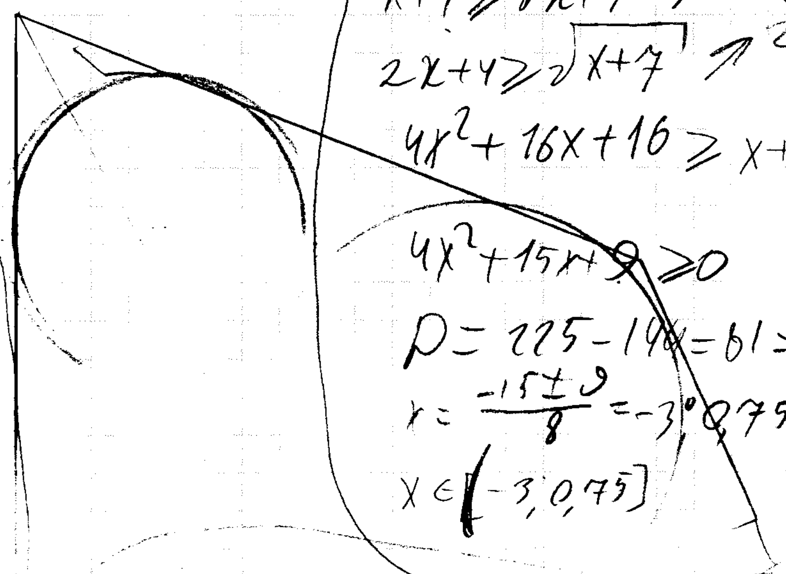
$4x^2+16x+16\geq x+7$

$4x^2+15x+9\geq 0$

$D=225-144=81=9^2$

$x=\frac{-15\pm 9}{8}=-3;\ 0,75$

$x\in[-3;0,75]$



$x+7\neq 1+2x+x^2$

$x^2+x-6\neq 0$

$D=1+24=25$

$x_1=\frac{-1\pm 5}{2}=-3;2$

$x+7>0$

$x>-7$

$\cancel{\sqrt{x+7}-x>0}$

$\sqrt{x+7}>x\ \nearrow^2$

$x+7>x^2$

$x^2-x-7<0$

$D=1+28=29$

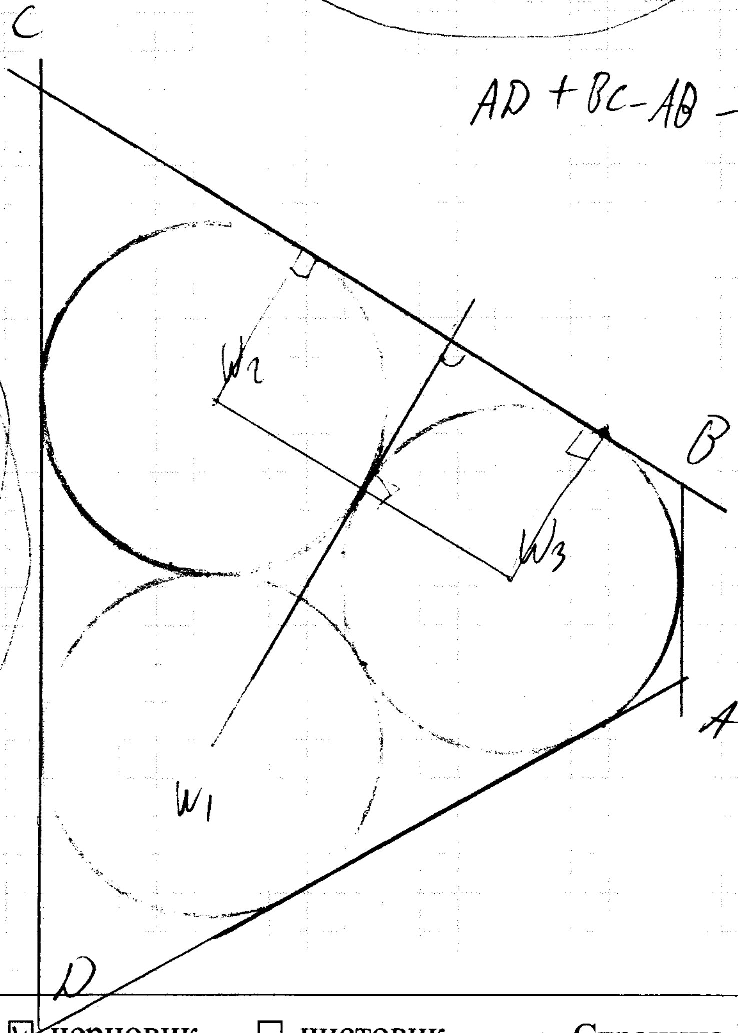
$x=\frac{1\pm\sqrt{29}}{2}=0,5\pm\sqrt{29}$

$x\in(0,5-\sqrt{29};0,5+\sqrt{29})$

$x>-7$

$x\neq -3;2$

$AD+BC-AB-CD=12$

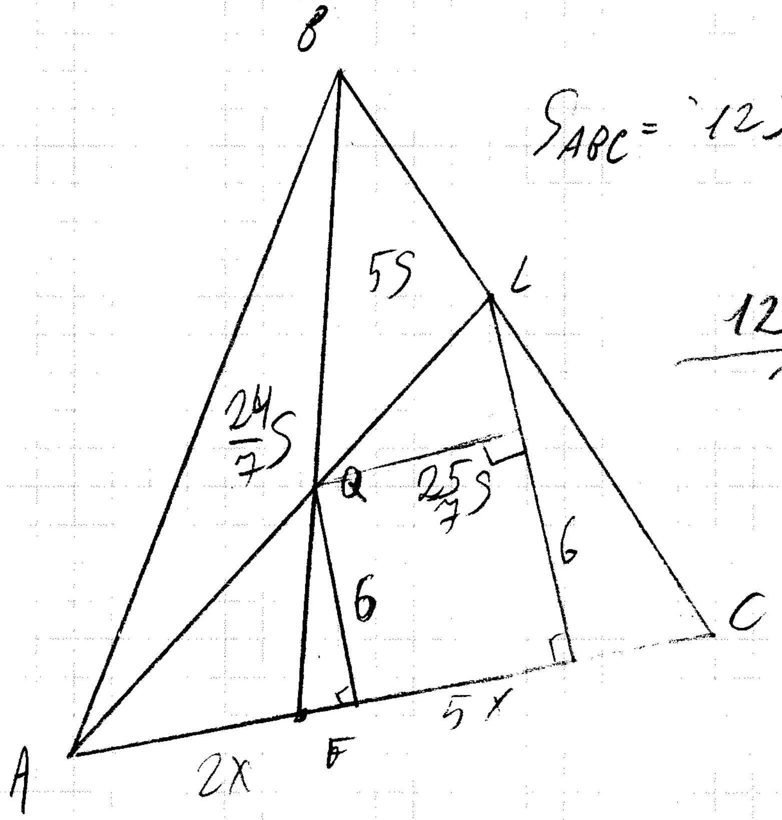


☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$S_{ABC} = 12S$

$\frac{S_{AFC}}{S_{BFC}} = \frac{2}{5}$

$\frac{12 \cdot 5}{7} = \frac{60}{7} - \frac{35}{7} = \frac{25}{7}$

1 2 3 4 5 6

46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56

(91 92 93 94 95 96) 97 98 100 101 102 103 (104 105 106 107 108 109

$$\begin{array}{r} 512 \\ 512 \\ \hline 5632 \end{array}$$