МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2 ШИФР 12-021

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.

3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.

7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$y = x^2$

$y = 169 \Rightarrow x = \pm 13$, длина отрезка треугольника — $2 \cdot 13 = 26$

$y = 64 \Rightarrow x = \pm 8$, длина отрезка треугольника — $2 \cdot 8 = 16$

По теореме косинусов:

$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 120^\circ$

$a^2 = b^2 + c^2 + bc$

Пусть длина отрезка при прямой $y = a$ — это k.

$k = 2\sqrt{a}$

Рассмотрим три случая: если в формуле $a = b^2 + c^2 + bc$, $k = a$, $b = 16$, $c = 26$; $a = 26$, $b = 16$, $c = k$; $a = 16$, $b = 26$, $c = k$.

1) $k^2 = 26^2 + 16^2 + 26 \cdot 16$

$k^2 = 676 + 256 + 416$

$k^2 = 1348$

$4a = 1348$

$\boxed{a = 337}$

2) $26^2 = 16^2 + k^2 + 16k$

$k^2 + 16k - 420 = 0$

$(k+30)(k-14)=0$

Т.к. $k>0$:

$k=14$

$2\sqrt{a}=14$

$\sqrt{a}=7$

$\boxed{a=49}$

3) $16^2=26^2+k^2+26k$

$k^2+26k+420=0$

$k^2+26k+169+251=0$

$(k+13)^2=-251$

$\varnothing$

Ответ: 337; 49

№5

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5)\geq 1$

$\Downarrow$

$\sqrt{x+3}-x\leq x+5$

$\sqrt{x+3}\leq 2x+5$

$x+3\leq (2x+5)^2$

$4x^2+20x+25\geq x+3$

$4x^2+19x+22\geq 0$

$D=361-352=9$

$x=\frac{-19\pm 3}{8}$

$x=-2{,}75;-2$

$(x+2{,}75)(x+2)\geq 0$

$x\in(-\infty;-2{,}75]\cup[-2;+\infty)$

ОДЗ:

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

12-021

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x+5>0 \\ \sqrt{x+3}\geq 0 \\ \sqrt{x+3}-x\neq 1 \\ \sqrt{x+3}-x>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>-5 \\ x\geq -3 \\ x+3\neq (x+1)^2 \\ x+3>x^2 \end{cases}$$

$$x+3\neq x^2+2x+1$$

$$x^2-x-3<0$$

$$D=1+4\cdot 3=13$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$$

$$\left(x-\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)<0$$

$$x\in\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2};\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$$

$$x^2+x-2\neq 0$$

$$(x+2)(x-1)\neq 0$$

$$x\neq -2$$

$$x\neq 1$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x>-5 \\ x\geq -3 \\ x\neq -2 \\ x\neq 1 \\ x>\frac{1-\sqrt{13}}{2} \\ x<\frac{1+\sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>\frac{1-\sqrt{13}}{2} \\ x<\frac{1+\sqrt{13}}{2} \\ x\neq 1 \end{cases}$$

$$x\in\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2};1\right)\cup\left(1;\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$$

Ответ: $\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2};1\right)\cup\left(1;\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$

№7

~~Т.к. никакие 2 числа из выбранных~~

Т.к. разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35, то остатки этих двух чисел от деления на 35 не могут быть одинаковыми $\Rightarrow$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

=> все 25 выбранных чисел должны иметь разные остатки от деления на 35. Выберем все 25 чисел с наименьшими остатками от деления на 35.

Минимальный остаток от деления на 35 — это ноль, однако, выбрав число с остатком ноль от деления на 35, мы выберем максимальное число в промежутке, поэтому мы не будем этого делать.

Возьмем 25 остатков и прибавим к ним $(35+70+105+140)\cdot 5$, чтобы получить сумму всех выбранных чисел:

$1+2+3+4+\ldots+25+(35+75+105+140)\cdot 5 =$

$= 26\cdot 12+13+350\cdot 5 = 2075$

Ответ: 2075

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

12 021

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

1Х - С21

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)