МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2 ШИФР 12-0222

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.

3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

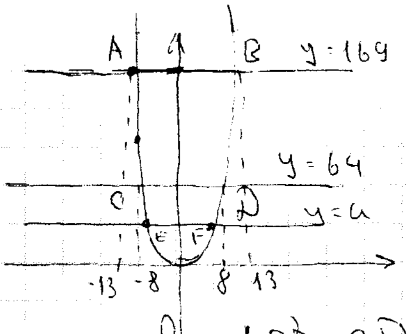
   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.

7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№1

В треугольнике напротив угла 120° будет лежать наибольшая сторона.

1) Пусть $AB = 13\cdot2 = 26$ – наибольшая из трех отрезков, тогда по теор. косинусов: $AB^2 = CD^2 + EF^2 - 2CD\cdot EF\cdot\cos120^\circ$

$26^2 = 16^2 + EF^2 - 2\cdot16\cdot EF\cdot(-\frac{1}{2})$

$EF^2 + 16EF - 420 = 0$, $EF = x$

$\frac{D}{4} = 64 + 420 = 484$

$x_{1,2} = \frac{-8 \pm 22}{1}$, $x_1 = -30$ н.к. $x_2 = 14$

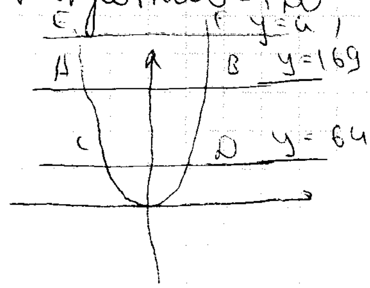
$\frac{EF}{2} = \frac{14}{2} = 7$, $y = x^2 = 7^2 = 49$

Приравняем $y=a$ и $y=x^2$, (т.к. они пересекаются при $x=7$)

$a = x^2$

$a = 49$

2) Если EF – наибольшая из трех отрезков, то она лежит напротив $\angle120^\circ$ по теор. косинусов имеем:



$EF^2 = AB^2 + CD^2 - 2AB\cdot CD\cdot\cos120^\circ$

$EF^2 = 26^2 + 16^2 - 2\cdot26\cdot16\cdot(-\frac{1}{2})$

$EF^2 = 1348$

$EF = \sqrt{1348}$

$x = \frac{EF}{2} = \frac{\sqrt{1348}}{2}$

$y = x^2 = \frac{1348}{4} = 337$

$y = a = x^2 = 337$

Ответ: при $a = 49$ и 337

N 2

$g(x) = \sin 5x \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

$\frac{1}{2}(\cos(5x-9x) - \cos(5x+9x)) - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 = \frac{1}{2}\cos 4x -$

$- \frac{1}{2}\cos 14x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 = \frac{\cos 4x}{2} + \cancel{\sin^2 7x} - \frac{1}{2} -$

$- \cancel{\sin^2 7x} - \cos^2 x - 3 = \frac{\cos 4x}{2} - \cos^2 x - 3\frac{1}{2} =$

$\left(\sin^2 7x = \frac{1-\cos 14x}{2}, \Rightarrow -\frac{\cos 14x}{2} = \sin^2 7x - \frac{1}{2}\right)$

$= \frac{1}{2} + \frac{\cos 4x}{2} - \cos^2 x - 4 = \cos^2 2x - \cos^2 x - 4 = (\cos^2 x - \sin^2 x)^2 -$

$- \cos^2 x - 4 = (2\cos^2 x - 1)^2 - \cos^2 x - 4 = 4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1 -$

$- \cos^2 x - 4 = 4\cos^4 x - 5\cos^2 x - 3$

$g'(x) = 4 \cdot 4\cos^3 x \cdot (-\sin x) - 5 \cdot 2\cos x \cdot (-\sin x) = -16\cos^3 x \sin x +$

$+ 10\cos x \sin x = 2\cos x \sin x(5 - 8\cos^2 x) = 2\sin 2x(5 - 8\cos^2 x)$

$g'(x) = 0$

$2\sin 2x(5 - 8\cos^2 x) = 0$

1) $\sin 2x = 0$

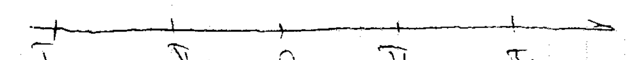
$x = \frac{\pi n}{2}, n \in Z$

2) $5 - 8\cos^2 x = 0$

$\cos^2 x = \frac{5}{8}$

$\cos x = \pm\sqrt{\frac{5}{8}}$

$x = \pm \arccos\sqrt{\frac{5}{8}} + 2\pi k, k \in Z$



$-\pi \quad -\frac{\pi}{2} \quad 0 \quad \frac{\pi}{2} \quad \pi$

N 7

Чтобы сумма выбранных чисел была минимальна, из каждого промежутка нужно выбрать по 5 минимальных чисел. Но т.к. разность никаких двух чисел не делится на 35, все выбранные числа должны иметь разные остатки от деления на 35.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

остаток: 1 2 3 ... 0 | 1 2 ... 0
(номер в группе)
число: 1 2 3 ... 35 | 36 37 ... 70

1 группа, 2 гр

1 2 ... 0
71 72 ... 105

...

3 гр

Нельзя не должен брать числа с одинаковыми номерами в их группе. Чтобы сумма была минимальна, нужно сжать подряд первые 5 чисел первой группы, вторые 5 чисел 2-ой группы; ... пятые пять чисел 5-ой группы либо ~~...~~ первые 5 чисел последней группы, вторые 5 чисел четвертой группы, ... пятые пять чисел 1-ой группы. В любом случае получится $415 \cdot 5 = 2075$

Ответ: 2075

N5

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$

ОДЗ: ~~$x > -5$~~

~~$\sqrt{x-3}-x>0$~~

~~$\sqrt{x-3}>x$~~

$$\begin{cases} x+5>0 \\ \sqrt{x+3} \geq 0 \\ \sqrt{x+3}-x>0 \\ \sqrt{x+3}-x \neq 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} x>-5 \\ x \geq -3 \end{cases}\right\} \Rightarrow x \geq -3$$
$\sqrt{x+3}>x$

Если $\cancel{x<0}$, то $\sqrt{x+3}>0$, $\sqrt{x+3}-x>0$
$-3\le x<0$

Если $x\ge 0$, то: $x+3>x^2$

$x^2-x-3<0$

$D=1+4\cdot 3=13$

$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$

$x\in[0;\frac{1+\sqrt{13}}{2})$

$\sqrt{x+3}-x\ne 1$

$\sqrt{x+3}\ne x+1$

$x+3\ne x^2+2x+1$

$x^2+x-2\ne 0$

$D=1+4\cdot 2=9$

$x_{1,2}=\frac{-1\pm 3}{2}=-2$ и 1

$\boxed{\text{ОДЗ: } x\in[-3;1)\cup(1;\frac{1+\sqrt{13}}{2})}$

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5)\geq 1$

~~$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5)-\log_{\sqrt{x+3}-x}(\sqrt{x+3}-x)\geq 0$~~

~~$\log_{\sqrt{x+3}-x}\frac{x+5}{\sqrt{x+3}-x}\geq 0$~~

~~$\log_{\sqrt{x+3}-x}\frac{\sqrt{x+3}-x}{x+5}\geq 0$~~

$\log_{\sqrt{x+3}-x}\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5)\geq\log_{\sqrt{x+3}-x}1$

$x+5\geq 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x \geq -5$

Ответ: $[-3; 1) \cup (1; \frac{1+\sqrt{13}}{2})$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

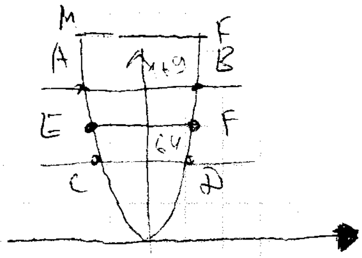
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

12-022

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$169 = x^2 \Rightarrow x = \pm 13$

$64 = x^2 \Rightarrow x = \pm 8$

$AB = 26$

$CD = 16$

$EF = b$

120

$\cos 120 =$

$2a = 28$

$a = 14$

$a - b = 10$

$a + b = 18$

1) $AB^2 = CD^2 + EF^2 - 2EF\,CD \cos 120^\circ$

$169 = 64 + EF^2 - 2 \cdot 16 \cdot EF \cdot -\frac{1}{2}$

$EF^2 + 16EF - 105 = 0$

$\begin{array}{r} 169 \\ -64 \\ \hline 105 \end{array}$

$D = 676$

$= 10$

$\frac{a-b}{2} = 5$

$EF_{1,2} = \frac{-16 \pm 26}{2} = 5$

$\frac{EF}{2} = 2,5$

$\frac{a+b}{2} = 9$

$\sin a \sin b = \frac{1}{2} \cos a - b - \cos a + b$

$EF = \frac{\sqrt{1348}}{2}$

$\cancel{\sin 7} x 14 \quad 4 \quad a \quad b$

$\cos 4x - \cos 14x = -2\sin 9 \sin 5$

$y = \sin$

$\sin^2 \frac{a}{2} = \frac{1 - \cos a}{2}$

$(\sin^2 x)' = 2 \sin x \cos x$

$\sin^2 7x = \frac{1 - \cos 14x}{2}$

$\sin^2 7x = \frac{1}{2} - \frac{\cos 14x}{2}$

$(\cos^2 2x - \sin^2 2x)^2 = \cos^4 2x - 2\cos^2 2x \sin$

$\sin \cdot \sin =$

$(\cos^2 x = 2\cos x \cdot (1 - \sin$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$(\cos^2 x - \sin^2 x)^2 = \cos^4 x - 2\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x - \cos^2 x - 4$

$= (\cos 2x - \cos x)(\cos 2x + \cos x) = 2\cos 1{,}5x \cos 0{,}5x \cdot$

$\cdot -2\sin 1{,}5x \sin 0{,}5x = -2\cos 1{,}5x \sin 1{,}5x \cdot 2\cos 0{,}5x \sin 0{,}5x =$

$= -\sin 3x \sin x \quad -4$

$-\sin 3x \sin x - \sin^2 x - \cos^2 x$

$\|$

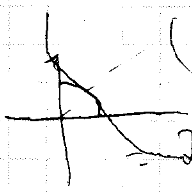
$-\frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x)$

$4 \cdot 4\cos^3 x \cdot (-\sin x) -$

$-5 \cdot 2\cos x \cdot (-\sin x) =$

$= -16\cos^3 x \sin x + 10\cos x \sin x$

$2\cos x \sin x (5 - 8\cos^2 x)$



$(C)' = (\cos^2 2x - \cos^2 x - 4)' = (\cos^2 2x)' + (-\cos^2 x) =$

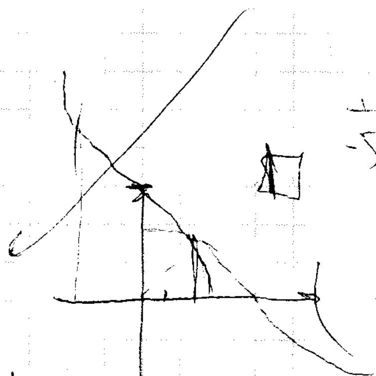
$= 2\cos 2x \cdot (-\sin 2x) \cdot 2 + 2\cos x \cdot (-\sin x) =$

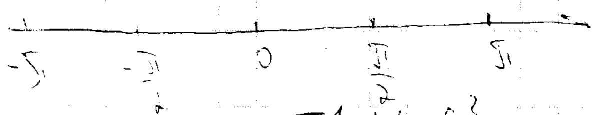
$= -4\cos 2x \sin 2x + 2\cos x \sin x = -4\cos 2x \sin 2x +$

$+ \sin 2x = \sin 2x (1 - 4\cos 2x) = 0$

$\sin 2x = 0$

$x = \frac{\pi n}{2}, n \in Z$





$-1 + \cos^2 x$

$\cos^2 2 \quad -\sin^2 x)$

$\cos 2x = \frac{1}{4}$

$x = \frac{\pm \arccos \frac{1}{4}}{2} + \frac{\pi k}{2}$

$(\cos^2 x - 1)^2$

$\cos^2 x = \frac{5}{8}$

$\cos^4 x - 2\cos^2 x - 1$

$\cos x = \pm \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}}$

$-\sin^2 x - (1 - \cos^2 x)$

$4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1 - \cos^2 x - 4$

$-1 + \cos^2$

$(2\cos^2 x - 1)^2 - (\cos x - 2)(\cos x + 2)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

12-022

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1 2 3 4 5 41 42 43 44 45 ~~71 72 73 74 75~~

~~86 87 88 89 90~~ 126 127 128 129 130

81 82 83 84 85

~~166 167 168 169 170~~ 2 3 4 25

2248

141 142 143 144 145 111 112 113 114 115

81 82 83 84 85

51 52 53 54 55 161 162 163

164 165

21 22 23 24 25

$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} \geq 1$

$\log_a b \geq 1$

$\log_a \log_a b \geq \log_a 1$

$\log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} \geq \log_{\frac{1}{2}} 1$

$\log_{\frac{1}{2}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

~~$\log_a b^{\log}$~~

$\log_{\sqrt{x+3}-x} |x+5|^{\log}$

$\log$