

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1

ШИФР

12 - 02 13

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120° ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.
3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
 - в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB .
5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.
7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

Дано:

Парабола $y = 2x^2$

$$y = 98$$

$$y = 18$$

$$\angle = 120^\circ$$

Найти: $y = a$, при которой

из трех отрезков, которые высекает

парабола на цилиндре из пряжи

(y = 98; y = 18; y = a), можно составить

треугольник с углом 120° ?

Решение:

Пусть сторонами треугольника обозначим отрезки A, B и C.

Поскольку, следуя из условия; мы сможем найти эти отрезки:

$$\text{Сторона } A \quad 98 = 2x^2$$

$$x = \pm 7$$

Значит наш отрезок, который высекает парабола расположен

$$\text{от } -7 \text{ до } 7 \Rightarrow a = 14$$

Аналогично с другими сторонами

$$\text{Сторона } B. \quad 18 = 2x^2$$

$$x = \pm 3 \Rightarrow b = 6$$

$$\text{Сторона } C \quad a = 2x^2$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{a}{2}} \Rightarrow c = 2\sqrt{\frac{a}{2}}$$

Теперь мы знаем все стороны и угол, а значит

можем найти третье по теореме косинусов

$$2a = 196 + 36 - 168 \cdot \cos(120)$$

$$a = \frac{196 + 36 - 168 \cdot (-\frac{1}{2})}{2} = \frac{316}{2} = 158$$

$$\text{Значит сторона } C = 2\sqrt{\frac{158}{2}}$$

$$C = 2\sqrt{79}$$

2 варианта решения

Пусть 14 - максимальная сторона, и напротив максимальной стороны лежит наибольший угол

$$196 = 2a + 56 + 4\sqrt{\frac{a}{2}} \quad | : 2$$

$$98 = a + 28 + 2\sqrt{\frac{a}{2}}$$

$$a + 28 + 2\sqrt{\frac{a}{2}} - 98 = 0$$

$$a^2 - 178a + 6400 = 0$$

$$D = 178^2 - 4 \cdot 6400 = 6084$$

$$a_{1,2} = \frac{178 \pm 78}{2}$$

$$a_1 = 128$$

$$a_2 = 50$$

$$C = 2\sqrt{\frac{a}{2}}$$

1. при $a = 128$ $C = 2 \cdot 8 = 16$, но у нас по условию напротив максимальной стороны лежит наибольший угол $A = 14$, значит $a = 128$ не подходит.

2. при $a = 50$ $C = 2 \cdot 5 = 10$ - удовлетворяет условию.

Ответ: $a = 158$ и 50

и 5

$$\log_{\sqrt{x+4}-x} (x+4) \geq 1$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x+4 > 0 & 1) \\ \sqrt{x+4}-x > 0 & 2) \\ \sqrt{x+4}-x \neq 1 & 3) \end{cases}$$

1) $x > -4$

2) $\sqrt{x+4} - x > 0$

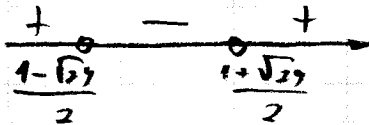
3) $\sqrt{x+4} - x \neq 1$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^2 - x - 7 < 0$$

$$D = 29$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}$$



$$x \in \left(\frac{1 - \sqrt{29}}{2}; \frac{1 + \sqrt{29}}{2} \right)$$

Объединяем ОДЗ: $x \in \left(\frac{1 - \sqrt{29}}{2}; 2 \right) \cup \left(2; \frac{1 + \sqrt{29}}{2} \right)$

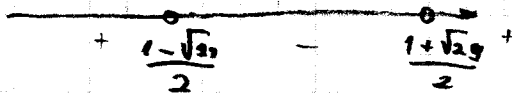
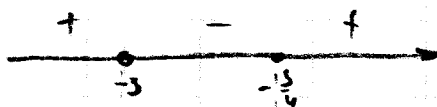
$$\log_{(x-2)}(x(x+4)) \geq 1$$

$$\sqrt{x+7} - x \geq x+4$$

$$4x^2 + 15x + 29 \geq 0$$

$$D = 15^2 - 4 \cdot 4 \cdot 29 = 81$$

$$x_{1,2} = \frac{-15 \pm 9}{8} = -\frac{3}{4} \text{ и } -3$$



Ответ: $x \in (-\infty; -3) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{29}}{2}; +\infty \right)$

~ 7

Нам нужна наименьшая сумма, поэтому числа из промежутка.
Будем брать наименьшие, т.е. из самого начала промежутка.

$[1, 45], [46, 90], [91, 135], [136, 180], [181, 225]$

на $\times 45$ делится: $\pm 45, \pm 90, \pm 135, \pm 180$

I промежуток. Числа 1; 2; 3; 4; 5; 6

II промежуток. начинается 46, 47; 48; 49; 50; 51, но они не подходят, т.к. при разности с I промежутком образуются числа: 45.

Берем следующую шестерку чисел из II промежутка

52; 53; 54; 55; 56; 57 - они подходят, т.к. при разности с числами из I промежутка нет чисел: 45.

III промежуток. действуем аналогично, как с предыдущим, только нам не подходит уже первые две шестерки промежутка, т.к. они: 45 при разности с I и II числами из I и II промежутка. Берем только шестерку чисел III промежутка. 103; 104; 105; 106; 107; 108. - они подходят.

IV промежуток. аналогично с предыдущим подбираем так, чтобы разность с числами из I, II и III промежутка была < 45 .

Первые три шестерки чисел нам не подходят, а вот ~~четыре~~ четвертая нам устраивает. 154; 155; 156; 157; 158; 159.

V промежуток. Нам не подходит уже ~~первые~~ ^{первые} четвертые шестерки чисел, т.к. при их разности с числами из

I, II, III и IV промежутков: 45. Берем пятую шестерку.

205; 206; 207; 208; 209; 210, которые нам полностью устраивают.

Получаем: $1+2+3+4+5+6+52+53+54+55+56+57+103+104+105+106+107+108+154+155+156+157+158+159 = 3165$ - это наименьшая

сумма ~~этих~~ чисел. Выбранного Пилоккино.

Ответ: 3165