# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 класс

БИЛЕТ 1 ШИФР 12 - 0223

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра $a$ из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса $\omega_1$, $\omega_2$ и $\omega_3$, причём $\omega_1$ касается сторон $AD$ и $DC$, $\omega_2$ касается сторон $DC$ и $CB$, а $\omega_3$ касается сторон $CB$, $BA$ и $AD$.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол $AOB$, где $O$ – центр окружности $\omega_3$.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите $AB$.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geqslant 1$.

6. Точки $F$ и $L$ лежат на сторонах $AC$ и $BC$ треугольника $ABC$ соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки $BF$ и $AL$ пересекаются в точке $Q$; площади треугольников $BQL$ и $BAC$ относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки $L$ до прямой $AC$, если расстояние от точки $Q$ до прямой $AC$ равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

12-023
ШИФР
(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

Дано:

Парабола $y = 2x^2$

$y = 98$

$y = 18$

$\angle = 120°$

Найти: $y = a$, при которой из трех отрезков, которые высекает парабола на каждой из прямых ($y = 98$; $y = 18$; $y = a$), можно составить треугольник с углом $120°$?

Решение:

Пусть сторонами треугольника обозначим отрезки A, B и C.

Тогда, следуя из условия; мы сможем найти эти отрезки:

Сторона A $\quad 98 = 2x^2$

$$x = \pm 7$$

Значит наш отрезок, который высекла парабола располагается от $-7$ до $7$ $\Rightarrow a = 14$

Аналогично с другими сторонами

Сторона B. $\quad 18 = 2x^2$

$$x = \pm 3 \Rightarrow b = 6$$

Сторона C $\quad a = 2x^2$

$$x = \pm\sqrt{\frac{a}{2}} \Rightarrow c = 2\sqrt{\frac{a}{2}}$$

Теперь мы знаем две стороны и угол, а значит можем найти третью по теореме косинусов

$$2a = 196 + 36 - 168 \cdot \cos(120)$$

$$a = \frac{196 + 36 - 168 \cdot (-\frac{1}{2})}{2} = \frac{316}{2} = 158$$

Значит сторона $C = 2\sqrt{\frac{158}{2}}$

$c = 2\sqrt{79}$

2 вариант решения

Пусть 14 - максимальная сторона, и напротив максимальной сторона лежит наибольший угол

$196 = 2a + 36 + 12\sqrt{\frac{a}{2}} \quad | : 2$

$98 = a + 18 + 6\sqrt{\frac{a}{2}}$

$a + 18 + 6\sqrt{\frac{a}{2}} - 98 = 0$

$a^2 - 178a + 6400 = 0$

$D = 178^2 - 4 \cdot 6400 = 6084$

$a_{1,2} = \frac{178 \pm 78}{2}$

$a_1 = 128$

$a_2 = 50$

$C = 2\sqrt{\frac{a}{2}}$

1. при $a = 128$ $c = 2 \cdot 8 = 16$, но по нашему условию максимальной стороной является $A = 14$, значит $a = 128$ не подходит.

2. при $a = 50$ $c = 2 \cdot 5 = 10$ - удовлетворяет условию.

Ответ: $a = 158$ и $50$

№ 5

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$

ОДЗ: $\begin{cases} x + 4 > 0 & 1) \\ \sqrt{x+7} - x > 0 & 2) \\ \sqrt{x+7} - x \neq 1 & 3) \end{cases}$

1) $x > -4$

2) $\sqrt{x+7} - x > 0$ 3) $\sqrt{x+7} - x \neq 1$

☐ черновик ☒ чистовик Страница № 2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

1К-023
ШИФР
(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^2 - x - 7 < 0$

$D = 29$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}$

$+ \quad \frac{1-\sqrt{29}}{2} \quad - \quad \frac{1+\sqrt{29}}{2} \quad +$

$x \in \left(\frac{1-\sqrt{29}}{2}; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

$x^2 + x - 6 \neq 0$

$D = 25$

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = -3; 2$

$x \neq -3$

$x \neq 2$

Общее ОДЗ: $x \in \left(\frac{1-\sqrt{29}}{2}; 2\right) \cup \left(2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

$\log_{\sqrt{x+7} - x}(x+4) \geq 1$

$\sqrt{x+7} - x \geq x + 4$

$4x^2 + 15x + 9 \geq 0$

$D = 15^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 81$

$x_{1,2} = \frac{-15 \pm 9}{8} = -\frac{3}{4}; \cancel{-3} \; -3$

$+ \quad -3 \quad - \quad -\frac{3}{4} \quad +$

$+ \quad \frac{1-\sqrt{29}}{2} \quad - \quad \frac{1+\sqrt{29}}{2} \quad +$

Ответ: $x \in (-\infty; -3) \cup \left(\frac{1+\sqrt{29}}{2}; +\infty\right)$

№7

Нам нужна наименьш. сумма, поэтому числа из промежут. будем брать наименьшие, т.е из самого начала промежутка.

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

[1, 45], [46; 90]; [91; 135], [136; 180], [181; 225]

на 45 делятся: ±45; ±90; ±135; ±180

I промежуток. Числа 1; 2; 3; 4; 5; 6

II промежуток. начинается 46, 47; 48; 49; 50; 51, но они не подходят, т.к. при разности с I промежутком образуются числа ⋮ 45.

Берем следующ. шестерку чисел из II промежутка 52; 53; 54; 55; 56; 57 - они подходят, т.к. при разности с числами из I промежутка нет чисел ⋮ 45.

III промежуток. действуем аналогично, как с предыдущем, только нам не подходит уже первые две шестерки промежутка, т.к. они ⋮ 45 при разности с ~~I и II~~ числами из I и II промежутка. Берем третью шестерку чисел III промеж. 103; 104; 105; 106; 107; 108 - они подходят.

IV промежуток. аналогично с предыдущ. подбираем так, чтобы разность с числами из I, II и III промежутка были $\not\vdots$ 45. Первые три шестерки чисел нам не подходят, а вот ~~пятая~~ четвертая нас устраивает. 154; 155; 156; 157; 158; 159.

V промежуток. Нам не подходят уже ~~первая~~ первые четыре шестерки чисел, т.к. при их разности с числами из I, II, III и IV промежутка ⋮ 45. Берем пятую шестерку. 205; 206; 207; 208; 209; 210, которая нас полностью удовлетворяет.

Получаем: 1+2+3+4+5+6+52+53+54+55+56+57+103+104+105+106+107+108+154+155+156+157+158+159 = 3165 - это наименьшая сумма ~~его~~ чисел. выбранных Пиноккио.

Ответ: 3165